

欢迎提出宝贵意见!

xhcheng@seu.edu.cn

025-83792230

13601450958

2010-03-12

1

惯性导航系统原理

程向红

2010-03-12

2

绪论

Navigation

运动物体 Any mobile vehicle

包括舰船、车辆、飞机、宇宙飞行器和卫星等，通常叫做载体。

Reference Frame

是指地球表面、空间和太阳系等。

是指在某参考系内将运动物体从一点引导另一点的过程。



Astronautics[æstrə'no:tiks]

Aeronautics

早期

导航通常意味着正确地引导船舶在海上航行

导航===航海

Nautics 航海

随着科学技术的不断发展

飞机、导弹、人造卫星和宇宙飞船等相继出现，导航的含义不局限于航海

☺ Autopilots for **guidance** and control of aircraft, missiles, ships and land vehicles;

☺ **Control** of gimbals and other structures.



观测舰位法和推算舰位法

船舶在海上航行

位置
速度
航向
航程

由于各种舰艇，特别是导弹核潜艇的出现，为了满足发射导弹和稳定其他装置的需要，除要求导航系统提供上述参数外，还要提供水平基准信号。

舰船的导航方法有多种，根据获得导航数据的手段，其方法大致可分为两类

观测舰位法

推算舰位法

观测舰位法

依靠观测外部目标或接收外部（光波、无线电）信号来确定舰位

地文导航

利用目测、光学等方法，辨认和观测地面或海上的特定标志，以确定舰位

天文导航

利用测定天体（日、月、星）相对于水平面的高度角和相对于真北的方位角，来计算出舰位

无线电导航

测出舰船相对于地面导航台的几何参量，建立若干位置线，根据两条位置线的交点来确定舰位

罗兰 (Loran Long Rang Navigation) 远程无线电导航

奥米加 (OMEGA) 超远程无线电导航系统

卫星导航

对一定轨道上的人造卫星进行电波观测，求出舰船相对于卫星的位置，再根据已知的卫星相对于地面的位置来计算出舰位。

GPS (Global Positioning System)

Navigation System Timing and Ranging

²⁰¹⁰⁻⁰³⁻¹² GLONASS (Global Navigation Satellite)



推算舰位法

航位推算法 (dead reckoning)

利用舰船自身的导航设备，不断测量舰船的航向、航速或加速度，加入初始位置，推算出舰船的瞬时位置

例如，利用陀螺罗经测量舰船的航向，利用计程仪连续地测量出舰船相对于海水的速度，将速度在相应的坐标系内分解，再对时间积分，即可求出舰船的航程。

惯性导航，是利用加速度计测量舰船的运动加速度，对时间进行两次积分，从而确定舰位。因此，惯性导航法也是一种推算舰位法。



舰船的各种导航方法，在具体应用中相辅相成

观测舰位法

地文导航

易受天候限制，定位精度较低；
但其所使用设备结构简单，使用方便，故障较少。

天文导航

易受天候限制，如在潜艇上使用，需露出水面观测、容易暴露目标；但其定位精度较高。

无线电导航

作用距离较远，定位精度较高，且不受时间和天候的限制；
但易受自然或人为的干扰和发射台的限制，潜艇处于水下状态时不能使用。

卫星导航

容易做到全球、全天候导航，定位精度高；
但不能实时连续导航。

综合导航系统

2010-03-12



推算舰位法

陀螺罗经、计程仪加上航迹自绘仪系统，使用比较广泛。

但是，长时间使用这些设备定位，容易产生积累误差。迄今为止，很多计程仪只能测量舰船相对于海水的速度，而不是相对于地面的速度，海水又有流向和流速的变化，影响了测量精度。

为了提高导航精度，往往把它们组成**综合导航系统**。



惯性导航系统

自主性强

不依赖于任何外部信息

隐蔽性好

不向外辐射能量

实时性

连续地提供舰船的航速、舰位及航向角、纵横摇角信息
在作战舰艇上尤其是**战略核潜艇**上使用最为理想

设备比较**复杂**；

需要用精密的惯性元件——陀螺仪和加速度计；

加工、装配及维护保养等需要较高的技术水平；

成本较高；

长时间工作，陀螺仪的漂移会造成**无界定位误差**；

当长时间使用惯性导航系统时，必须利用其他导航仪器对它进行校准。



惯性技术是什么？

惯导（惯性导航与惯性制导）技术
Inertial Navigation and Guidance 的通称。
惯性仪表技术（各类陀螺仪和加速度计）
惯性测量技术以及有关设备和装置

它在国防科学技术中占有非常重要的地位，因而是世界各工业强国重点发展的技术领域之一。随着惯性技术的不断发展，许多国家已将其应用领域扩大到民航、船舶、大地测量、石油钻探、地球物理测量、海洋探测、气象探测、铁路、隧道等许多技术领域。



惯性技术属于尖端技术，是多学科的综合技术

精密机械

—— 加工 三浮陀螺 半球谐振陀螺。

计算机技术

—— 软件、硬件，采样，接口、通讯等。

自动控制

—— 古典，现代。初始对准和在线校正。

微电子

—— 微机械陀螺和加速度计。

数学

—— 力学刚体定转动，工程矩阵，建模和算法。

材料

—— 影响结构稳定性的主要因素。高性能磁性材料。

光学

—— 光学陀螺（激光陀螺和光纤陀螺）

光学标定，子午线引入，对准。

它涉及多种学科、多种技术的交叉学科。



惯性技术在国防建设中的地位

- 对于惯性制导的中远程弹道导弹，一般说来其命中精度**70%**取决于惯性系统的精度，基本上决定了导弹是否能**“打准”**的问题。

，导弹核潜艇。由于潜航时间长，其位置和速度是变化的，这些数据是发射导弹的初始状态参数，直接影响导弹的命中精度，因而需要提供高精度的位置、速度和竖直对准信号。目前适用于**核潜艇的唯一导航设备**就是惯性导航系统。



惯性技术在国防建设中的地位

f 对于远程巡航导弹，则惯性制导系统加上地图匹配技术或其他末制导技术，可保证它飞越几千公里后仍能以极高的精度击中目标。

“ 惯性技术不仅在战略武器中占有极其重要的地位，而且在战术武器中的应用也日益广泛。反舰导弹、空空导弹、炮兵阵地定位，坦克攻击定位、战术飞机导航攻击及舰船导航。



Drapper(德雷泊)主张按惯性系统的功能、惯性仪表的精度及其进展阶段来划分发展时期，以说明惯性技术发展的进程和展望。

第一代：1930年以前的惯性技术

1852年，傅科将高速旋转刚体称为陀螺，利用它对惯性空间的稳定性来设计仪表，显示地球的自转，并建议用此测量经纬度。

20世纪初期，北极探险者希望得到一种能代替磁罗盘在北极地区船只上指示南北方向的仪表，由于当时有了滚珠轴承和电机，使得安休兹(德国)和斯伯利(美国)分别于1906年和1911年研制出世界上最早的陀螺罗盘。从此，惯性仪表在运动物体上测量方位的设想便得以实现。



第二代：惯性技术始于40年代火箭发展的初期

它以测量载体相对于地球的位置为目的。德国V-2火箭就是用两个二自由度陀螺控制飞行姿态，并用陀螺加速度计控制关机点速度，以实现轨道控制。这是在武器上第一个正式使用的惯性制导系统。

美国液浮技术和气浮技术在这一阶段(1970年以前)发展情况

1942年，德雷泊实验室研制成了液浮速率陀螺，并用于海军舰艇的火炮控制系统上，效果很好。

1945年，德雷泊实验室开展了惯导系统的研究工作，发展了液浮惯性仪表技术。

1950年，首次试验机载惯导系统，它的自由度滚珠轴承陀螺的漂移量约为 $12^{\circ}/h$ 。



1953年，开始设计“雷神”等弹道式导弹制导系统。这是由单自由度液浮陀螺与液浮陀螺加速度计组成的平台计算机系统。
1956年试飞成功后加以改进，成为大力神II的制导系统。

1954年，在机载惯导系统的基础上，又研制出第一套舰船惯导系统。

1955年，定位精度为0.5n mile/h的单自由度液浮陀螺平台惯导系统研制成功，从1945年算起，它整整花了10年时间。

nautical mile 海里（合1.852公里）

1956年，在经过前一段探索研究的基础上，德雷泊实验室确认铍是制造陀螺的理想材料，此后便着手用铍材料做陀螺零件的研究。

1957年，开始将磁悬浮技术用到北极星导弹制导系统的惯性仪表上。德雷泊实验室从50年代初就开始研究磁悬浮技术。由于利用磁悬浮消除了轴间摩擦和提高了浮子定中精度，使陀螺的干扰力矩减小2~3个数量级。



1958年，用液浮陀螺惯导系统取得了核潜艇在冰层下潜航通过北极的惊人成就。潜航96h后露出水面时，其实际位置和计算位置仅差几海里。

1959年，G7A型液浮陀螺采用**动压马达**（即气体自润滑轴承的马达）。它与装滚珠轴承马达的陀螺相比，精度提高了**5倍**，平均无故障间隔时间延长了**4倍**。

1964年，德雷泊实验室研制出第一套“阿波罗”登月舱用的惯性测量装置。

二自由度液浮陀螺是从50年代中期开始研制的。1959年，美国利顿（Litton）公司制造出G200型**二自由度液浮陀螺**，用于飞机与舰船的惯导系统。



惯性技术在这个阶段有如下特点

(1) 为了减少惯性仪表支撑的摩擦与干扰，提高仪表的精度，采用了这支撑悬浮技术，出现了液浮、气浮、磁悬浮等技术。

三浮

(2) 除陀螺外，还出现了另一种惯性仪表——加速度计。从而，在载体上可以不依赖外部信息而测量其质心的运动轨迹。

(3) 普遍采用单自由度陀螺与反馈回路所组成的系统——框架式稳定平台。用平台上安装的加速度计来测量载体的运动加速度，经两次积分就可求得运动的轨迹。这种惯性导航系统已是一种自主式的轨道测量系统。

(4) 采用了镀材料等特种材料与新型元器件（如动压马达），并不断改进设计和工艺等，以减少仪表及系统的随机误差。



(5) 为了提高系统及仪表的精度，还设计了高精度测试设备，改善测试方法，建立误差模型，并采用了各种类型的**误差补偿技术**，如平台旋转技术、壳体旋转技术，陀螺反转技术、陀螺角动量调制技术、陀螺监控技术及软件补偿技术等。

(6) 平台、陀螺、加速度计等都是运动物体的控制系统实现方位或轨迹控制的主要部件。惯性技术与自动控制技术在发展中互相依赖，互相促进，使惯性技术和现代控制技术均能迅速发展。

上述惯性技术的进展，说明液浮和气浮惯性技术在第二代已进入较成熟的阶段，并在**战略与战术导弹**武器、飞机、舰艇及民用等方面获得越来越广泛的应用。



第三代：静电、挠性、激光陀螺

1952年，提出**静电陀螺**的概念，利用**高压静电场**支承球形转子。

1963年康尼维尔公司研制成功核潜艇用的静电陀螺监控系统。

1970年开始作为监控器用于北极星和海神核潜艇上。

挠性陀螺是一种挠性接头支承的自由转子陀螺。1958年开始研制的是细颈式，1962年开始出现**动力调谐式**，目前的产品均采用后一种形式。

1960年，激光技术在世界上首次出现后，美国斯佩里公司于1963年首次研制出能测 $50^\circ/h$ 的**激光陀螺**。

1975年和1976年分别在战术飞机和导弹上试验成功，导航精度达 $1n \text{ mile/h}$ 左右。1981年激光惯导系统的导航精度已达 $0.1n \text{ mile/h}$ 。



第四代：光学陀螺

Sagnac效应

光纤陀螺

激光陀螺

微电子与光学的完美结合。

第五代：微机械、微光学陀螺

微电子与机械的完美结合。

体积小、成本低、可靠性高

第×代：新的测量机理

冷原子陀螺 微光学陀螺

微机械与挠性组合的陀螺



惯性系统的结构形式

平台式系统

方位捷联平台系统

捷联式系统

V-2导弹用的就是简易捷联系统。到60年代初，对速度捷联惯导的理论已有较完整的研究。它结构简单、允许全姿态工作、可提供重复信息，可靠性高，重量轻等优点。但碰到的主要问题是**如何适应动态环境**。

1969年“阿波罗-13”登月舱在返回地球途中，因舱中电源故障，供电不足，被迫停止使用耗电较多的平台惯导系统，而启用了功耗低的备份应急捷联式惯导系统，得以安全返回地面。



915 惯导平台内结构



2010-03-12

PL-II
型平台罗
经内
结构



2010-03-12

25

生命力和广阔的发展前景

应用领域广

舰船
飞机
导弹
人造卫星
宇宙飞船

功能扩大

精度和可靠性提高

军用 → 民用

大地测量



空间

在描述物体运动时，必须选择一个或几个物体作为参考系。

舰船的运动，基本上限于地球表面。

所以，选定地球作为参考系来描述舰船运动。

一个物体的运动，只有在其他物体对其施加力时才能发生。能对地球附近的物体施加力的，除地球外，还有那些距地球较近的星球。这样，当研究舰船在地球表面运动时，应该把它置于太阳系，考察太阳系里星球对其运动的影响。



空间

太阳系的中心天体是太阳。围绕太阳转动的有**九大**®**八大**行星，整个太阳系又围绕银河系在运动，银河系也处于不停的运动中，在它外面还有许多星系存在，统称为“河外星系”。

这许许多多的星球之所以能够维持各自的运动，是由于它们之间存在互相吸引的力，万有引力。事实上，任何物体周围都充满了一种特殊形式的物质，这种特殊形式的物质称为**场**。两个不接触的物体之间的引力**不是**这两个物体间直接的**超距作用**，而是一个物体通过它周围的场作用在另一物体上，并称该场为**引力场**。



惯性坐标系

惯性导航的基本原理，是根据牛顿运动定律，在载体内部通过测定惯性力的大小来确定其运动加速度。

牛顿运动定律成立的参考系，称为惯性空间。

众所周知，原点取在不动点而又无转动的参考系就是一个惯性空间。与惯性空间相固联的坐标系，称为惯性坐标系或简称惯性系。

要决定一个参考系是不是惯性系，只能依靠观察、实验和测量。由于牛顿运动定律是否成立依赖于所能达到的或者要求达到的测量精度，决定一个参考系是不是惯性系也将依赖于现有的测量水平。

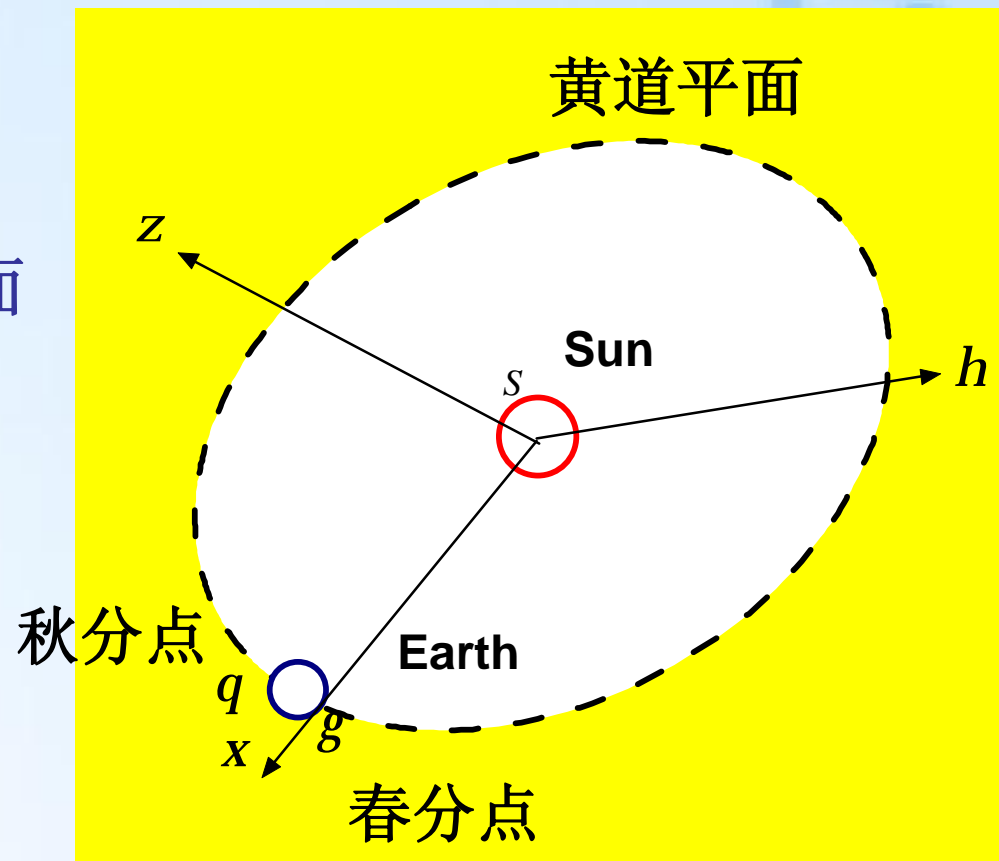
牛顿时代，以太阳中心为原点，以指向任意恒星的直线为坐标轴，组成一个坐标系。这样的参考系视为惯性系。



太阳连同太阳系一起围绕银河系运动，运动的角速度极小。

地球赤道平面

凡是对上述惯性系作匀速直线运动的参考系，牛顿运动定律也是适用的。也是惯性系。



黄道平面与地球赤道平面的交线是gq

太阳对银河系中心的向心加速度及转动角速度

太阳连同太阳系围绕银河系在运动。

有关运动数据如下： $v = \omega r$

太阳的速度233km/s;

太阳与银河系中心的距离 2.2×10^{17} km;

太阳围绕银河系的旋转周期 190×10^6 年。

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \\ = \frac{(2.33 \text{ km/s})^2}{2.2 \times 10^{17} \text{ km}}$$

$$= \frac{2.33^2 \times 10^6}{2.2 \times 10^{17} \times 10^3} \times 9.8g = 2.5 \times 10^{-11} g$$

假设太阳绕银河系作圆周运动，则太阳对银河系中心的向心加速度及转动角速度的近似值分别为 $2.5 \times 10^{-11}g$ 和0.006927角秒/年

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{233 \text{ km/s}}{2.2 \times 10^{17} \text{ km}} = 1.059 \times 10^{-15} \text{ rad/s}$$

$$= 1.059 \times 10^{-15} \times 180/\pi \times 3600 \times 3600 \times 24 \times 365 \text{ 角秒/年}$$

$$= 0.006927 \text{ 角秒/年}$$

-03-12



说明以太阳中心为原点的坐标系并不是惯性坐标系。

但是，向心加速度和转动角速度的数值都远远小于惯性导航问题中对这两个参数所要求的精度。因而，可以把太阳中心为原点的坐标系看作惯性坐标系。

由于所研究的载体是在地球附近运动，因而提出一个问题：是否能在地球上建立一个惯性坐标系？经计算得知，这个坐标系可以建立。



地心惯性坐标系

在惯性坐标系内，质量 M 的运动方程为

$$-smk \frac{\bar{r}_3}{r_3^3} - emk \frac{\bar{r}_2}{r_2^3} = m\ddot{\mathbf{r}}_3 = m(\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2)$$

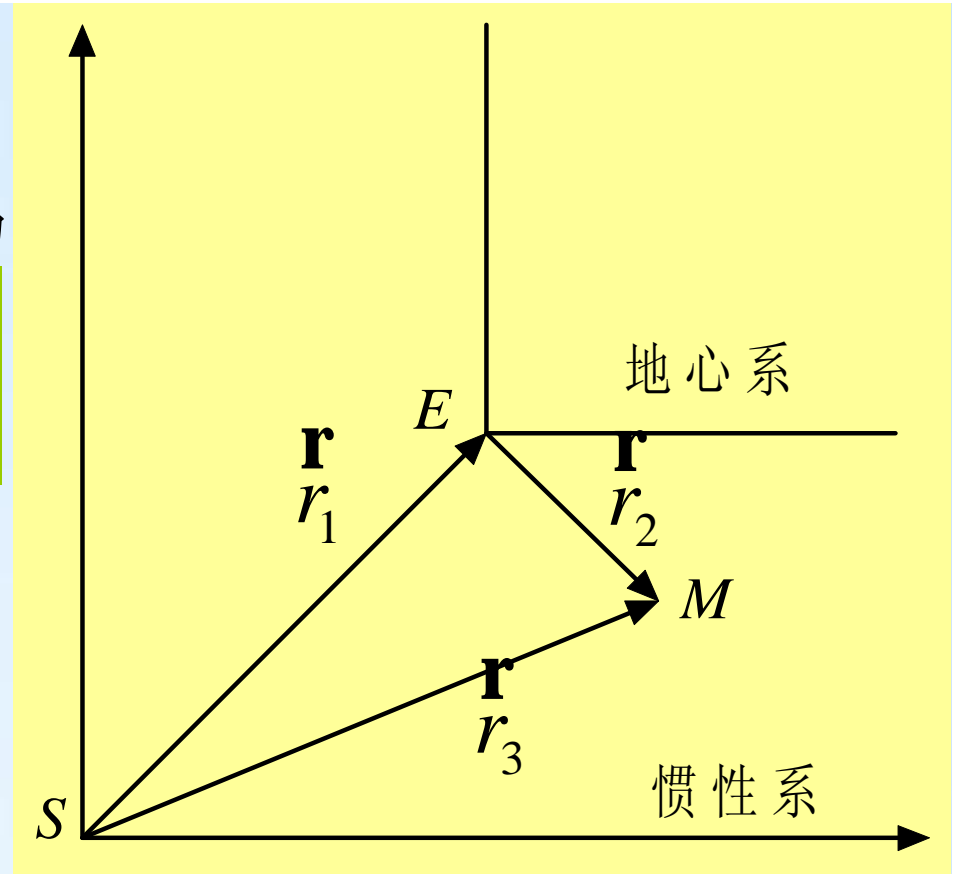
k ——引力常数

地球的运动方程为

$$-sek \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} = e\ddot{\mathbf{r}}_1 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_1 = -sk \frac{\bar{r}_1}{r_1^3}$$

$$-smk \left(\frac{\bar{r}_3}{r_3^3} - \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} \right) - emk \frac{\bar{r}_2}{r_2^3} = m\ddot{\mathbf{r}}_2$$

$$\bar{r}_1 \approx \bar{r}_3 \quad \left| \frac{\bar{r}_3}{r_3^3} - \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} \right| \leq \left| 2 \frac{\bar{r}_2}{r_1^3} \right|$$



太阳与地球质量之比为 3.34×10^5 , $r_1=1.5 \times 10^8\text{km}$, 若取
 $r_2=1.5 \times 10^3\text{km}$, 则式(yellow)中第一项与第二项之比为

$$2 \frac{sr_2^3}{er_1^3} = 2 \cdot \frac{s}{e} \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3} = 2 \times 3.34 \times 10^5 \times \left(\frac{6.4 \times 10^3}{1.5 \times 10^8} \right)^3 = 5.2 \times 10^{-8}$$

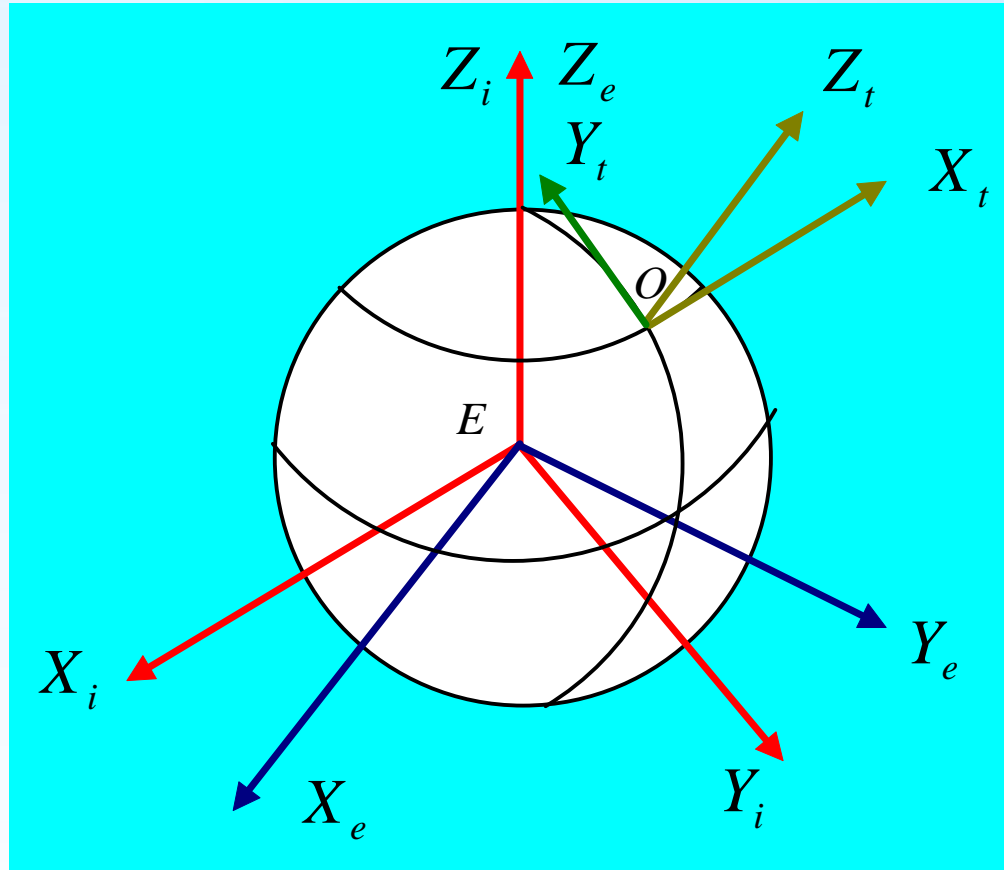
因此, 近似地得到

$$-emk \frac{\bar{r}_2}{r_2^3} \approx m\ddot{r}_2$$

由此可见, 牛顿第二运动定律在研究地球附近的载体运动时, 仍然是适用的。因此, 可以得出结论, 上面定义的坐标系可以足够精确地看作惯性坐标系。



地心惯性坐标系、地球坐标系和地理坐标系之间的关系



时间

Chronometer [krə'nɒmɪtə]

描述物体运动，除了空间的概念外，还要引入时间的概念。上面已说明了如何利用参考系或坐标系，来度量物体在空间的位置。现在，不仅需要知道物体的位置，而且需要知道它的速度，这就必须确定它在一定的时间间隔里所发生的位置变化。在惯性空间中，需要确定在某一时刻载体所占据的位置，显然离不开时间的精确计量。

时间和空间是物质存在的基本形式。

时间，表示物质运动的**连续性**，空间，表示物质运动的**广延性**。



太阳日和恒星日

要观察地球的自转运动，必须以地球以外的别的星体作为参考系才有可能。例如，可以把太阳或恒星取作这样的参考系，来观察地球的自转运动。这就产生了**太阳日**和**恒星日**两个计时系统。

把相当于恒星测得的地球自转运动的周期作为计时单位，这就是**恒星日**。把一个恒星日分成24等分，就是**恒星时**。
利用太阳的视运动来计量时间，这就是另一个计时单位——**太阳日**。



太阳日和恒星日

地球除自转外，还围绕太阳作公转。作为太阳在地球上的视运动，除周日视运动外，还有周年视运动。地球相对于太阳自转一周的时间叫做真太阳日。由于地球围绕太阳运动的轨道为椭圆，使真太阳日变得不均匀，最长的和最短的相差51秒。这样一来，按照真太阳日制造计时仪表困难极大，使用起来也不方便。于是，天文学家假想了一个太阳，**其在轨道上的视运动的运行速度等于真太阳日的平均速度**。这样，这个假想的太阳的运行速度便是均匀的了。这个假想的太阳称为**平太阳**。地球相对于平太阳自转一周的时间，叫做**平太阳日**，一个平太阳日又可分为**24个平太阳时**。这就是科学技术和日常生活中采用的计时单位——平太阳时单位。

天文学上的测量表明，地球围绕太阳公转一周需要365.2422个平太阳日；而在相同时间内，相当于恒星转一周需要366.2422个恒星日。可见，恒星时要比平太阳时短一些。地球在一个恒星日内准确转动 360° ，所以，其自转角速度为

$$\omega_{ies} = 15^\circ / \text{恒星时}$$

而在一个平太阳日内地球转动的角度要比 360° 大一些。当用平太阳日表示地球自转角速度时

$$\omega_{ie} = 15.0410694^\circ / \text{平太阳时}$$

在惯性导航中，计时单位是平太阳时，所以，地球自转角速度取此值。

平太阳时简称平时，以后为了方便就叫时，细分为分、秒。



主要参考书

- 惯性技术文集, 丁衡高, 国防工业出版社, 1994
- 惯性系统陀螺仪理论, 郭秀中国防工业出版社1996
- 导航系统, 袁信等航空工业出版社1993
- 惯性导航系统 《惯性导航系统》 编著小组国防工业出版社1983
- 惯性导航系统, 黄德鸣 程禄编国防工业出版社1986
- 捷联式惯性导航系统, 张树侠, 孙静编著国防工业出版社1992
- 惯性导航初始对准, 万德钧等东南大学出版社1998

陆元九

陀螺及惯性导航原理

上册

陆元九编著

科学出版社

2010-03-12

41

丁衡高

惯性技术文集

丁衡高 著

国防工业出版社

2010-03-12

42

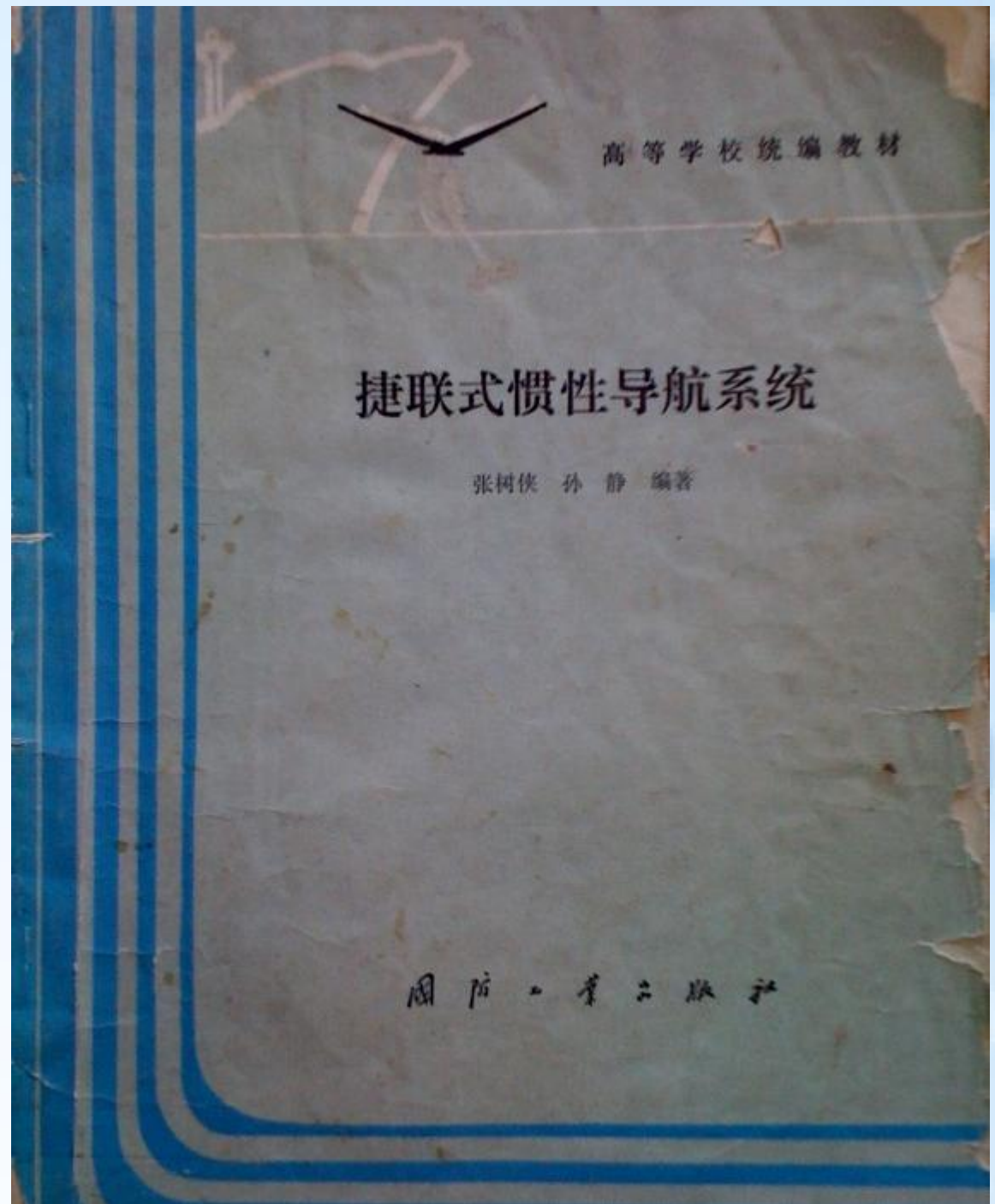
袁信, 愈济祥, 陈哲



2010-03-12

43

张树侠



2010-03-12

秦永元



2010-03-12

45

**D.H. Titterton and
J.L. Weston**

**Strapdown inertial
navigation technology**

PART 1

**D.H. Titterton and
J.L. Weston**

2010-03-12

46

东大译

捷联式惯性技术及系统

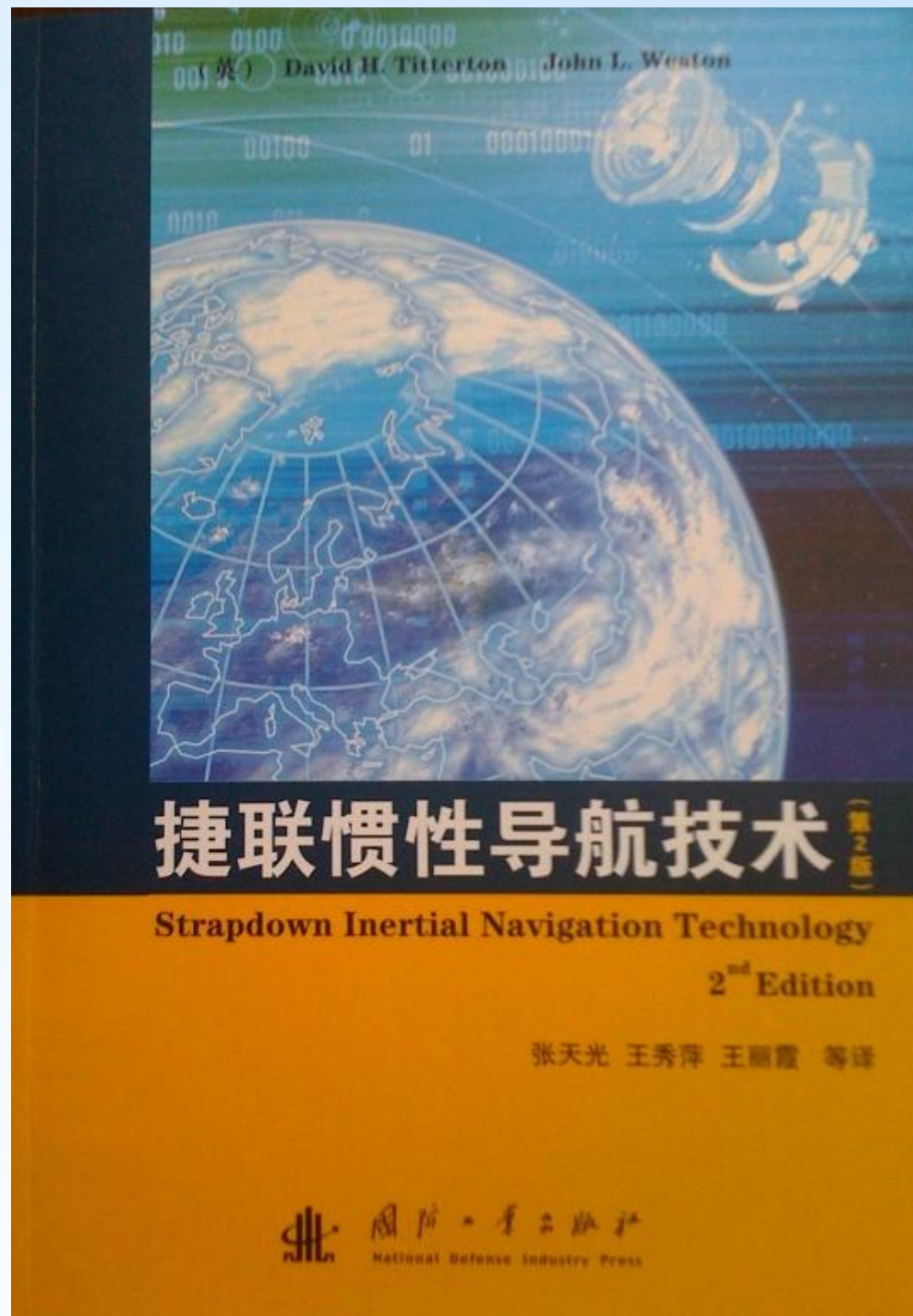
STRAPDOWN INERTIAL TECHNOLOGY AND SYSTEMS

东南大学先进技术与装备研究院

2010-03-12

47

张天光等译



2010-03-12


48



▶ Thank you for your attention!

思考题

- 1. 简述各种导航设备的性能特点和适用场合。
- 2. 为何需要综合导航系统？



Basic Principles of Inertial Navigation Systems

程向红
2010年3月12日

2010-03-12

捷联式惯性导航的基本概念

- ◆ 3.1 A simple of two-dimensional strapdown inertial navigation system
- ◆ 3.2 Reference frames
- ◆ 3.3 Positon, Heading and attitude representation
- ◆ 3.4 Strapdown system mechanisations

3.1 A simple of two-dimensional strapdown inertial navigation system

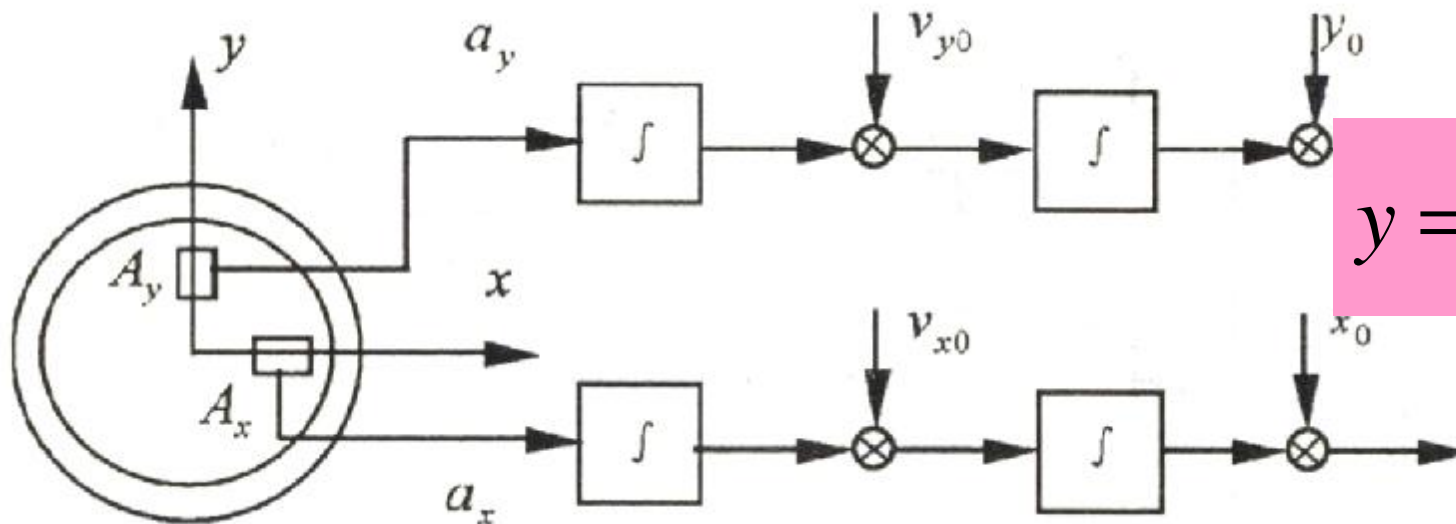
惯性导航的基本工作原理是以牛顿力学定律为基础的。在载体内部测量载体运动加速度，经积分运算得载体速度和位置等导航信息。

2010-03-12



3.1 A simple of two-dimensional strapdown inertial navigation system

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y dt$$



$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt$$

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x dt$$

$$L = L_0 + \int_0^t \frac{v_y}{R} dt$$

惯性导航的基本工作原理是以牛顿力学定律为基础的。在载体内部测量载体运动加速度，经积分运算得载体速度和位置等导航信息。

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt$$

$$\lambda = l_0 + \int_0^t \frac{v_x}{R \cos L} dt$$

2010-03-12

基本原理

实际的惯性导航系统能完成空间的三维导航（航天、航空）或球面上的二维导航（航海）。

惯性导航系统的组成

加速度计——用来测量载体运动的加速度。

惯导平台——模拟一个导航坐标系，把加速度计的测量轴稳定在导航坐标系，并用模拟的方法给出载体的姿态和方位信息。

导航计算机——完成导航计算和平台跟踪回路中指令角速度信号的计算。

控制显示器——给定初始参数及系统需要的其他参数，显示各种导航信息。

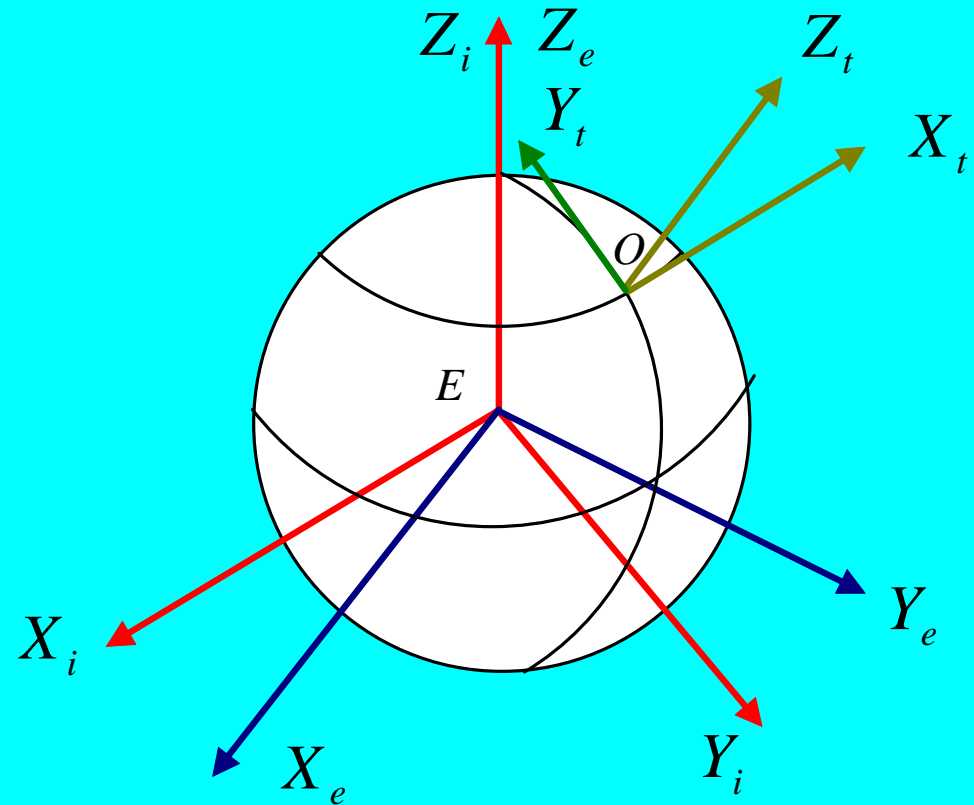
地球坐标系 $EX_eY_eZ_e$ (简称E系)

该坐标系的原点仍在地心 E , X_e 和 Y_e 轴在地球赤道平面内, Z_e 轴沿自转轴方向, 三根坐标轴都固定在地球上, 即参与地球的自转运动。E系相对I系的相对运动, 就是地球的自转运动, 其角速度为 ω_{ie} 。

地理坐标系 $OX_tY_tZ_t$

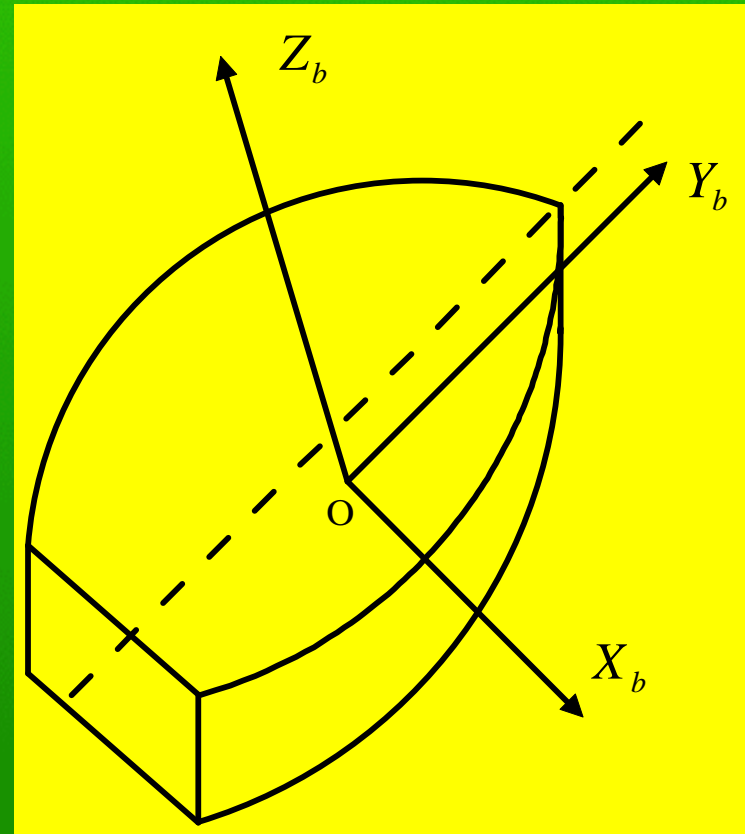
该坐标系的原点在载体的质量中心, X_t 、 Y_t 和 Z_t 轴分别从原点出发指向东、北和天向。

3.2 Reference frames



载体坐标系 $OX_bY_bZ_b$ (简称B系)

该坐标系与载体固联，坐标的原点在载体的质量中心， X_b 指向舰船的右舷， Y_b 沿舰船艏艉方向指向船艏， Z_b 轴沿甲板平面向上， $X_bY_bZ_b$ 构成右手坐标系。



地球几何形状与重力场

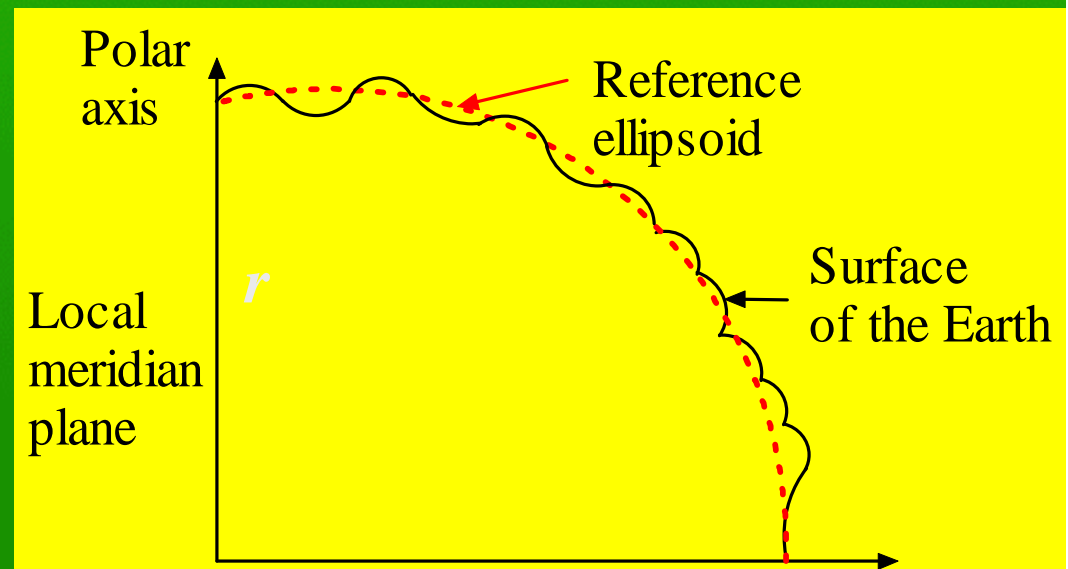
The Shape of the Earth

地球形状的描述

由于地球绕其极轴转动，所以赤道各处的地球半径较极轴方向的半径长，地球类似一个旋转椭球体。

海洋中各处的海平面与该处重力矢量相垂直，若设想地球被海洋全部包围，则各处海平面所形成的地球形状称为**大地水准体**，它在各处的局部表面称为**大地水准面**。

近似的旋转椭球体



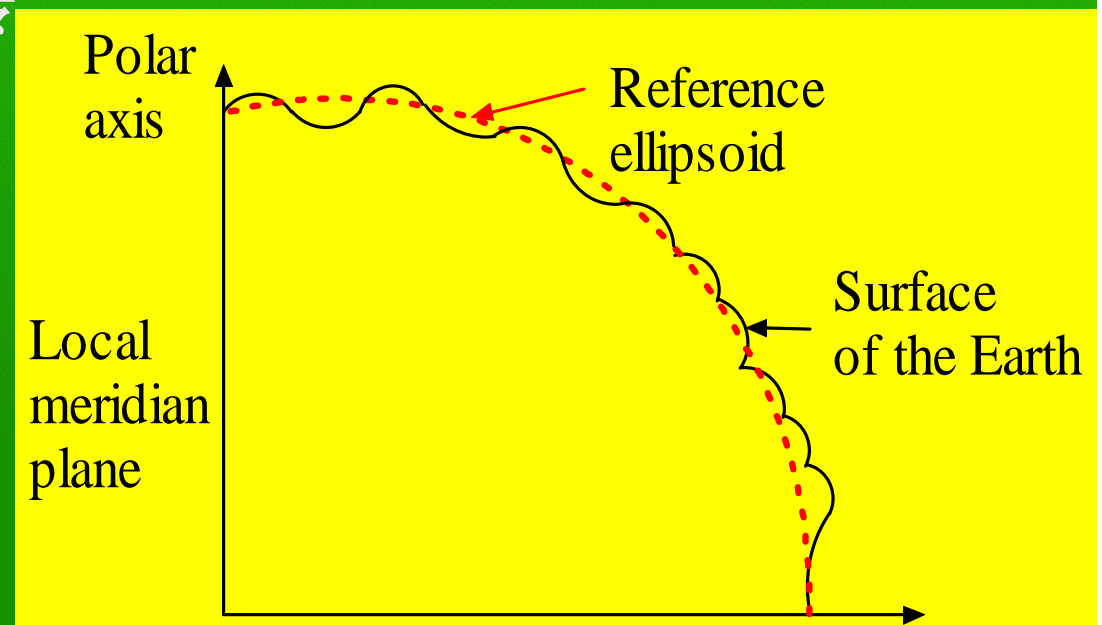
不能用数学模型来表达

Reference ellipsoid

在测量各处大地水准面的基础上，采用**差异的平方和最小的准则**，可以将大地水准体用一个有确定参数的旋转椭球体来逼近代替

参考旋转椭球体

Reference ellipsoid



Geocentric and Geodetic Latitude

地心垂线和地心纬度

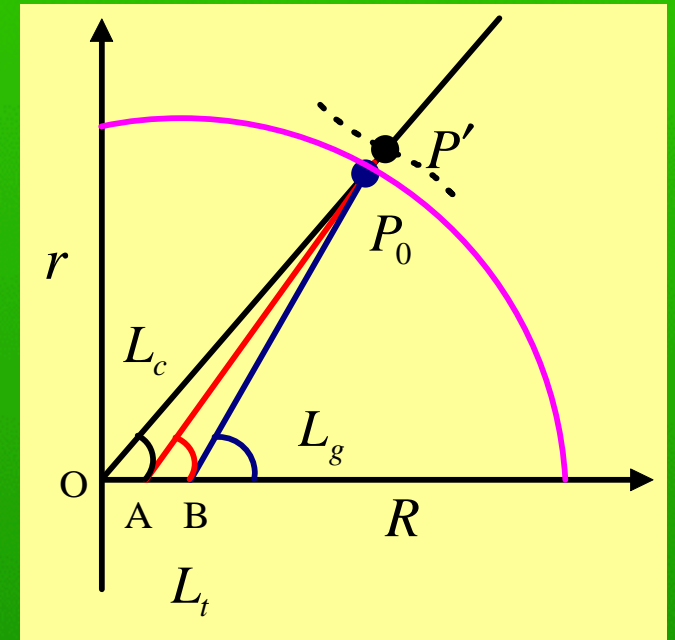
参考椭球上 P_0 点到地球中心的连线 P_0O 称为地心垂线， P_0O 与赤道平面的夹角 L_c 为地心纬度。

地理（测地）垂线 地理（测地）纬度

参考椭球上 P_0 点的法线 P_0A 称为地理垂线， P_0A 与赤道平面的夹角 L_t 为地理纬度。地理纬度为大地测量工作中所需测量的参数。

天文垂线和天文纬度

参考椭球上 P_0 点法线方向对应的大地水准面 P_c 点的重力方向称为天文垂线。天文垂线与赤道平面的夹角在子午面内的分量可用天文测量的方法测定，故称为天文纬度 L_g 。 L_g 与 L_t 的差别很小。



$$L = L_t$$

Meridian radius of curvature

Transverse radius of curvature

参考椭球的赤道平面是圆平面，所以参考椭球可用赤道平面半径（**长半径** R ）和极轴半径（**短半径** r ）来描述，或用长半径 R 和椭圆度（**扁率** f ）来描述。

the flattening of the ellipsoid

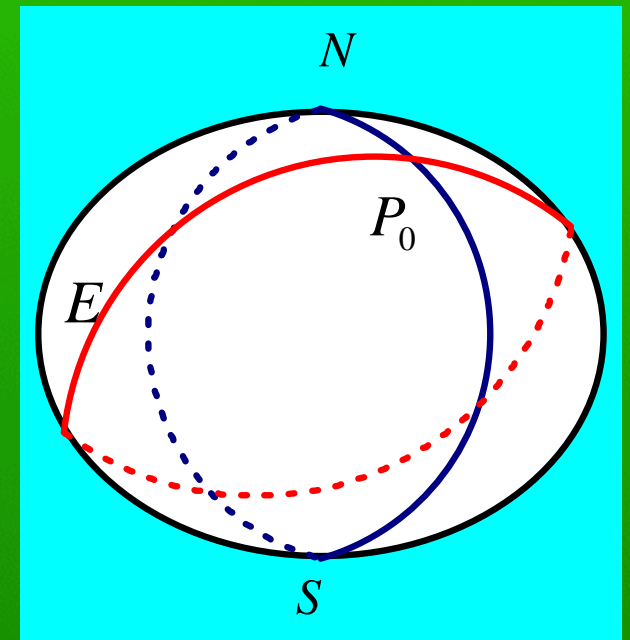
$$f = \frac{R - r}{R}$$

参考椭球主曲率半径

参考椭球**子午圈**上各点的曲率半径 R_n 和**卯酉圈**（它所在平面与子午面垂直）上各点的曲率半径 R_e 。

$$R_n \approx R(1 - 2f + 3f \sin^2 L)$$

$$R_e \approx R(1 + f \sin^2 L)$$



子午圈与卯酉圈



2010-03-12

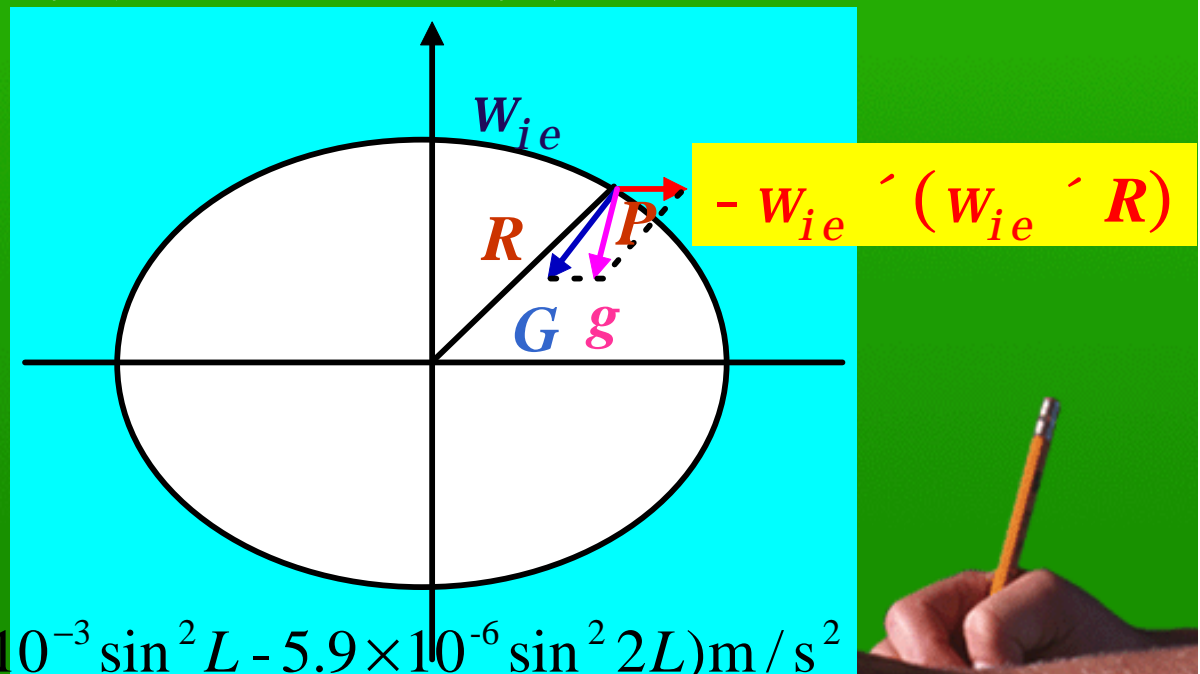
11

重力场

The Earth's Gravitational Field

地球周围空间的物体都受到地球重力的作用，地球重力在地球周围形成重力场。地球表面P点的重力 g （确切地讲是重力加速度）是引力 G （确切地讲是引力加速度）和负方向的地球转动向心加速度（即单位质量的离心惯性力）

$$g = G - w_{ie} \quad (w_{ie} \cdot R)$$

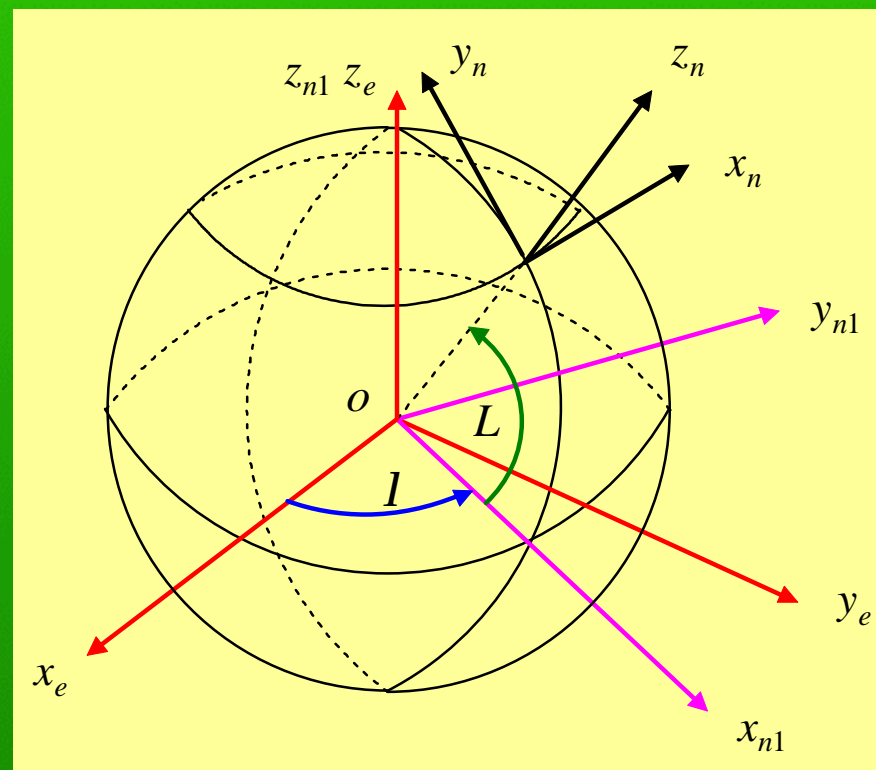


$$g_0 = 9.780318(1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 L - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2L) \text{m/s}^2$$

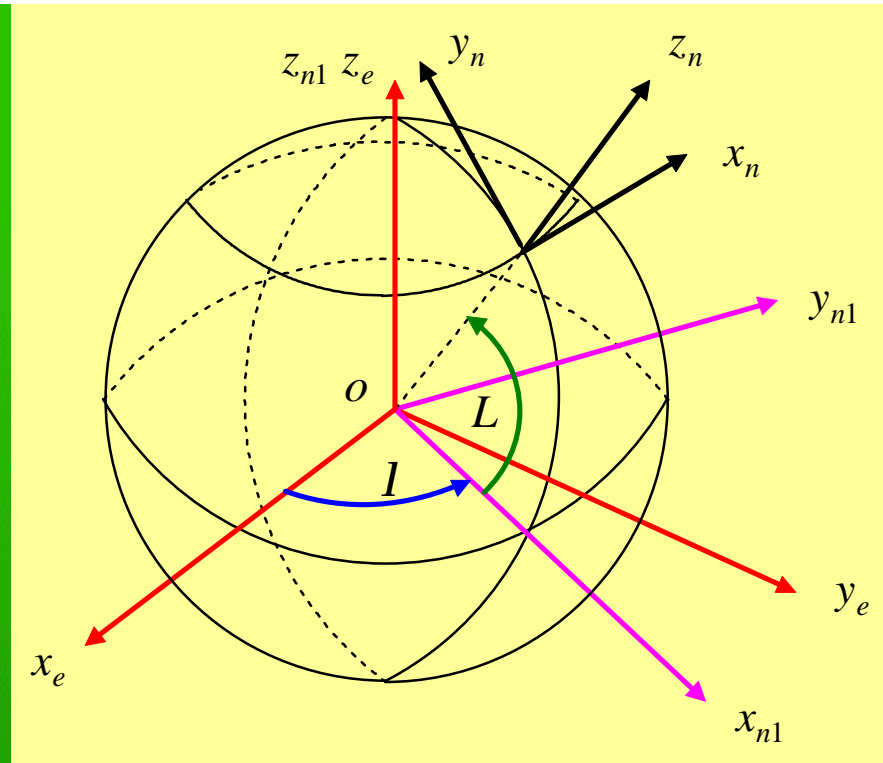
3.3 Position, Heading and attitude representation

位置矩阵

——在捷联式惯导中，载体地理位置 (l, L) 就是地理坐标系相对地球坐标系的方位。可用位置矩阵表示。



地球坐标系与地理坐标系间的方位关系



$$OX_e Y_e Z_e \xrightarrow{l+90^\circ} OX_{n1} Y_{n1} Z_{n1} \xrightarrow{90^\circ-L} OX_n Y_n Z_n$$

OZ_e

OX_{n1}

$$OX_e Y_e Z_e \xrightarrow{l} OX_{n1} Y_{n1} Z_{n1} \xrightarrow{90^\circ-L} OX_{n2} Y_{n2} Z_{n2} \xrightarrow{90^\circ} OX_n Y_n Z_n$$

OZ_e

OY_{n1}

OZ_{n2}

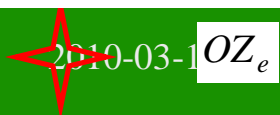
$$\begin{bmatrix} X_{n1} \\ Y_{n1} \\ Z_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(I + 90^\circ) & \sin(I + 90^\circ) & 0 \\ -\sin(I + 90^\circ) & \cos(I + 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin I & \cos I & 0 \\ -\cos I & -\sin I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ - L) & \sin(90^\circ - L) \\ 0 & -\sin(90^\circ - L) & \cos(90^\circ - L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n1} \\ Y_{n1} \\ Z_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin L & \cos L \\ 0 & -\cos L & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n1} \\ Y_{n1} \\ Z_{n1} \end{bmatrix}$$

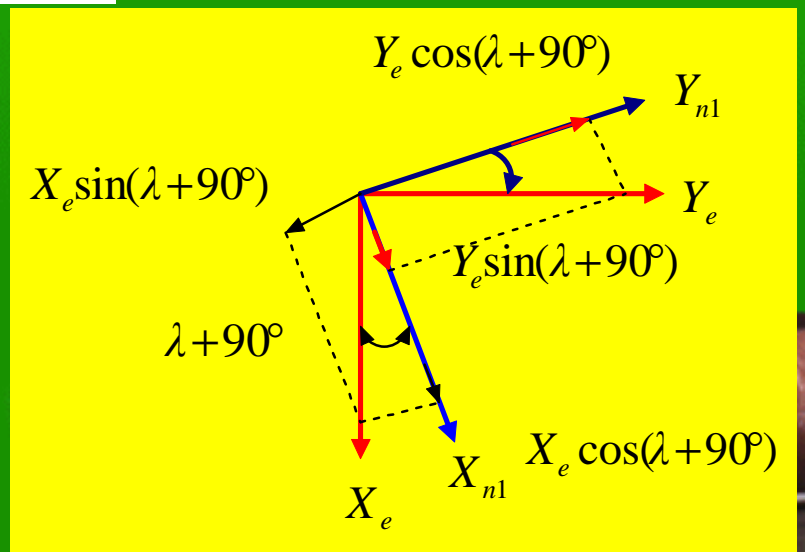
$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin L & \cos L \\ 0 & -\cos L & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin I & \cos I & 0 \\ -\cos I & -\sin I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin I & \cos I & 0 \\ -\sin L \cos I & -\sin L \sin I & \cos L \\ \cos L \cos I & \cos L \sin I & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix}$$

$$OX_e Y_e Z_e \xrightarrow{I+90^\circ} OX_{n1} Y_{n1} Z_{n1} \xrightarrow{90^\circ-L} OX_n Y_n Z_n$$

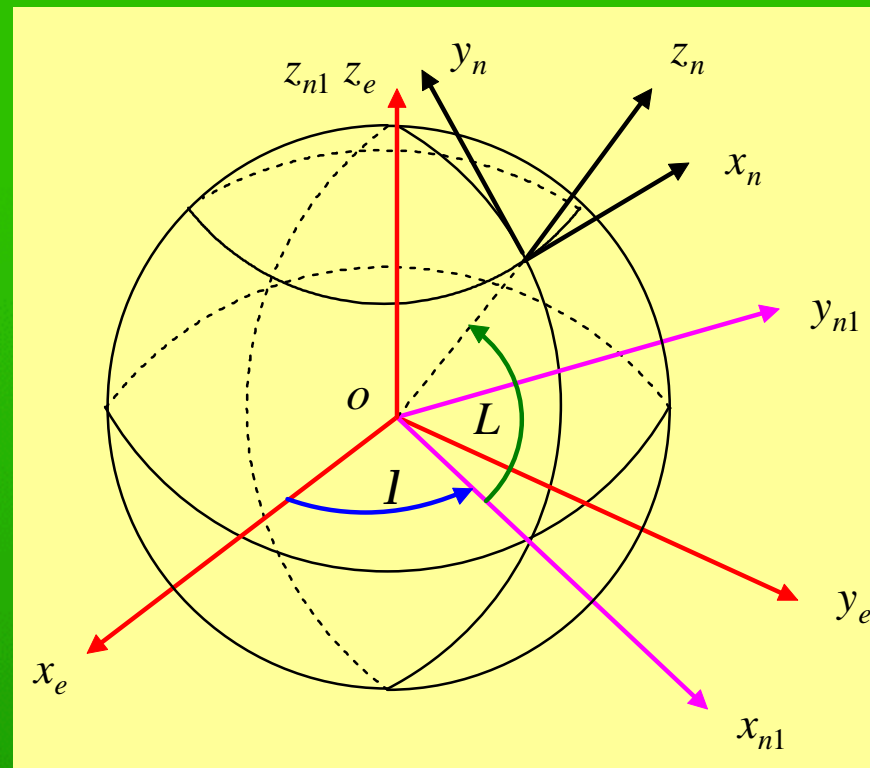


OX_{n1}



位置矩阵

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\sin L \cos l & -\sin L \sin l & \cos L \\ \cos L \cos l & \cos L \sin l & \sin L \end{bmatrix}$$



$$L = \operatorname{tg}^{-1} \frac{c_{33}}{c_{23}}$$



$$l = \operatorname{tg}^{-1} \frac{c_{22}}{c_{21}}$$

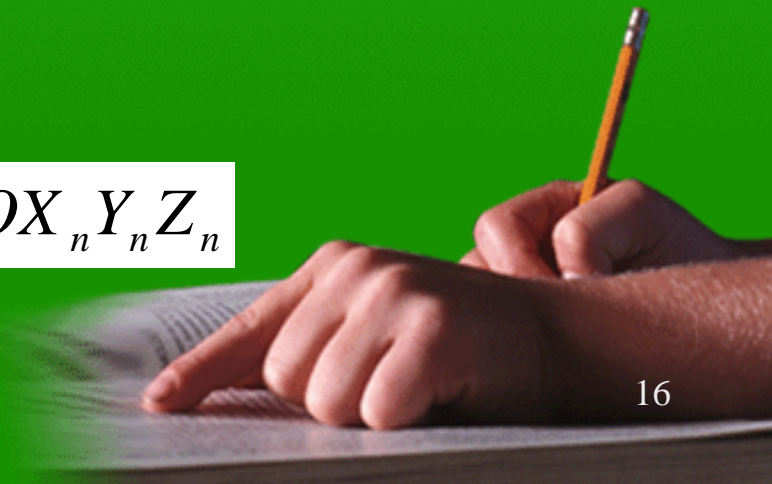
$$OX_e Y_e Z_e \xrightarrow{l+90^\circ} OX_{n1} Y_{n1} Z_{n1} \xrightarrow{90^\circ-L} OX_n Y_n Z_n$$

OZ_e

OX_{n1}



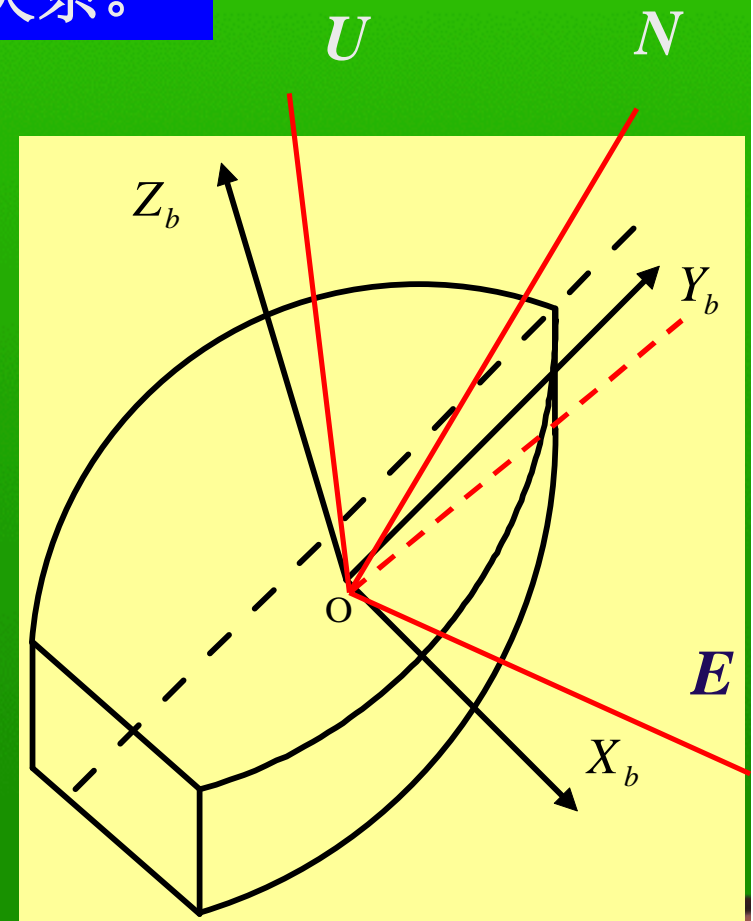
2010-03-12



航向角与姿态角

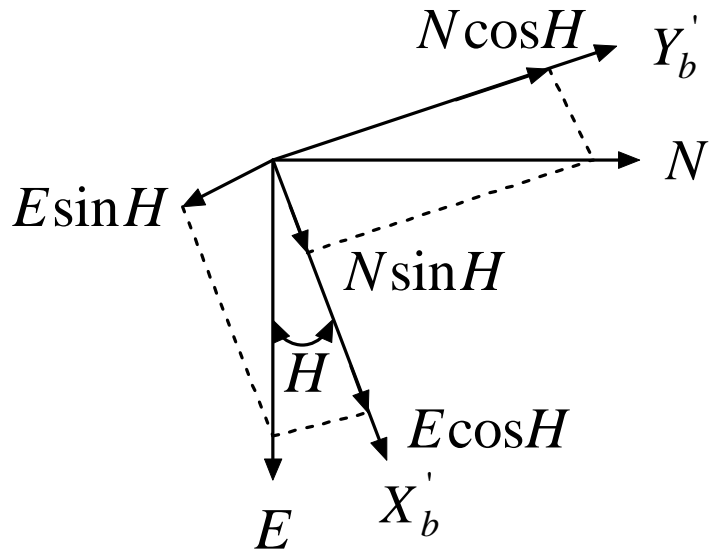
船体的姿态和航向实际上就是船体坐标系 $OX_bY_bZ_b$ 与地理坐标系 ENU 之间的方位关系。

当船体绕 U 轴转动时，舰船 Y_b 在水平面上的投影与地理子午线 N 之间的夹角称作舰船的**航向角 H** ，当舰船绕横向水平轴转动时，舰船艏艉线轴与纵向水平轴之间的夹角，称作舰船的**纵摇角 P** ，舰船艏艉线对称平面（ Y_bZ_b 组成的平面）与艏艉线铅垂平面（ Y_bU 组成的平面）之间的夹角，称为**横摇角 R** ，实际上就是舰船绕纵轴的转角。

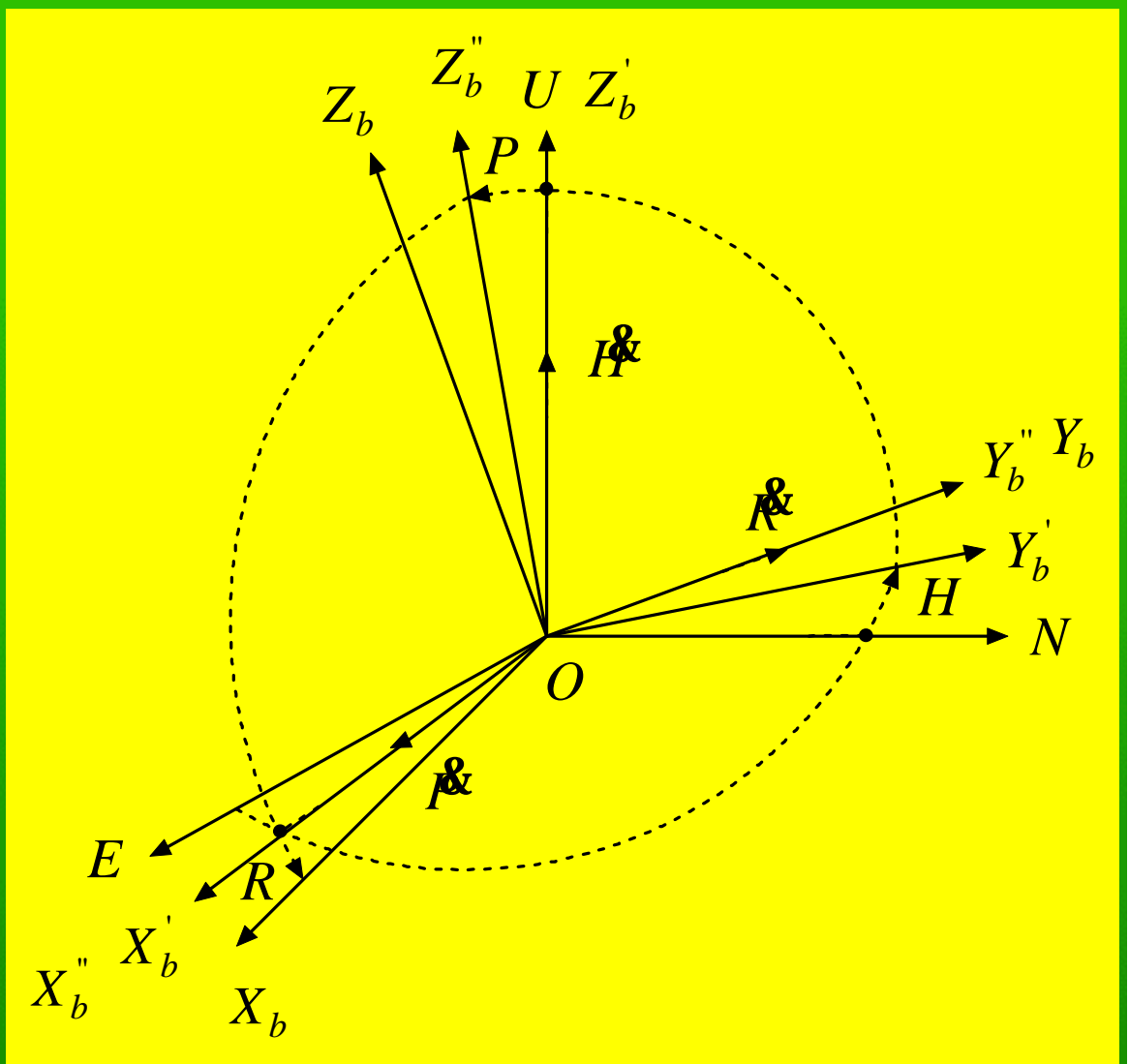


姿态矩阵

绕 $OU(OZ'_b)$



$$\begin{cases} X'_b = E \cos H + N \sin H \\ Y'_b = -E \sin H + N \cos H \\ Z'_b = U \end{cases}$$



$$OX_{b0} Y_{b0} Z_{b0} \xrightarrow{H} OX'_b Y'_b Z'_b \xrightarrow{P} OX''_b Y''_b Z''_b \xrightarrow{R} OX_b Y_b Z_b$$

OENU

2010-05-12

OZ_{b0}

OX'_b

OY''_b

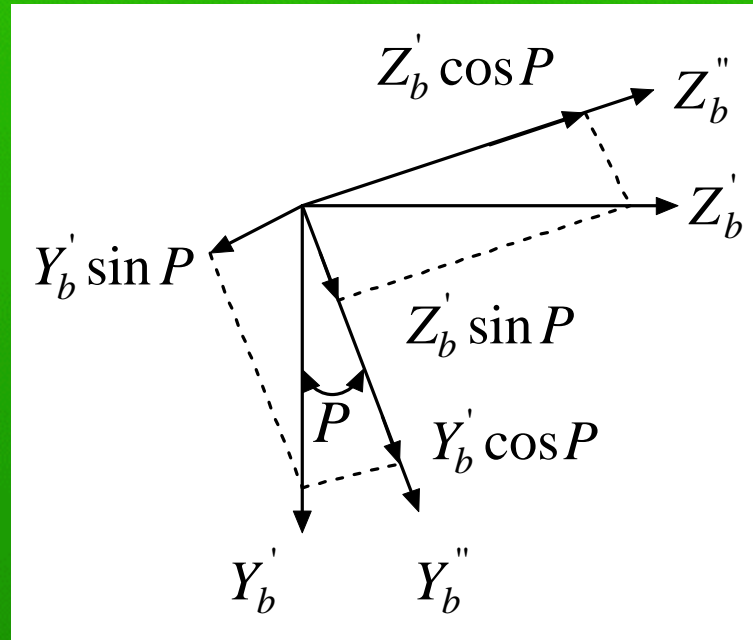
$$\begin{cases} X'_b = E \cos H + N \sin H \\ Y'_b = -E \sin H + N \cos H \\ Z'_b = U \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} X'_b \\ Y'_b \\ Z'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos H & \sin H & 0 \\ -\sin H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix}$$

C_H

绕 OX'_b (OX''_b)



$$\begin{cases} X''_b = X'_b \\ Y''_b = Y'_b \cos P + Z'_b \sin P \\ Z''_b = -Y'_b \sin P + Z'_b \cos P \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} X''_b \\ Y''_b \\ Z''_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos P & \sin P \\ 0 & -\sin P & \cos P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_b \\ Y'_b \\ Z'_b \end{bmatrix}$$

C_P

绕 $OY_b'' (OY_b)$

$$\begin{cases} X_b = X_b'' \cos R - Z_b'' \sin R \\ Y_b = Y_b'' \\ Z_b = X_b'' \sin R + Z_b'' \cos R \end{cases}$$

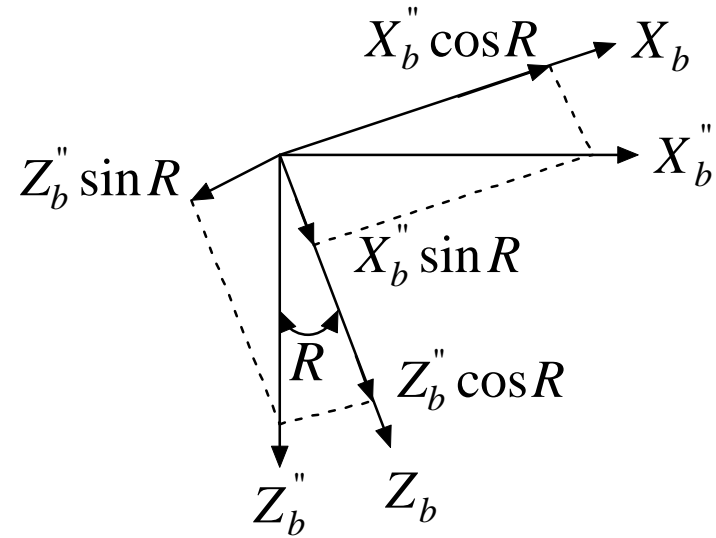


$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & 0 & -\sin R \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R & 0 & \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b'' \\ Y_b'' \\ Z_b'' \end{bmatrix}$$

C_R

$$C_n^b = C_R C_P C_H$$

$$= \begin{bmatrix} \cos R \cos H - \sin P \sin R \sin H & \cos R \sin H + \sin P \sin R \cos H & -\cos P \sin R \\ -\cos P \sin H & \cos P \cos H & \sin P \\ \sin R \cos H + \sin P \cos R \sin H & \sin R \sin H - \sin P \cos R \cos H & \cos P \cos R \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} X_b'' \\ Y_b'' \\ Z_b'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos P & \sin P \\ 0 & -\sin P & \cos P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b' \\ Y_b' \\ Z_b' \end{bmatrix}$$

C_P

姿态角提取

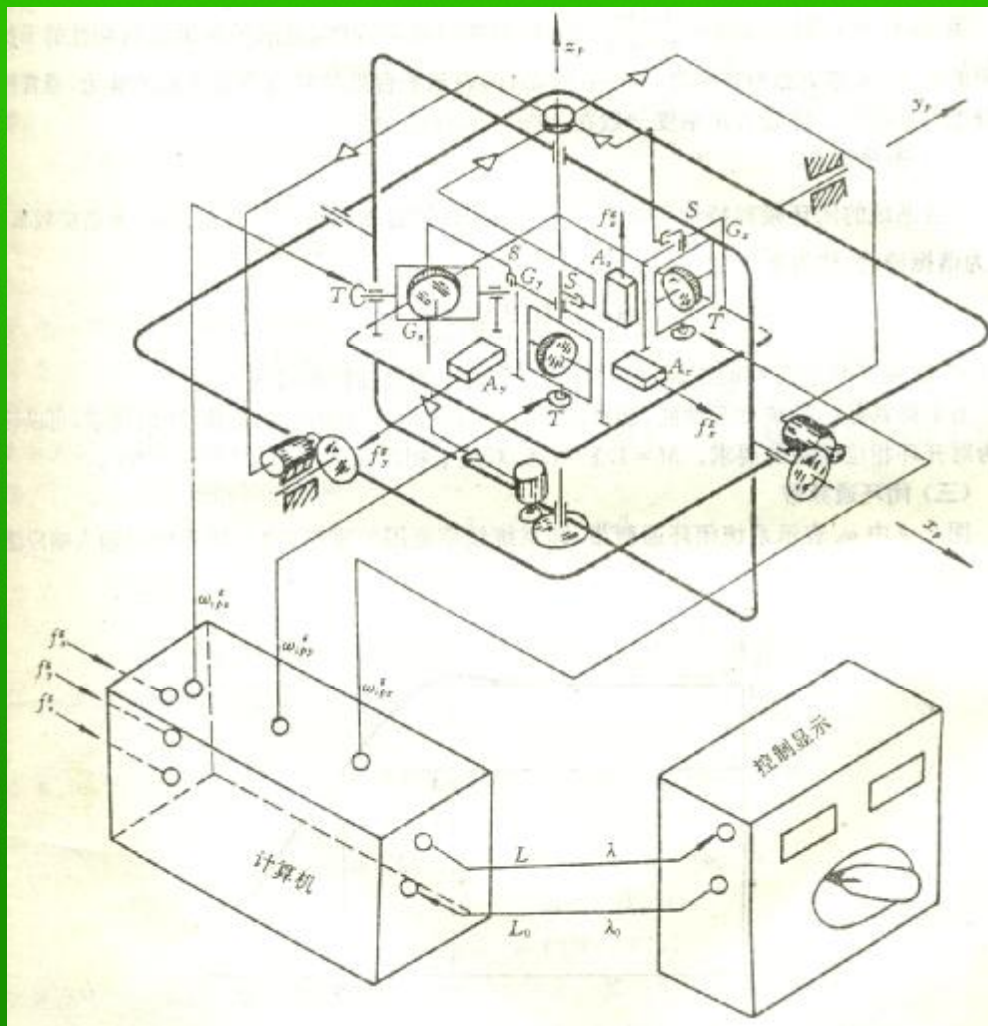
$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos R \cos H - \sin P \sin R \sin H & \cos R \sin H + \sin P \sin R \cos H & -\cos P \sin R \\ -\cos P \sin H & \cos P \cos H & \sin P \\ \sin R \cos H + \sin P \cos R \sin H & \sin R \sin H - \sin P \cos R \cos H & \cos P \cos R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ R \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{c_{23}}{\sqrt{c_{21}^2 + c_{22}^2}}\right) \\ \arctan\left(-\frac{c_{13}}{c_{33}}\right) \\ \arctan\left(-\frac{c_{21}}{c_{22}}\right) \end{bmatrix}$$

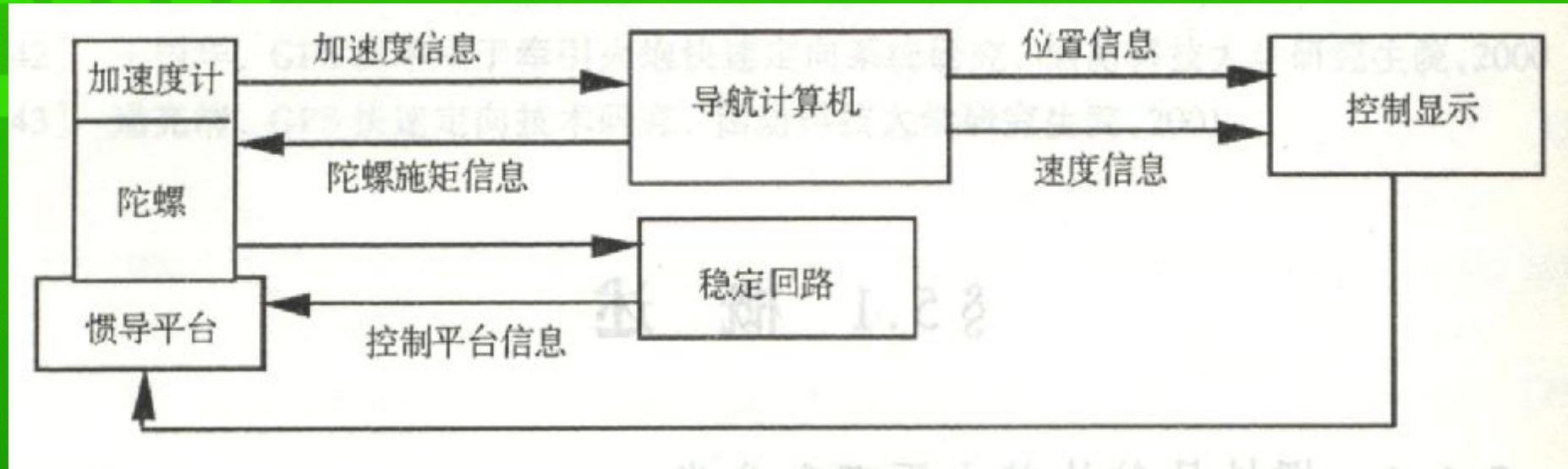


捷联式惯导与平台式惯导的区别



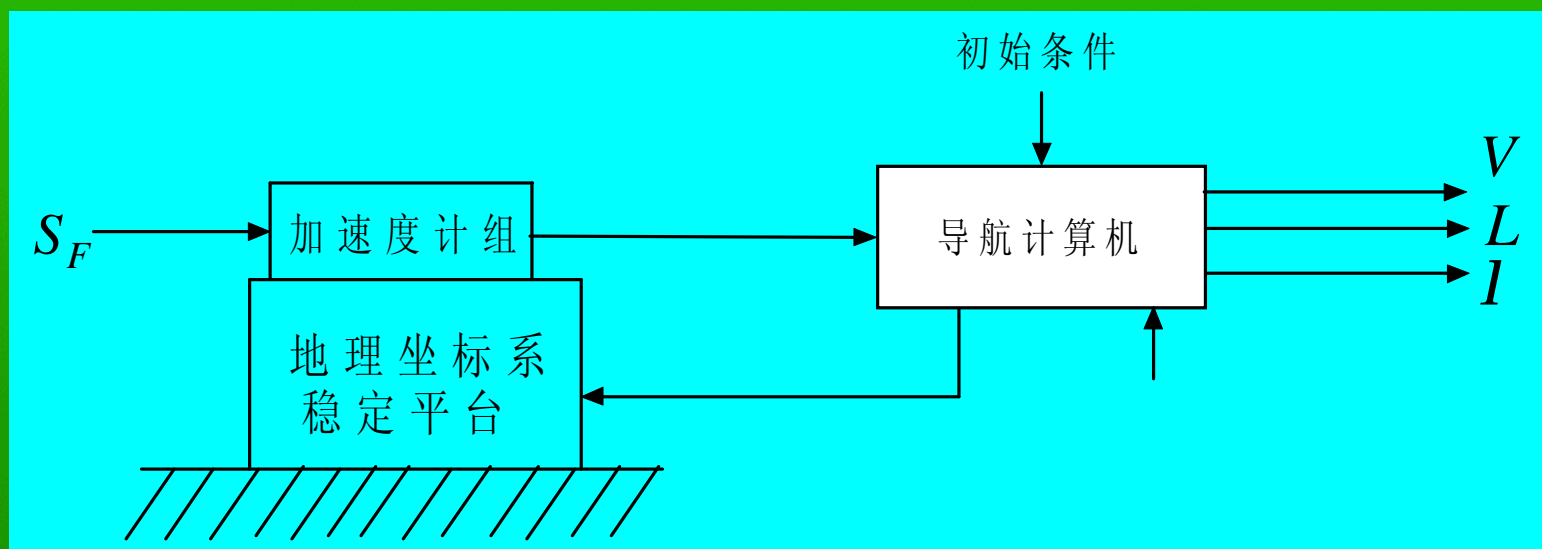
平台式惯导系统原理结构图

空间稳定惯导系统

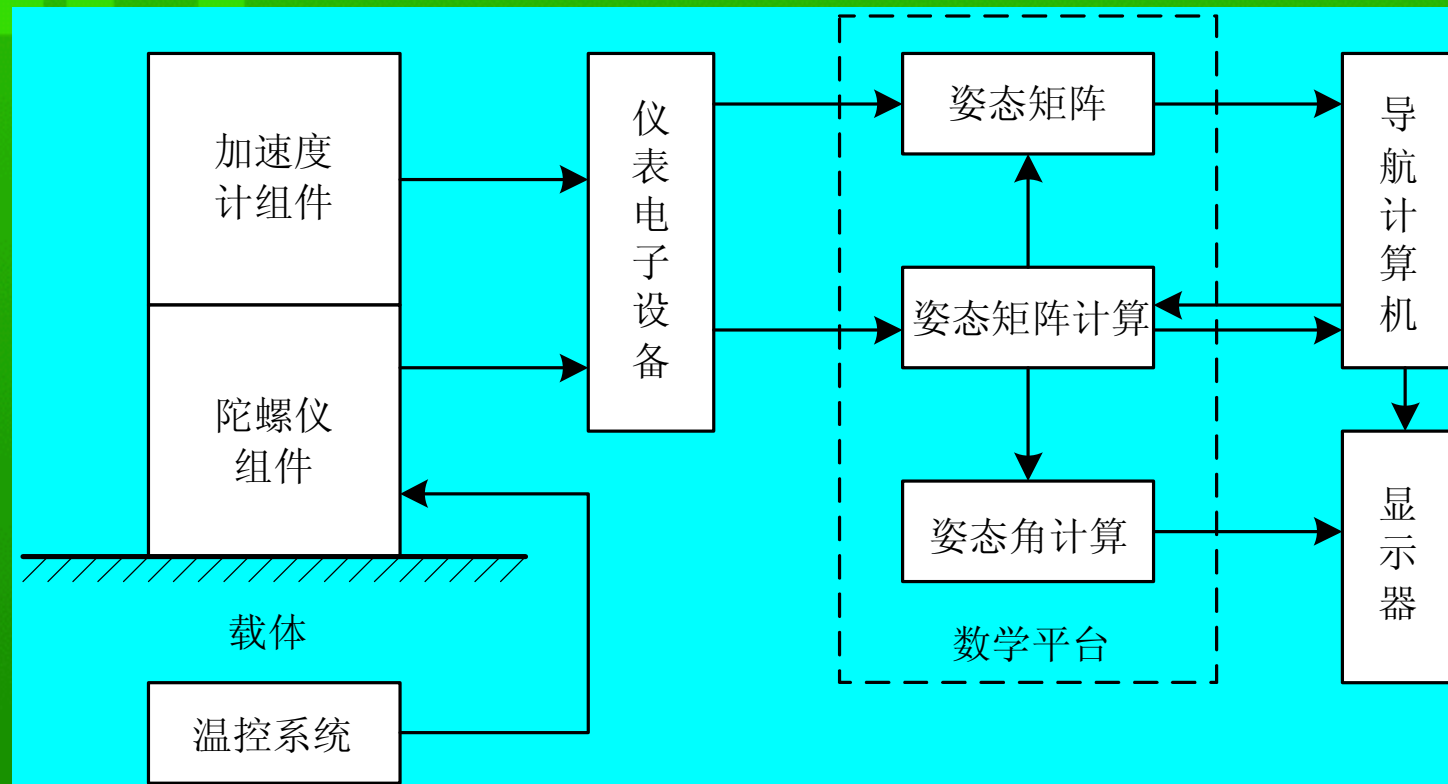


空间稳定惯导系统——导航坐标系采用**惯性坐标系**，即惯导平台稳定在惯性空间。这种惯导平台只有**稳定回路**，不需要跟踪回路。

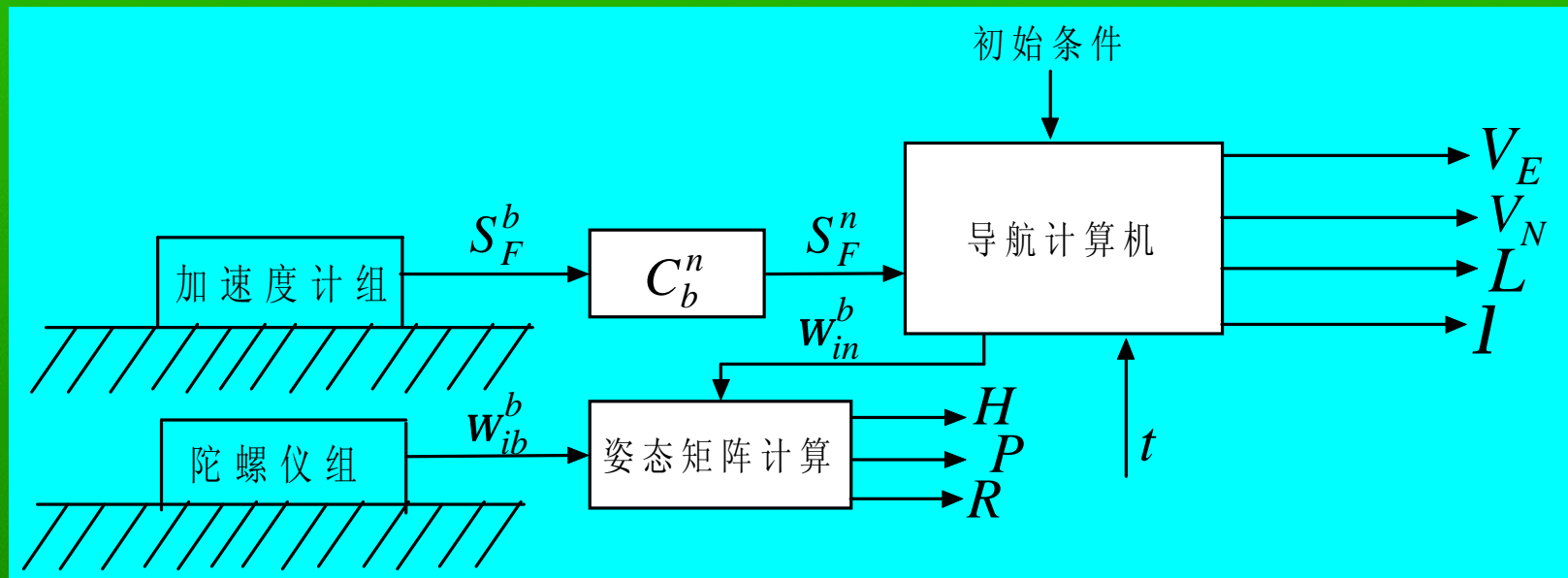
地理坐标系稳定系统



捷联惯性导航系统



捷联惯性导航系统



3.4 Strapdown system mechanisations

机械编排mechanisation

捷联式惯性导航系统的机械实体布局、采用的坐标系及解析计算方法的总和称为机械编排。

它体现了从加速度计的输出到计算出即时速度和位置的整个过程。作为舰船运动，一般具有三个角运动及两个线运动自由度，欲想在这样的运动条件下达到舰船导航的目的，首先应通过惯性敏感器——陀螺仪在舰船上建立一个基准坐标系。对于平台式的惯性导航系统，这个基准坐标系是通过常平架的平台来实现的；而对于捷联式惯性导航系统是通过计算机内的软件来实现的。然后由测得已知方位的加速度分量通过计算机实现积分技术，计算出舰船的瞬时速度和位置。

模拟不同坐标系的带有常平架的稳定平台在捷联系统中则可以利用计算机内不同编排的软件程序来实现。

根据捷联系统中的解析平台选取方法不同可以分为：

Inertial frame mechanisation

惯性坐标系的捷联式惯性导航系统

相应于空间稳定的平台式惯性导航系统，导航加速度计被稳定在惯性坐标系轴向，测量的比力经引力补偿后，进行两次积分可得到载体在惯性坐标系内的位置，然后将该位置矢量转换成需要的导航信息。

Wander azimuth navigation frame mechanisation

游动方位坐标系的捷联式惯性导航系统

游动方位坐标系仍然是一种地平坐标系，该坐标系绕垂直轴只跟踪地球的转动，即 $w_{ie} \sin L$ 相对惯性空间转动，而不跟踪由于载体相对运动形成的绕垂直轴的转动，因此，随着载体的运动，游动坐标系在方位上相对地球是游动的。游动角用 a 表示。

20160312

自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统

地理坐标系的捷联式惯性导航系统

Local geographic navigation frame mechanisation

在地球附近或表面的载体上，多数采用地平坐标系作为导航坐标系，这样可以避免引力补偿问题，特别是平台式惯性导航系统，由于导航平台将陀螺和加速度计稳定在地平坐标系，便于补偿惯性仪表与 g 有关的误差。在地平坐标系中最典型的是地理坐标系，所以加速度计测量的就是沿地理坐标系轴向的比力，可以直接利用这个信息进行导航计算。与这种平台式相对应的捷联式惯性导航系统。

地理坐标系的捷联式惯性导航系统

比力方程

载体相对地球运动，地球又相对惯性空间运动，因此，对地球而言，载体的惯性加速度包含了相对加速度和哥氏加速度等。要求载体相对地球的运动，就要建立这些加速度之间的关系式。

设载体在地心惯性坐标系中的位置矢量为 R ，则利用矢量的相对导数和绝对导数的关系，载体位置矢量 R 在地心惯性坐标系中的导数可表示为

载体相对地球的速度

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i = \left. \frac{dR}{dt} \right|_e + \omega_{ie} \times R$$

ω_{ie} 地球自转角速度

绝对运动

相对运动

牵连运动

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i = \left. \frac{dR}{dt} \right|_e + \mathbf{w}_{ie} \times R$$

v_{ep}

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i = v_{ep} + \mathbf{w}_{ie} \times R$$

两边在惯性系中求导，得 代表载体相对地球的运动速度

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{w}_{ie} \times R) \right|_i$$

$$\left. \frac{d\mathbf{w}_{ie}}{dt} \right|_i = 0$$

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_i + \mathbf{w}_{ie} \times \left. \frac{dR}{dt} \right|_i$$

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_p + (2\mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{ep}) \times v_{ep} + \mathbf{w}_{ie} \times (\mathbf{w}_{ie} \times R)$$

各分量是沿平台坐标系（理论上是沿导航坐标系）的，故以导航坐标系作为动坐标系，则

$$\left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_p = \mathbf{\&ep}$$

$$\left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_i = \left. \frac{dv_{ep}}{dt} \right|_p + \mathbf{w}_{ip} \times v_{ep}$$

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \mathbf{\&ep} + (2\mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{ep}) \times v_{ep} + \mathbf{w}_{ie} \times (\mathbf{w}_{ie} \times R)$$

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \mathbf{a}_{ep} + (2\mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{ep}) \times \mathbf{v}_{ep} + \mathbf{w}_{ie} \times (\mathbf{w}_{ie} \times \mathbf{R})$$

$$\mathbf{a}_{ep} = \mathbf{f} + \mathbf{G}$$

$$\mathbf{f} + \mathbf{G} = \mathbf{a}_{ep} + (2\mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{ep}) \times \mathbf{v}_{ep} + \mathbf{w}_{ie} \times (\mathbf{w}_{ie} \times \mathbf{R})$$

地球的重力是地球引力和地球自转产生的离心力的矢量和，即

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \mathbf{w}_{ie} \times (\mathbf{w}_{ie} \times \mathbf{R})$$

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{a}_{ep}^b + (2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{ep}^b) \times \mathbf{v}_{ep}^b - \mathbf{g}^b$$



$$\mathbf{f}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b$$

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{a}_{en}^n + (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n - \mathbf{g}^n$$



$$\mathbf{a}_{en}^n = \mathbf{f}^n - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n$$



速度计算

$$\dot{\mathbf{v}}_{en}^n = \mathbf{f}^n - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n$$

$$\mathbf{w}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_n}{R_N} \\ \frac{V_e}{R_E} \\ \frac{V_e}{R_E} \tan L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_e \\ \dot{V}_n \\ \dot{V}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_e \\ f_n \\ f_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2w_{ie} \sin L + \frac{V_e \tan L}{R_e} & -(2w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e}) \\ -(2w_{ie} \sin L + \frac{V_e \tan L}{R_e}) & 0 & -\frac{V_n}{R_n} \\ 2w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e} & \frac{V_n}{R_n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_n \\ V_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_e \\ \mathcal{V}_n \\ \mathcal{V}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_e \\ f_n \\ f_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2w_{ie} \sin L + \frac{V_e \tan L}{R_e} & -(2w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e}) \\ -(2w_{ie} \sin L + \frac{V_e \tan L}{R_e}) & 0 & -\frac{V_n}{R_n} \\ 2w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e} & \frac{V_n}{R_n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_n \\ V_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{R} = \frac{V_n}{R_n + h} \\ \mathcal{R} = \frac{V_e}{(R_e + h) \cos L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_n = R(1 - 2e + 3e \sin^2 L) \\ R_e = R(e \sin^2 L + 1) \end{cases}$$

为子午线曲率半径

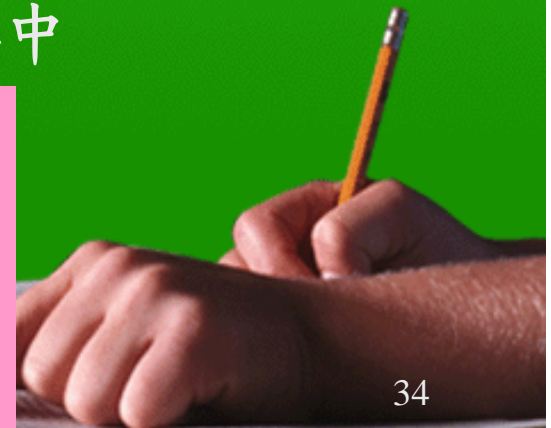
为与子午线垂直的法线平面的曲率半径

$$R = 6378140m$$

$$1/e = 298.257$$

各国采用的参考椭球有很多种，目前我国采用的是1975年国际会议推荐的参考椭球，其中

$$\begin{cases} \mathcal{V}_e = f_e + (\mathcal{R} + 2w_{ie}) \sin L V_n - (\mathcal{R} + 2w_{ie}) \cos L V_u \\ \mathcal{V}_n = f_n - (\mathcal{R} + 2w_{ie}) \sin L V_e - \mathcal{R} V_u \\ \mathcal{V}_u = f_u + \mathcal{R} V_n + (\mathcal{R} + 2w_{ie}) \cos L V_e - g \end{cases}$$



位置计算

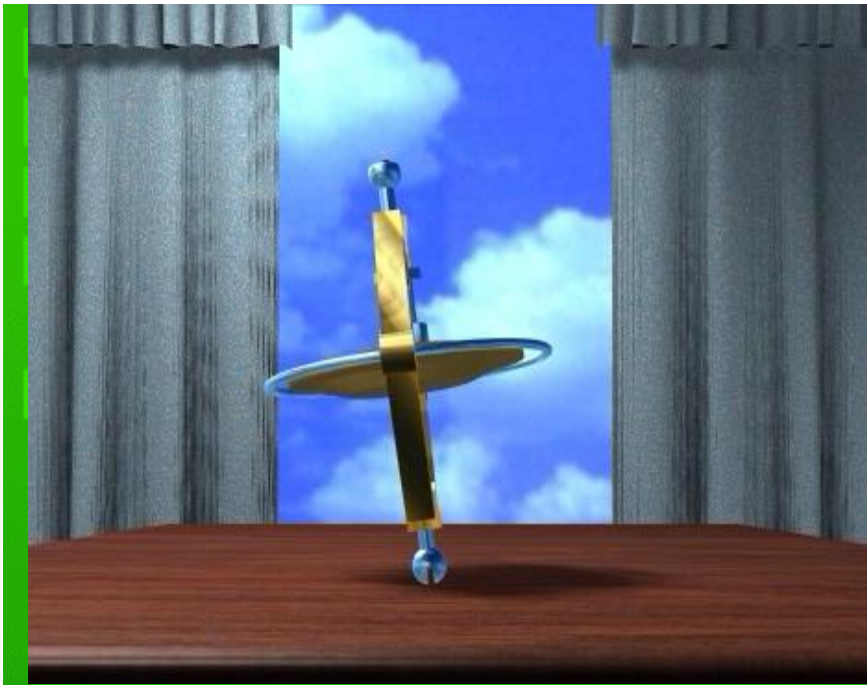
$$\begin{cases} \dot{L} = \frac{V_n}{R_n + h} \\ \dot{I} = \frac{V_e}{(R_e + h) \cos L} \end{cases}$$



$$\begin{cases} L = \int \dot{L} dt + L(0) \\ I = \int \dot{I} dt + I(0) \end{cases}$$

$$h = \int V_U dt + h_0$$







定轴性



进动性



二自由度陀螺

2010-03-12

37





Thank you for your
attention!

2010-03-12

38

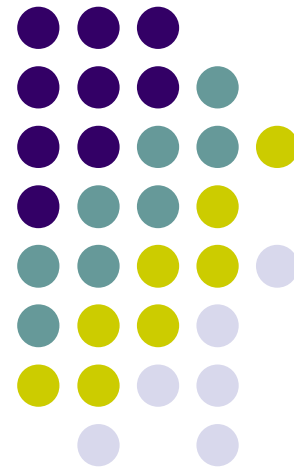
思考题

◆ 1. 推导姿态矩阵 C_n^b



第五章 三轴陀螺稳定平台

程向红



第五章 三轴陀螺稳定平台



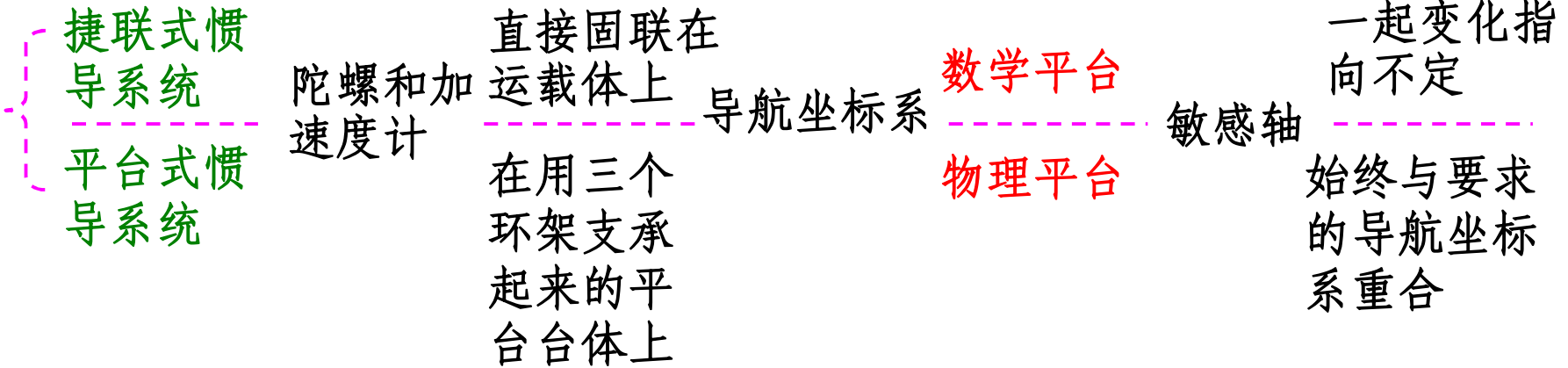
- | 5.1三轴平台简介
- | 5.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器
- | 5.3三轴平台工作原理分析
- | 5.4三轴平台的方位锁定原理
- | **5.5三轴平台的动力学方程和系统的传递函数阵** **自学**
- | **5.6 采用积分陀螺时三轴平台系统的输出耦合分析**
- | **5.7 三轴平台误差分析**

5.1 三轴平台简介



☺ 为何需要在运载体内部建立起导航坐标系？

😊 建立导航坐标系有哪些途径？



☀ 平台的两种工作状态？

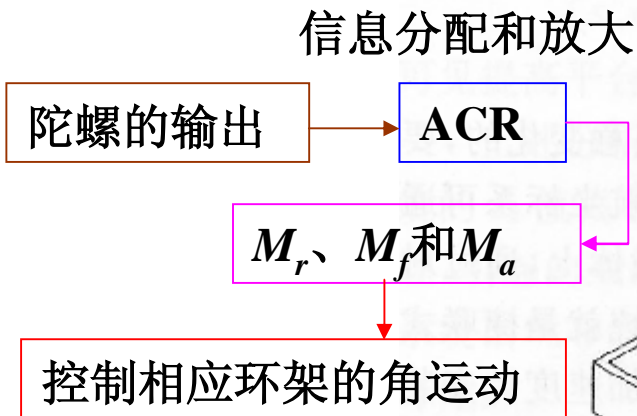
几何稳定和空间积分

☀ 三轴平台在工作过程中出现了哪些特殊问题？

如平台驱动信号的合理分配，基座角运动的耦合和隔离，陀螺输出轴的交叉耦合，三轴平台系统的交叉耦合等。

5.1三轴平台简介

组成

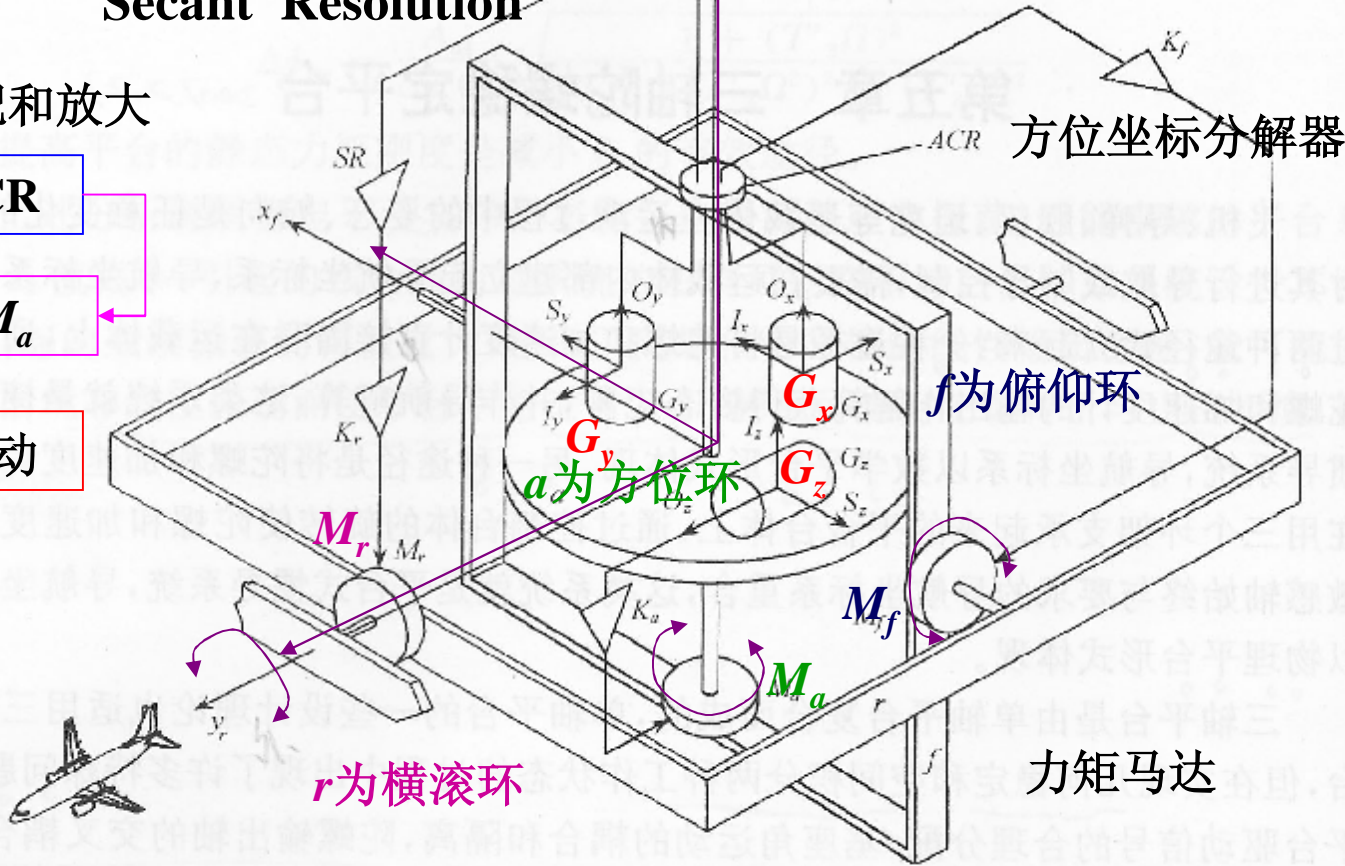


其中控制横滚通道的信号还需经SR作俯仰角补偿处理。在各环架轴安装有角度传感器，如自整角机发送器或线性旋转变压器，从方位环、俯仰环和横滚环上拾取的环架角分别为飞机的航向角、俯仰角和横滚角。

2010.05.21

俯仰正割分解器
Secant Resolution

Azimuth Coordinate Resolution



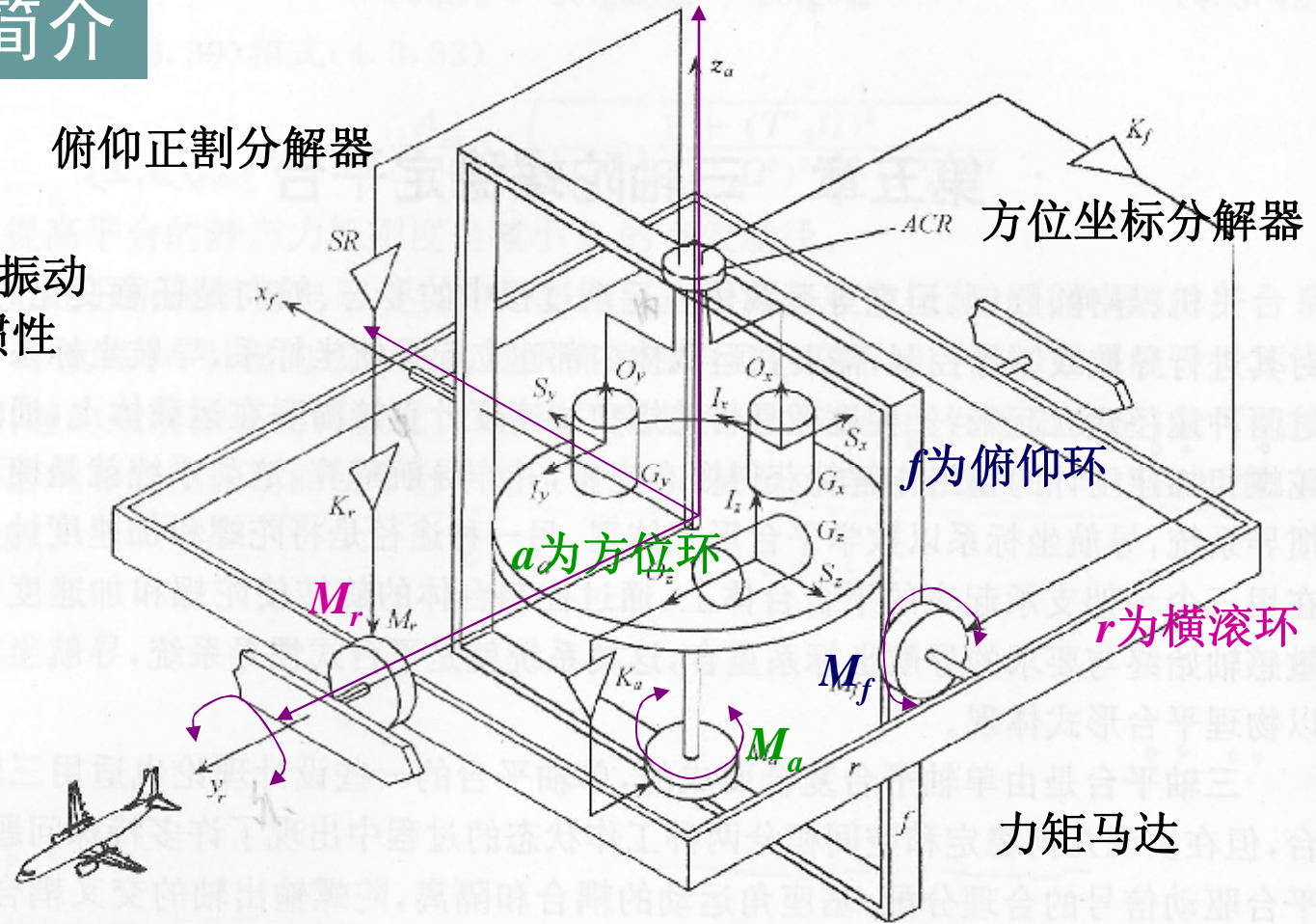
G_x 、 G_y 、 G_z 为单自由度陀螺仪，敏感轴相互正交，它们的指向构成了平台坐标系 $x_a y_a z_a$

5.1三轴平台简介

平台环架系统和基座 俯仰正割分解器之间装有**减震器**。

为了减小载体(飞机)振动对平台伺服系统和惯性仪表的影响。

用于飞机的三轴平台系统方位环轴和横滚环轴的转动角度范围通常是没限制的，绕俯仰环轴的转动角度范围根据需要而定。



凡是要求转动角度超过 360° 的环架轴，输电装置都要采用**电刷-滑环组件**，对转动角小于 180° 的环架轴，通常采用**软导线或其他形式的输电装置**。

5.1三轴平台简介

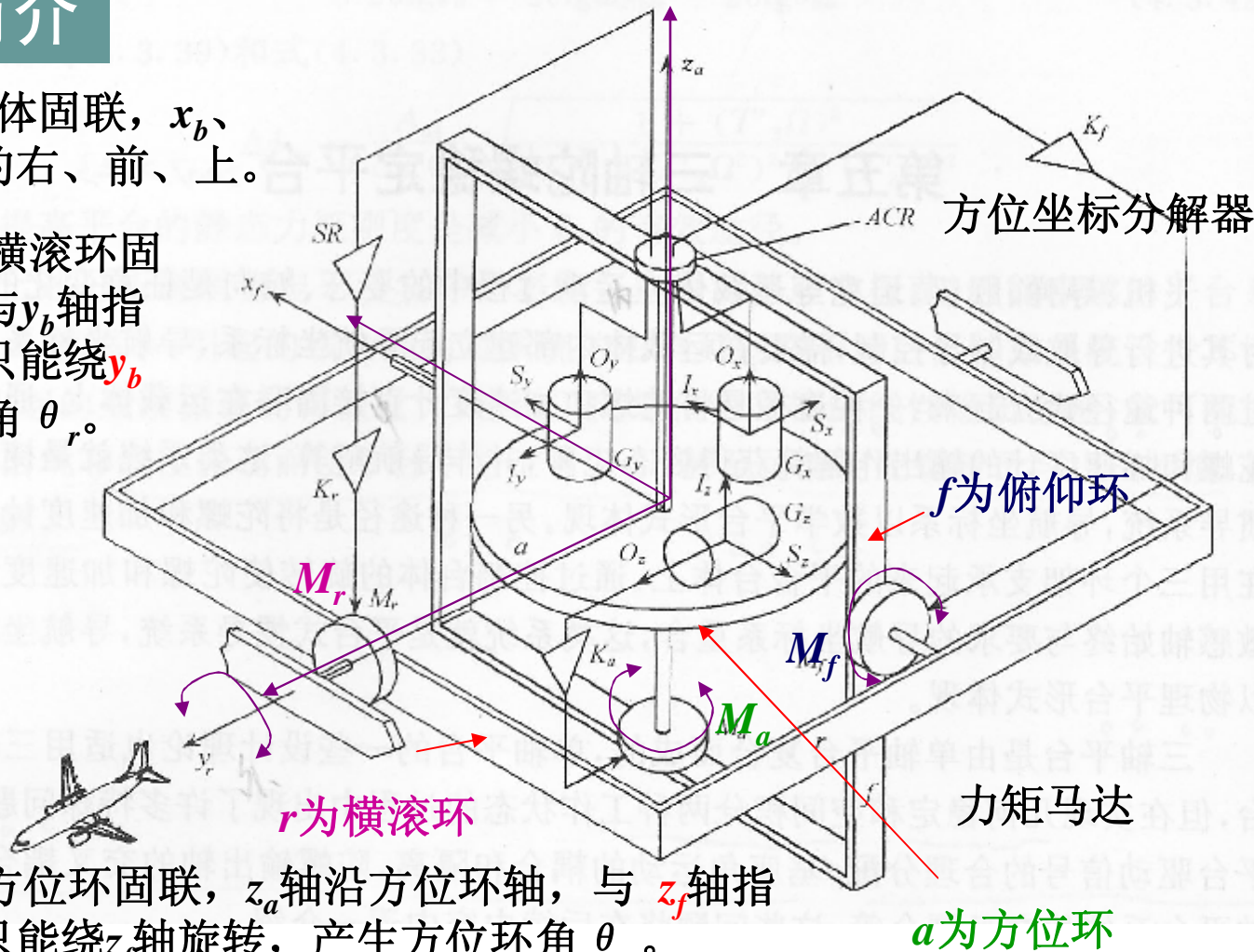
(1) **基座坐标系 b** :与机体固联, x_b 、 y_b 、 z_b 分别指向飞机的右、前、上。

(2) **横滚环坐标系 r** :与横滚环固联, y_r 轴沿横滚环轴, 与 y_b 轴指向相同, r 系相对 b 系只能绕 y_b 轴旋转, 产生横滚环角 θ_r 。

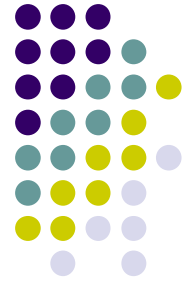
(3) **俯仰环坐标系 f** :与俯仰环固联, x_f 轴沿俯仰环轴, 与 x_r 轴指向相同, f 系相对 r 系只能绕 x_r 轴旋转, 产生俯仰环角 θ_f 。

(4) **方位环坐标系 a** :与方位环固联, z_a 轴沿方位环轴, 与 z_f 轴指向相同, a 系相对 f 系只能绕 z_f 轴旋转, 产生方位环角 θ_a 。

(5) **环架坐标系 A** : x_A, y_A, z_A 轴分别为 x_f, y_r, z_a 轴, 即为相应轴上的力矩马达产生力矩的方向, 所以也称为**力矩马达坐标系**。一般情况下该坐标系 **不是**正交坐标系, 只有当 $\theta_r=0$ 、 $\theta_f=0$ 、 $\theta_a=0$ (即环架处于中立位置) 时, 才为正交坐标系。



5.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器



5.2.1 角速度耦合关系分析

- | | |
|-----------------|----|
| 1. 横滚环 r 的角速度 | 外环 |
| 2. 俯仰环 f 的角速度 | 中环 |
| 3. 方位环 a 的角速度 | 内环 |

5.2.2 环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器

1. 环架驱动信号不作分配存在的问题
2. 环架驱动信号的合理分配分析

5.2.1 角速度耦合关系分析

分析各环架具有的角速度！

假设基座角速度为 $\omega_{ib}^b = [\omega_{ibx}^b \ \omega_{iby}^b \ \omega_{ibz}^b]^T$ ，各环架受力矩马达驱动后所具有的驱动角速度为 $\&_{r} \ \&_{f} \ \&_{a}$ ，瞬时环架角为 θ_r 、 θ_f 、 θ_a

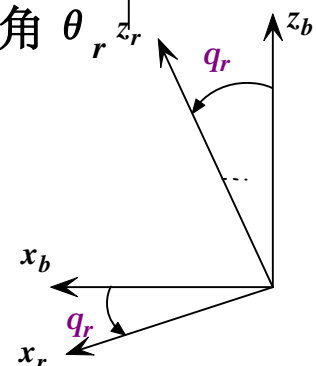


1. 横滚环r的角速度

r系相对b系只能绕 y_b 轴旋转，产生横滚环角 θ_r

$$C_b^r = \begin{bmatrix} \cos q_r & 0 & -\sin q_r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_r & 0 & \cos q_r \end{bmatrix} \quad W_{ir}^r = C_b^r W_{ib}^b + W_{br}^r$$

$$\begin{bmatrix} W_{irx}^r \\ W_{iry}^r \\ W_{irz}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_r & 0 & -\sin q_r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_r & 0 & \cos q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{ibx}^b \\ W_{iby}^b \\ W_{ibz}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \&_{r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ibx}^b \cos q_r - W_{ibz}^b \sin q_r \\ W_{iby}^b + \&_{r} \\ W_{ibx}^b \sin q_r + W_{ibz}^b \cos q_r \end{bmatrix}$$

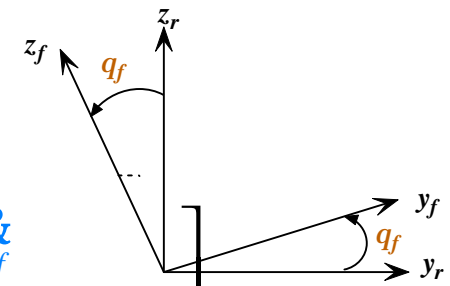


2. 俯仰环f的角速度

f系相对r系只能绕 x_r 轴旋转，产生俯仰环角 θ_f

$$C_r^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_f & \sin q_f \\ 0 & -\sin q_f & \cos q_f \end{bmatrix} \quad W_{if}^f = C_r^f W_{ir}^r + W_{rf}^f$$

$$\begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{ify}^f \\ W_{ifz}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_f & \sin q_f \\ 0 & -\sin q_f & \cos q_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{irx}^r \\ W_{iry}^r \\ W_{irz}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \&_{f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{irx}^r + \&_{f} \\ W_{iry}^r \cos q_f + W_{irz}^r \sin q_f \\ -W_{iry}^r \sin q_f + W_{irz}^r \cos q_f \end{bmatrix}$$

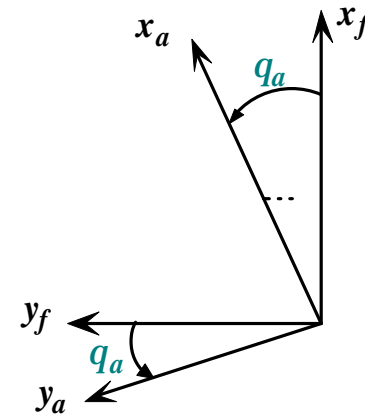


5.2.1 角速度耦合关系分析

3. 方位环a的角速度

$$C_f^a = \begin{bmatrix} \cos q_a & \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{ia}^a = C_f^a W_{if}^f + W_{fa}^a$$



$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iay}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_a & \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{ify}^f \\ W_{ifz}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \& \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \cos q_a + W_{ify}^f \sin q_a \\ -W_{ifx}^f \sin q_a + W_{ify}^f \cos q_a \\ W_{ifz}^f + \& \end{bmatrix}$$

上式改写成用沿三个环架轴 x_f 、 y_r 、 z_a 的角速度来表示的形式，即用 W_{ifx}^f 、 W_{iry}^r 、 W_{iaz}^a 来表示之。

$$W_{ify}^f = W_{iry}^r \cos q_f + W_{irz}^r \sin q_f \quad W_{irz}^r = W_{ibx}^b \sin q_r + W_{ibz}^b \cos q_r$$

$$W_{ifz}^f = W_{iry}^r \cos q_f + W_{ibx}^b \sin q_r \sin q_f + W_{ibz}^b \cos q_r \sin q_f$$

$$\begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{ify}^f \\ W_{ifz}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{irx}^r + \& \\ W_{iry}^r \cos q_f + W_{irz}^r \sin q_f \\ -W_{iry}^r \sin q_f + W_{irz}^r \cos q_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{irx}^r \\ W_{iry}^r \\ W_{irz}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ibx}^b \cos q_r - W_{ibz}^b \sin q_r \\ W_{iby}^b + \& \\ W_{ibx}^b \sin q_r + W_{ibz}^b \cos q_r \end{bmatrix}$$



5.2.1 角速度耦合关系分析

$$w_{ify}^f = w_{iry}^r \cos q_f + w_{ibx}^b \sin q_r \sin q_f + w_{ibz}^b \cos q_r \sin q_f$$

$$w_{ifx}^f, w_{iry}^r, w_{iaz}^a$$

$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iax}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{ifx}^f \cos q_a + w_{iry}^r \cos q_f \sin q_a \\ -w_{ifx}^f \sin q_a + w_{iry}^r \cos q_f \cos q_a \\ w_{iaz}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iax}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{ifx}^f \cos q_a + w_{ify}^f \sin q_a \\ -w_{ifx}^f \sin q_a + w_{ify}^f \cos q_a \\ w_{iaz}^a \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} w_{ibx}^b \sin q_r \sin q_f \sin q_a + w_{ibz}^b \cos q_r \sin q_f \sin q_a \\ w_{ibx}^b \sin q_r \sin q_f \cos q_a + w_{ibz}^b \cos q_r \sin q_f \cos q_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_a & \cos q_f \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_f \cos q_a & 0 \\ 0 & T_1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{ifx}^f \\ w_{iry}^r \\ w_{iaz}^a \end{bmatrix} \quad \text{环架角速度}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin q_r \sin q_f \sin q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \sin q_a \\ \sin q_r \sin q_f \cos q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \cos q_a \\ & 0 & T_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{ibx}^b \\ w_{iby}^b \\ w_{ibz}^b \end{bmatrix} \quad \text{基座角速度}$$

5.2.1 角速度耦合关系分析

$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iax}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_a & \cos q_f \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_f \cos q_a & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{iry}^r \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} \Rightarrow W_{iA}^A = \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{iry}^r \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin q_r \sin q_f \sin q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \sin q_a \\ \sin q_r \sin q_f \cos q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \cos q_a \\ 0 & \mathbf{T}_3 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{ibx}^b \\ W_{iby}^b \\ W_{ibz}^b \end{bmatrix}$$

$$W_{ia}^a = T_1 W_{iA}^A + T_3 W_{ib}^b$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_a & \cos q_f \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_f \cos q_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} \sin q_r \sin q_f \sin q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \sin q_a \\ \sin q_r \sin q_f \cos q_a & 0 & \cos q_r \sin q_f \cos q_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[返回5.2.2.2](#)

T_1 称为环架系统几何关系阵，平台系统通过该矩阵将环架角速度传递给台体， T_3 称为基座角运动的几何约束耦合阵，平台系统通过该阵将基座角速度传递给台体。

5.2.1 角速度耦合关系分析

环架角变化率表示形式!

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{ifx}^f \\ \dot{w}_{ify}^f \\ \dot{w}_{ifz}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w}_{irx}^r + \dot{q}_f \\ \dot{w}_{iry}^r \cos q_f + \dot{w}_{ifz}^r \sin q_f \\ -\dot{w}_{iry}^r \sin q_f + \dot{w}_{irz}^r \cos q_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{irx}^r \\ \dot{w}_{iry}^r \\ \dot{w}_{irz}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w}_{ibx}^b \cos q_r - \dot{w}_{ibz}^b \sin q_r \\ \dot{w}_{iby}^b + \dot{q}_r \\ \dot{w}_{ibx}^b \sin q_r + \dot{w}_{ibz}^b \cos q_r \end{bmatrix}$$

俯仰环f的角速度

方位环a的角速度

5.3.1.2
横滚环r的角速度

$$\begin{cases} \dot{w}_{ifx}^f = \dot{q}_f + \dot{w}_{irx}^r = \dot{q}_f + \dot{w}_{ibx}^b \cos q_r - \dot{w}_{ibz}^b \sin q_r \\ \dot{w}_{iry}^r = \dot{q}_r + \dot{w}_{iby}^b \\ \dot{w}_{iaz}^a = \dot{q}_a + \dot{w}_{ifz}^f = \dot{q}_a - \dot{w}_{iry}^r \sin q_f + \dot{w}_{irz}^r \cos q_f \\ = \dot{q}_a - \dot{w}_{iby}^b \sin q_f - \dot{q}_r \sin q_f + \dot{w}_{ibx}^b \sin q_r \cos q_f + \dot{w}_{ibz}^b \cos q_r \cos q_f \end{cases} \quad \dot{w}_{iA}^A = \begin{bmatrix} \dot{w}_{ifx}^f \\ \dot{w}_{iry}^r \\ \dot{w}_{iaz}^a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{iAx}^A \\ \dot{w}_{iAy}^A \\ \dot{w}_{iAz}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w}_{ifx}^f \\ \dot{w}_{iry}^r \\ \dot{w}_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_f + \dot{w}_{ibx}^b \cos q_r - \dot{w}_{ibz}^b \cos q_r \\ \dot{q}_r + \dot{w}_{iby}^b \\ \dot{q}_a - \dot{w}_{iby}^b \sin q_f - \dot{q}_r \sin q_f + \dot{w}_{ibx}^b \sin q_r \cos q_f + \dot{w}_{ibz}^b \cos q_r \cos q_f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{q}_f \\ \dot{q}_r \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & 0 \\ 0 & -\sin q_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_f \\ \dot{q}_r \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos q_r & 0 & -\sin q_r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_r \cos q_f & -\sin q_f & \cos q_r \cos q_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_{ibx}^b \\ \dot{w}_{iby}^b \\ \dot{w}_{ibz}^b \end{bmatrix}$$

\dot{q}_A

$$\dot{w}_{iA}^A = \dot{q}_A + T_4 \dot{q}_A + T_5 \dot{w}_{ib}^b$$

2010.05.21



5.2.1 角速度耦合关系分析

$$\begin{aligned}
 \omega_{ia}^a &= T_1 \omega_{iA}^A + T_3 \omega_{ib}^b \\
 \omega_{iA}^A &= T_4 \dot{q}_A + T_5 \omega_{ib}^b \\
 \omega_{ia}^a &= (T_1 + T_1 T_4) \dot{q}_A + (T_1 T_5 + T_3) \omega_{ib}^b
 \end{aligned}$$

平台台体的
角速度

电机的驱
动角速度

基座角
速度

平台台体的角速度由电机的驱动角速度和基座角速度组成，如果适当控制电机的驱动，就能对消基座的角运动。

其中 T_4 是 \dot{q}_A 的摩擦约束（或直接带动）耦合阵，

T_5 为 ω_{ib}^b 的摩擦约束（或直接带动）耦合阵。

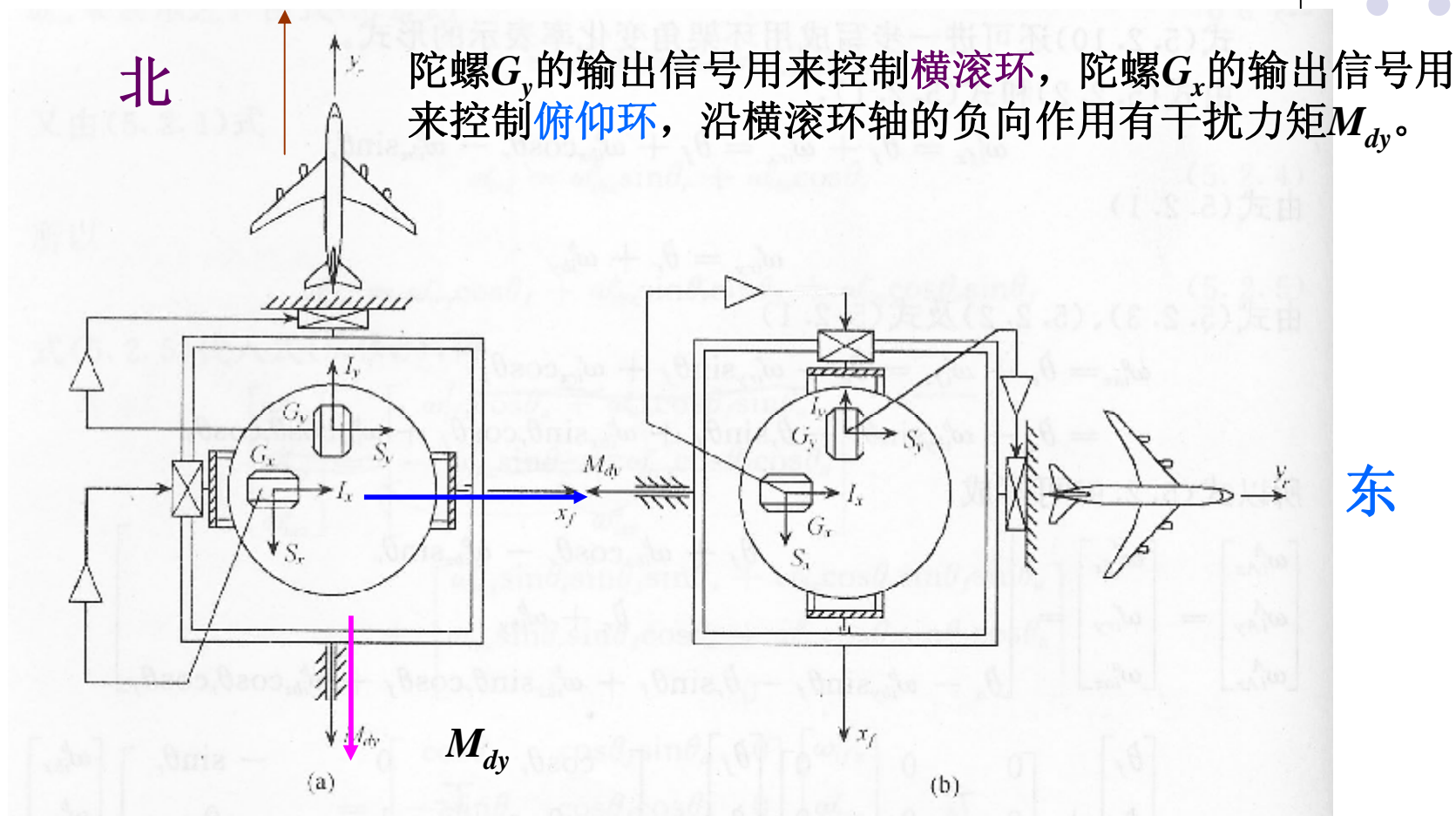
[返回5.3.1.2](#)



5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器



1.环架驱动信号不作分配存在的问题



三轴平台的水平伺服回路示意图



5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器



1.环架驱动信号不作分配存在的问题

陀螺 G_y 的输出信号用来控制横滚环，陀螺 G_x 的输出信号用来控制俯仰环，沿横滚环轴的负向作用有干扰力矩 M_{dy} 。

假设飞机朝北飞行，环架处于中立位置。

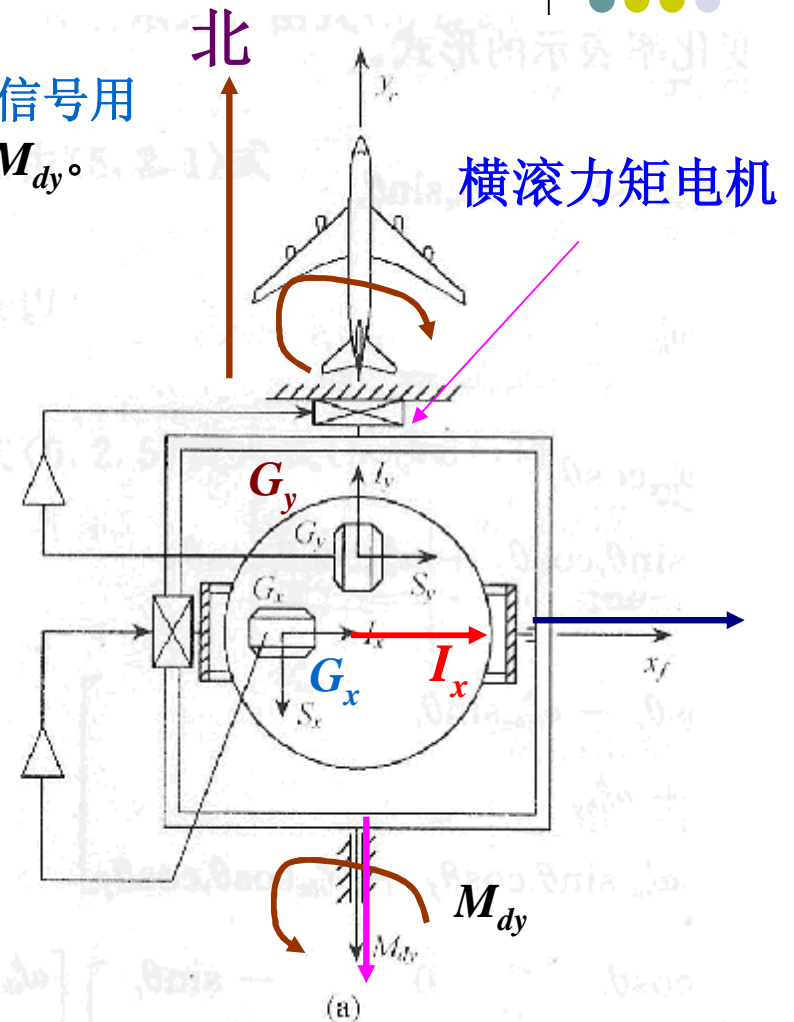
干扰力矩 M_{dy} → 几何约束

横滚环绕 y_r 轴的负方向旋转

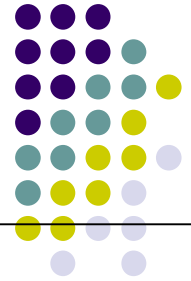
俯仰环和方位环被带着一起旋转，陀螺 G_y 感测此转动，信号器输出与旋转角速度成正比的电压信号，经放大后加至横滚力矩电机，电机产生与 M_{dy} 大小相等，方向相反的卸荷力矩，抵消干扰力矩。

而此时，陀螺 G_x 的输入轴 I_x 与横滚环的旋转方向正交，所以俯仰伺服回路并不工作。

结论：在图示位置（向北飞行）时，横滚和俯仰伺服回路能正常工作。



5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器



1.环架驱动信号不作分配存在的问题

假设飞机由朝北飞行经右盘旋后改向朝东飞行，环架仍然处于中立位置。

几何约束

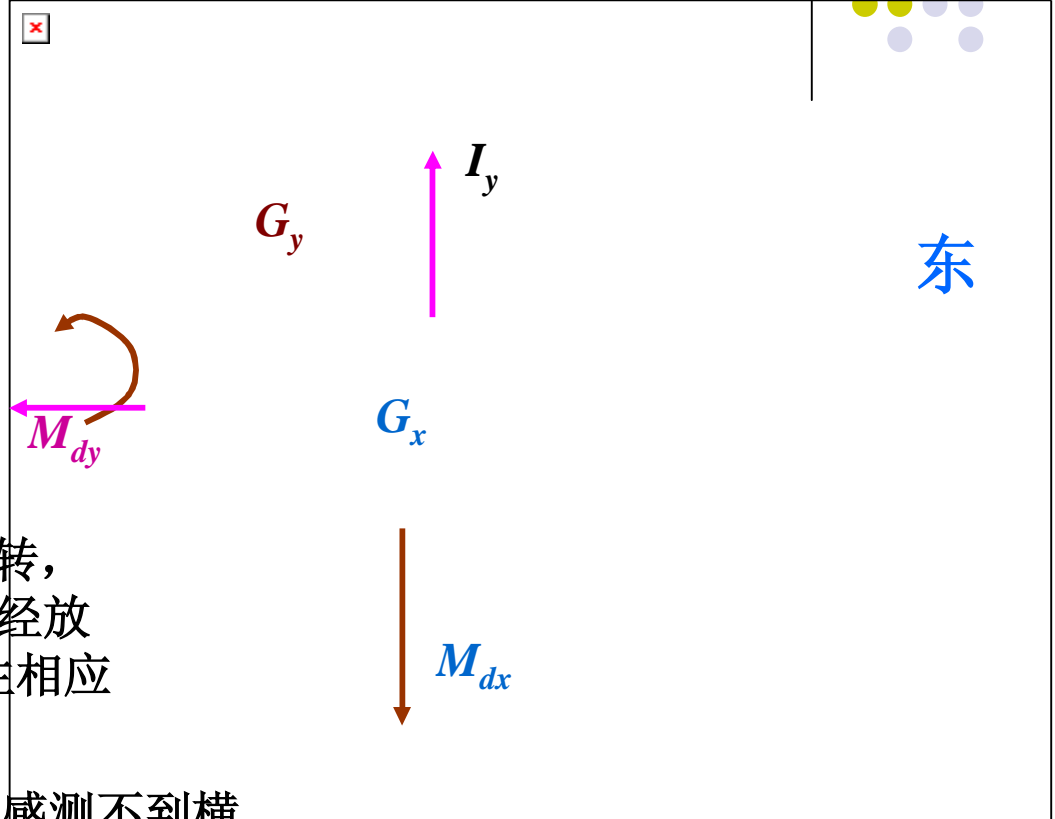
横滚环和俯仰环均被顺时针带动转过 90° ，而方位环沿 z_a 轴有伺服回路，方位伺服回路隔离了这一转动而保持原来方位，陀螺 G_y 和 G_x 的输入轴方向仍保持原来方向。

横滚环在 M_{dy} 的作用下绕 y_r 的负方向旋转，旋转角速度被陀螺 G_x 感测，输出信号经放大后馈入俯仰力矩电机，在轴 x_f 上产生相应力矩 M_{dx} 。

而此时陀螺 G_y 的输入轴 I_y 与 y_r 轴正交，感测不到横滚环的旋转，输出为零，横滚伺服回路不工作，干扰力矩 M_{dy} 仍然存在。

此时， M_{dy} 非但没被抵消，还产生了另外一个干扰力矩 M_{dx} 。

2010.05.21 结论：图示位置伺服回路不能正常工作。事实上，除正北中立位置外，所有位置都不能正常工作。



5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器



2.环架驱动信号的合理分配分析

确定合适的 T_2

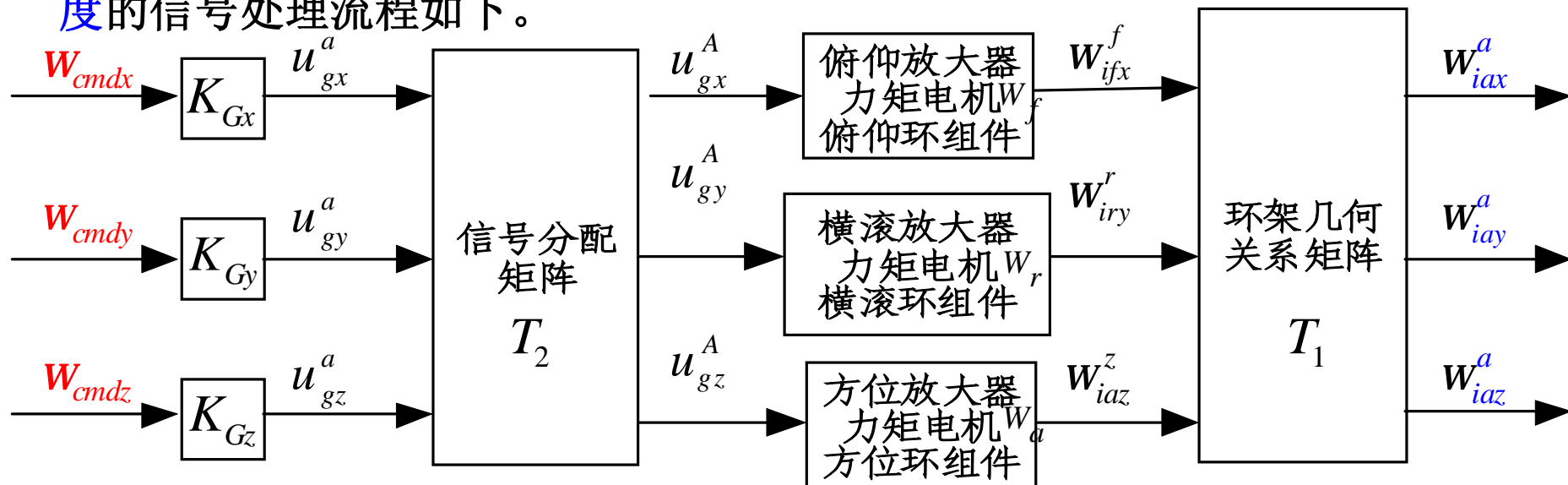
假设平台的指令角速度为 W_{cmdx} 、 W_{cmdy} 、 W_{cmdz} ，将它们折算成指令电流加至陀螺 G_x 、 G_y 、 G_z 的力矩器中，忽略陀螺的瞬态响应，并记

$$k_{Gi} = k_{wi} k_g k_u, i=x,y,z$$

k_{wi} 为指令角速度至指令电流的转换系数， $k_g = \frac{H}{D}$ 为陀螺的传递函数，

k_u 为信号器转角至电压的转换系数。

设平台的输出角速度为 W_{iax}^a 、 W_{iax}^a 、 W_{iaz}^a ，则从指令角速度到平台输出角速度的信号处理流程如下。



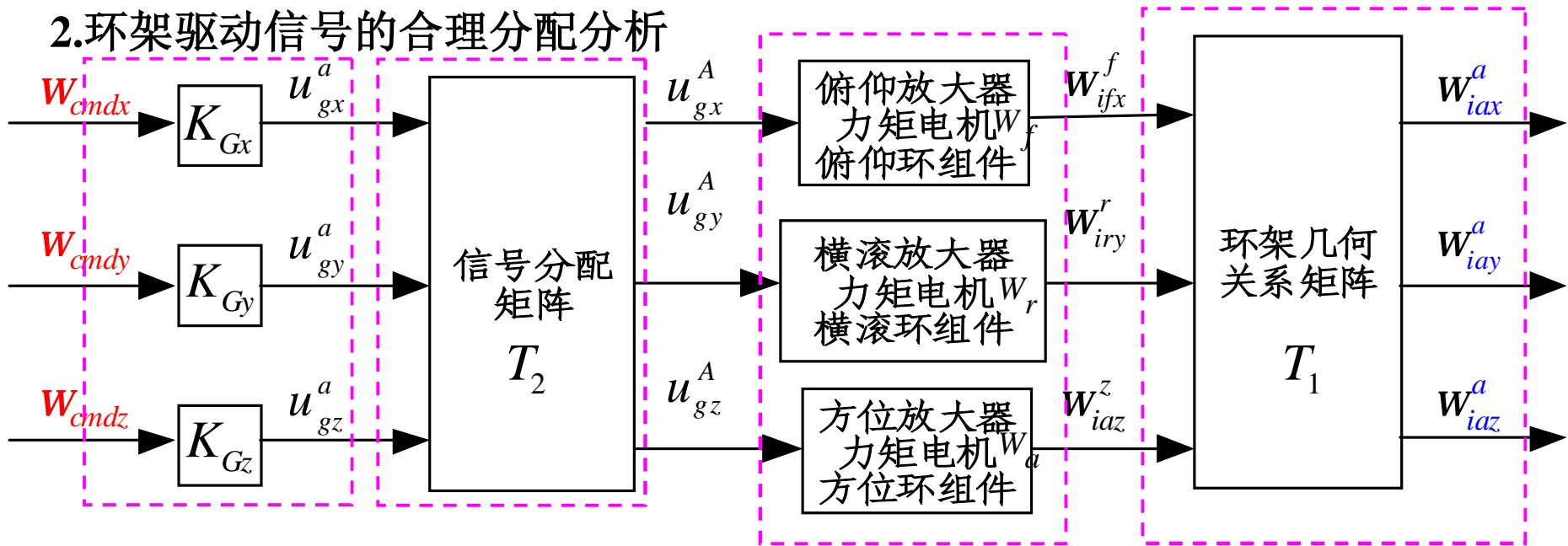
2010.05.21

要求获得驱动环架的合适驱动信号，确定合适的 T_2 ， T_2 矩阵实现对陀螺输出信号作合理分配。

下面确定合适的 T_2

5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器

2.环架驱动信号的合理分配分析



$$\begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{cmdx} \\ W_{cmdy} \\ W_{cmdz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix}$$

A: 环架坐标系

a: 方位环坐标系

=平台坐标系

确定合适的 T_2

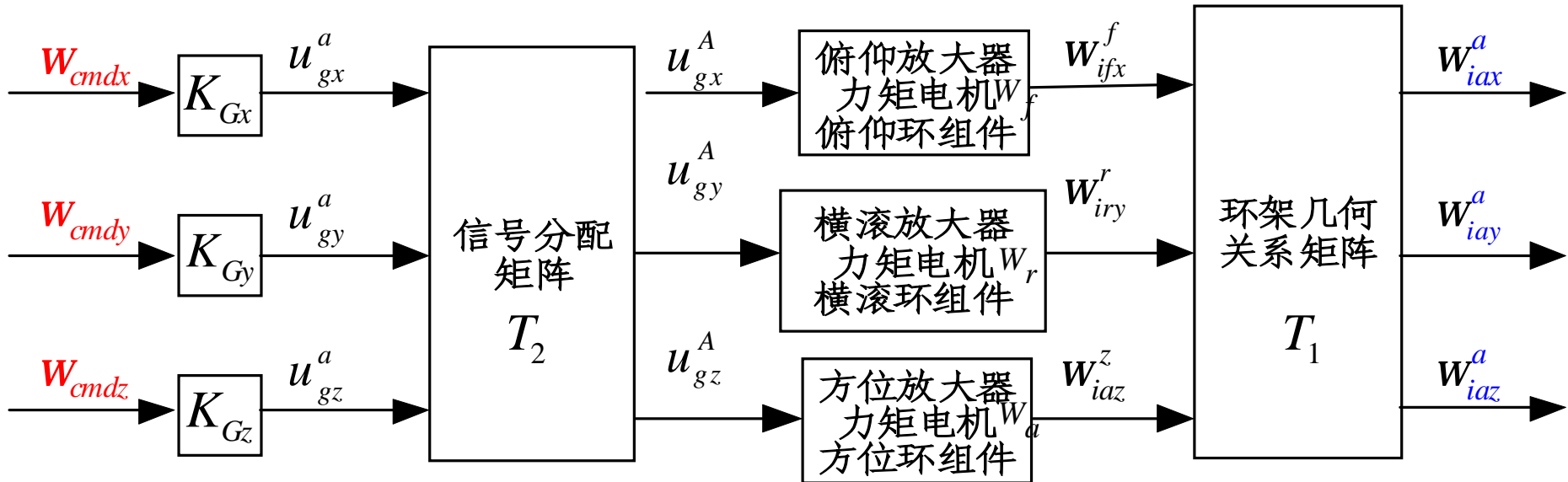
$$\begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{iry}^r \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_f & 0 & 0 \\ 0 & W_r & 0 \\ 0 & 0 & W_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iay}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{iry}^r \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix}$$



5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器

2.环架驱动信号的合理分配分析



$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iay}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} W_{ifx}^f \\ W_{iry}^r \\ W_{iaz}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_f & 0 & 0 \\ 0 & W_r & 0 \\ 0 & 0 & W_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{cmdx} \\ W_{cmddy} \\ W_{cmddz} \end{bmatrix}$$

$$K_{Gx} = K_{Gy} = K_{Gz} = K_G \quad W_r = W_f = W_a = W \quad W K_G = 1$$

$$\begin{bmatrix} W_{iax}^a \\ W_{iay}^a \\ W_{iaz}^a \end{bmatrix} = T_1 W I \cdot T_2 K_G I \begin{bmatrix} W_{cmdx} \\ W_{cmddy} \\ W_{cmddz} \end{bmatrix} = T_1 \cdot T_2 \begin{bmatrix} W_{cmdx} \\ W_{cmddy} \\ W_{cmddz} \end{bmatrix}$$

要使平台准确跟踪指令角速度

$$T_1 \times T_2 = I \quad T_2 = T_1^{-1}$$

2010.05.21

5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器

2.环架驱动信号的合理分配分析

要使平台准确跟踪指令角速度

$$T_1 \times T_2 = I \quad T_2 = T_1^{-1}$$

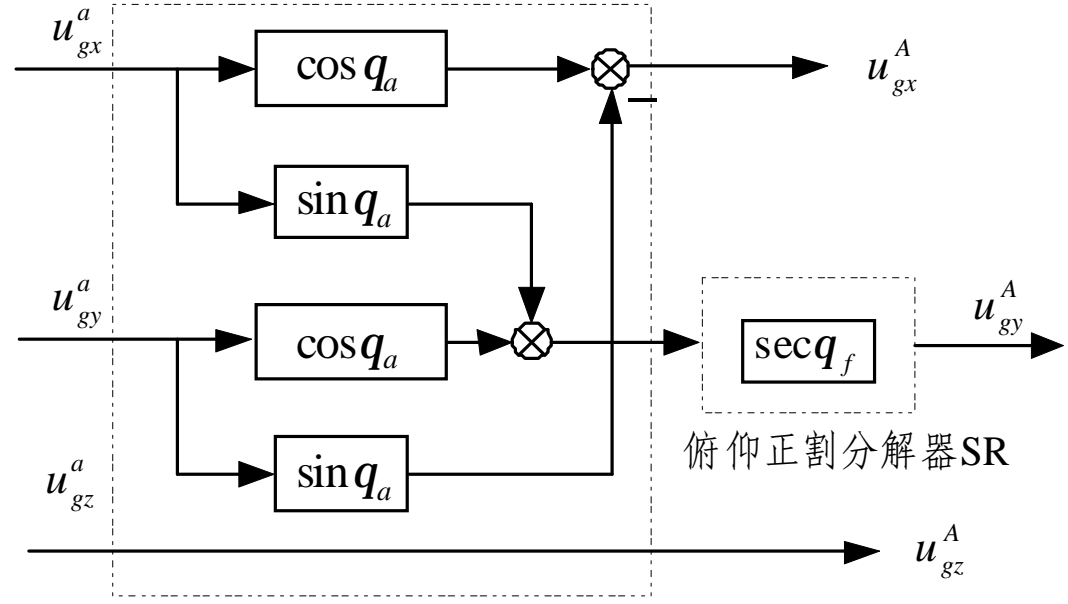
T_1



$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_a & \cos q_f \sin q_a & 0 \\ -\sin q_a & \cos q_f \cos q_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_a & -\sin q_a & 0 \\ \sin q_a \sec q_f & \cos q_a \sec q_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a \\ (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a) \sec q_f \\ u_{gz}^a \end{bmatrix}$$

$a \rightarrow A$



方位坐标分解器 ACR



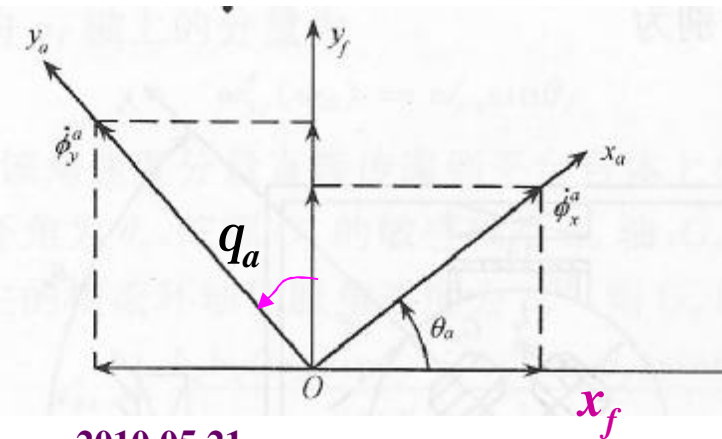
5.2.2环架驱动信号的合理分配—方位坐标分解器和俯仰正割分解器

2.环架驱动信号的合理分配分析

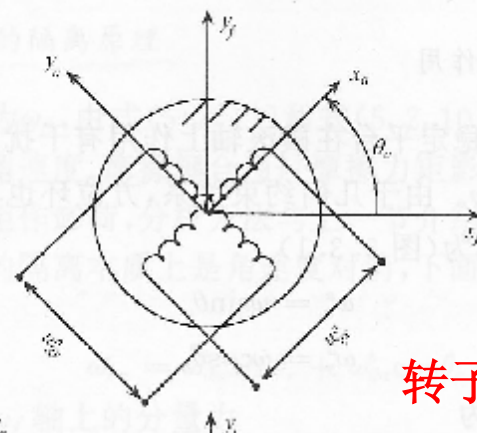
在平台式惯导系统的惯性平台中，采用旋转变压器实现方位坐标分解，旋转变压器的旋转轴与方位环轴同轴，定子固联在俯仰环上，转子则固联在方位环上，转子和定子上都绕有两组相互垂直的绕组，转子上的两组绕组作为原边，分别通入 G_x 和 G_y 陀螺的输出（400周的调制信号），定子上的绕组作为副边，输出即为经正、余弦变换后的400周调制信号。

设由 u_{gx}^a 和 u_{gy}^a 在 x_a 轴和 y_a 轴上产生的磁场分别为 f_x^a 和 f_y^a 方位环存在方位环角 q_a ，则磁场在 x_f 和 y_f 方向上的分量为

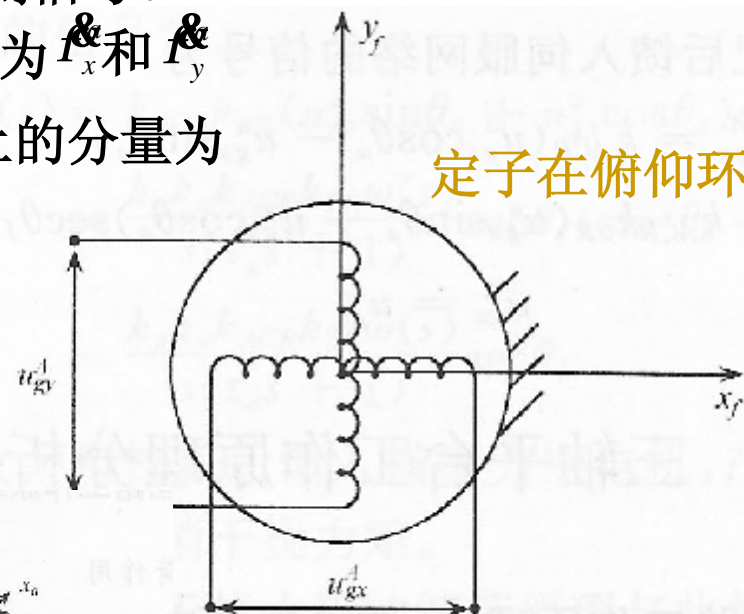
$$\begin{aligned} f_x^f &= f_x^a \cos q_a - f_y^a \sin q_a & \text{其中 } f_x^a &= k_1 u_{gx}^a \\ f_y^f &= f_x^a \sin q_a + f_y^a \cos q_a & f_y^a &= k_1 u_{gy}^a \end{aligned}$$



2010.05.21



转子在方位环上



定子俯仰环



5.2.2 环架驱动信号的合理分配——方位坐标分解器和俯仰正割分解器

2. 环架驱动信号的合理分配分析
 旋转变压器的副边输出为

$$U_{gx}^A = k_2 \dot{\theta}_x = k_{ACR} (u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a)$$

$$U_{gy}^A = k_2 \dot{\theta}_y = k_{ACR} (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a)$$

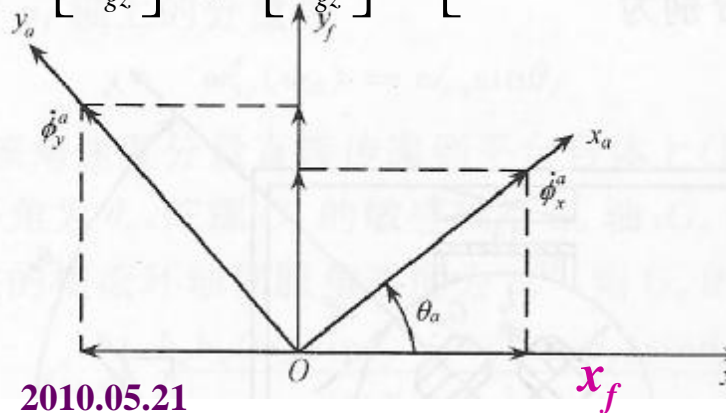
$K_{ACR} = k_1 k_2$ 为方位坐标分解器的变换系数。



在实际平台系统中，俯仰正割分解器采用计算电路实现，设电路的传递系数为 k_{SR} ，则陀螺输出信号经分配后馈入伺服网络的信号为

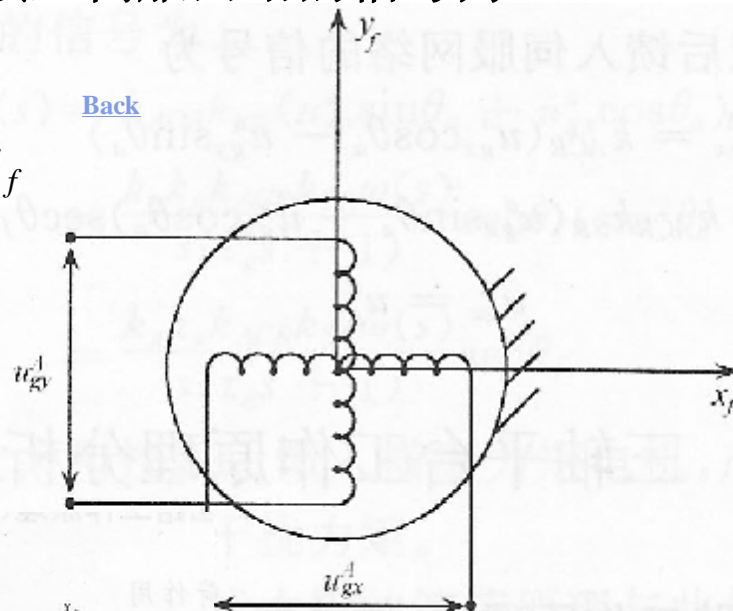
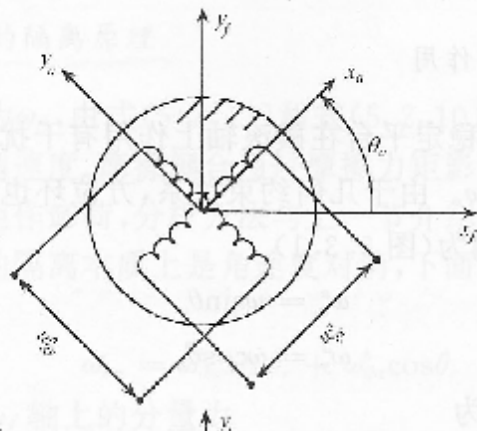
$$\begin{cases} u_{gx}^A = k_{ACR} (u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a) \\ u_{gy}^A = k_{ACR} k_{SR} (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a) \sec q_f \\ u_{gz}^A = u_{gz}^a \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{gx}^A \\ u_{gy}^A \\ u_{gz}^A \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_{gx}^a \\ u_{gy}^a \\ u_{gz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a \\ (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a) \sec q_f \\ u_{gz}^a \end{bmatrix}$$

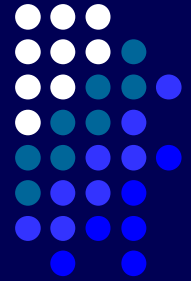


2010.05.21

x_f



5.3三轴平台工作原理分析



- | **5.3.1三轴平台的稳定回路工作原理（几何稳定状态下的工作原理）**
 - | **1.对于干扰力矩的卸荷作用**
 - | **2.对基座角运动的隔离原理**
- | **5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理（空间积分状态下的工作原理）**
- | **5.4三轴平台的方位锁定原理**



5.3.1 三轴平台的稳定回路工作原理-几何稳定状态

1. 对干扰力矩的卸荷作用

假设三轴稳定平台在横滚轴上作用有干扰力矩 M_{dy} ，此时，横滚环绕 y_r 轴旋转，产生角速度 w 。由于几何约束关系，方位环也具有此角速度，陀螺 G_x 和 G_y 感测到的角速度分别为

$$w_x^a = w \sin q_a \quad u_{gx}^a = \frac{k_g k_u w(s) \sin q_a}{s(t_g s + 1)}$$

$$w_y^a = w \cos q_a \quad u_{gy}^a = \frac{k_g k_u w(s) \cos q_a}{s(t_g s + 1)}$$

陀螺 G_x 和 G_y 的输出分别为 u_{gx}^a 和 u_{gy}^a

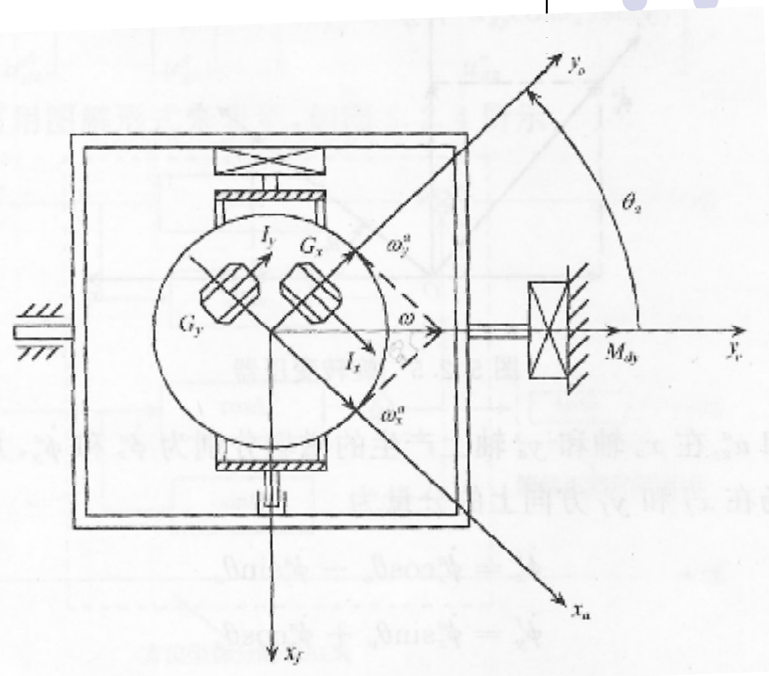
经方位坐标分解器和俯仰正割分解器后，馈入俯仰伺服放大器的信号为

$$u_{gx}^A(s) = k_{ACR} (u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a)$$

$$= \frac{k_g k_u k_{ACR} \cos q_a}{s(t_g s + 1)} (\sin q_a \cos q_a - \cos q_a \sin q_a) = 0$$

馈入横滚伺服放大器的信号为 $u_{gy}^A(s) = k_{ACR} k_{SR} (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a) \sec q_f$

u_{gy}^A 经横滚伺服回路放大和校正后，馈入横滚力矩电机，产生与干扰力矩 M_{dy} 大小相等，方向相反的卸荷力矩，抵消干扰力矩。



5.3.1 三轴平台的稳定回路工作原理-几何稳定状态



2. 对基座角运动的隔离原理

设基座的角速度为 ω_{ib} ，由前面分析知 w_{ib} 通过摩擦耦合和几何约束耦合影响平台的角速度。摩擦耦合通过摩擦力矩影响平台，平台对此干扰的隔离本质上是对摩擦力矩作卸荷，分析方法同上一节。对几何约束耦合引起的干扰角速度的隔离本质上是角速度抵消。

$$w_{ia}^a = T_1 w_{iA}^A + T_3 w_{ib}^b$$

$$w_{ia}^a = (T_1 + TT_4) \dot{q}_A + (TT_5 + T_3) w_{ib}^b$$

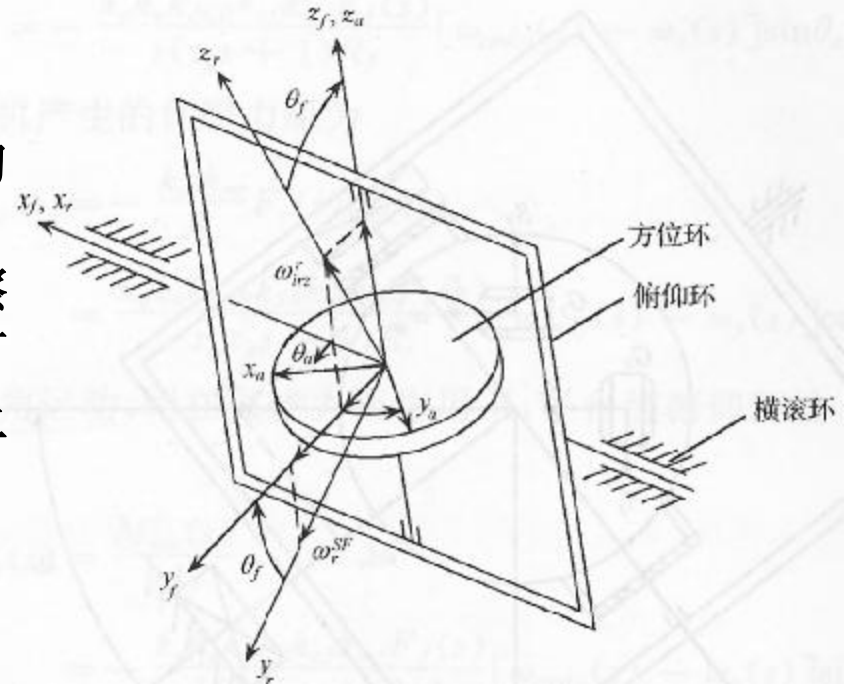
$$w_{irz}^r = w_{ibx}^b \sin q_r + w_{ibz}^b \cos q_r \quad \text{eq5.2.1}$$

由于几何约束关系，该角速度分量直接传递到平台台体上

设平台的方位环角为 q_a ，陀螺 G_x 的敏感轴沿 x_a 轴， G_y 的敏感轴沿 y_a 轴，由横滚环轴力矩电机产生的横滚环轴伺服角速度为 w_r^{SF}

则 G_x 的输出为

$$u_{gx}^a = \frac{k_g k_u (w_{irz}^r \sin q_f + w_r^{SF} \cos q_f) \sin q_a}{s(t_g s + 1)}$$



该角速度在俯仰环的 y_f 轴上的分量为

$$w_{y_f}^f (w_{ib}) = w_{irz}^r \sin q_f$$

G_y 的输出为

$$u_{gy}^a = \frac{k_g k_u (w_{irz}^r \sin q_f + w_r^{SF} \cos q_f) \cos q_a}{s(t_g s + 1)}$$



5.3.1 三轴平台的稳定回路工作原理-几何稳定状态



2. 对基座角运动的隔离原理

经方位坐标分解器和俯仰正割分解器处理后馈入俯仰伺服回路的信号为

$$u_{gx}^A = k_{ACR} (u_{gx}^a \cos q_a - u_{gy}^a \sin q_a)$$

$$= \frac{k_{ACR} k_g k_u (w_{irz}^r \sin q_f + w_r^{SF} \cos q_f)}{s(t_g s + 1)} (\sin q_a \cos q_a - \cos q_a \sin q_a) = 0$$

馈入横滚伺服回路的信号为

$$u_{gy}^A = k_{ACR} k_{SR} (u_{gx}^a \sin q_a + u_{gy}^a \cos q_a) \sec q_f$$

$$= \frac{k_{ACR} k_{SR} k_g k_u (w_{irz}^r \sin q_f + w_r^{SF} \cos q_f)}{s(t_g s + 1)} (\sin^2 q_a + \cos^2 q_a) \sec q_f$$

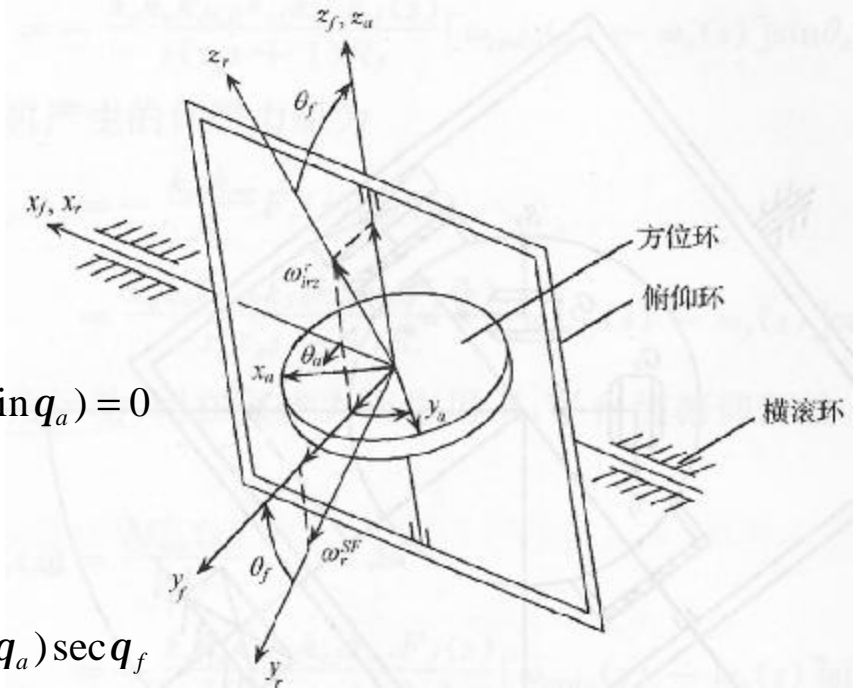
$$= \frac{k_{ACR} k_{SR} k_g k_u (w_{irz}^r \tan q_f + w_r^{SF})}{s(t_g s + 1)}$$

所以横滚环力矩电机产生的伺服力矩为

$$M_{mr}(s) = -k_{ar} F_r(s) \frac{k_{mr}}{R_r} u_{gy}^A(s)$$

$$= -k_{ACR} k_{SR} k_g k_u k_{ar} \frac{k_{mr}}{R_r} \frac{F_r(s)}{s(t_g s + 1)} [w_{irz}^r(s) \tan q_f + w_r^{SF}(s)]$$

式中， k_{ar} 和 $F_r(s)$ 分别为横滚伺服回路放大倍数和校正网络传递函数， k_{mr} 和 R_r 分别为横滚力矩电机的力矩系数和电枢回路电阻。





在该力矩作用下横滚环的伺服角速度为

$$w_r^{SF}(s) = \frac{M_{mr}(s)}{sJ_r} = -\frac{k_{ACR}k_{SR}k_gk_uk_{ar}k_{mr}}{R_rJ_r} \frac{F_r(s)}{s^2(t_g s + 1)} [w_{irz}^r(s) \tan \mathbf{q}_f + w_r^{SF}(s)]$$

记 $Y(s) = \frac{k_{ACR}k_{SR}k_gk_uk_{ar}k_{mr}}{R_rJ_r} \frac{F_r(s)}{s^2(t_g s + 1)}$

5.3.1 三轴平台的稳定回路工作原理-几何稳定状态



2. 对基座角运动的隔离原理

$$w_r^{SF}(s) = -\frac{Y(s)w_{irz}^r(s) \tan q_f}{1 + Y(s)}$$

假设 w_{irz}^r 为常值，则平台系统达到稳态时

$$w_{rss}^{SF} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w_r^{SF}(s) = -w_{irz}^r \tan q_f$$

由图知，该伺服角速度在俯仰环的 y_f 轴上的分量为

$$(w_{rss}^{SF})_{y_f} = w_{rss}^{SF} \cos q_f = -w_{irz}^r \sin q_f$$

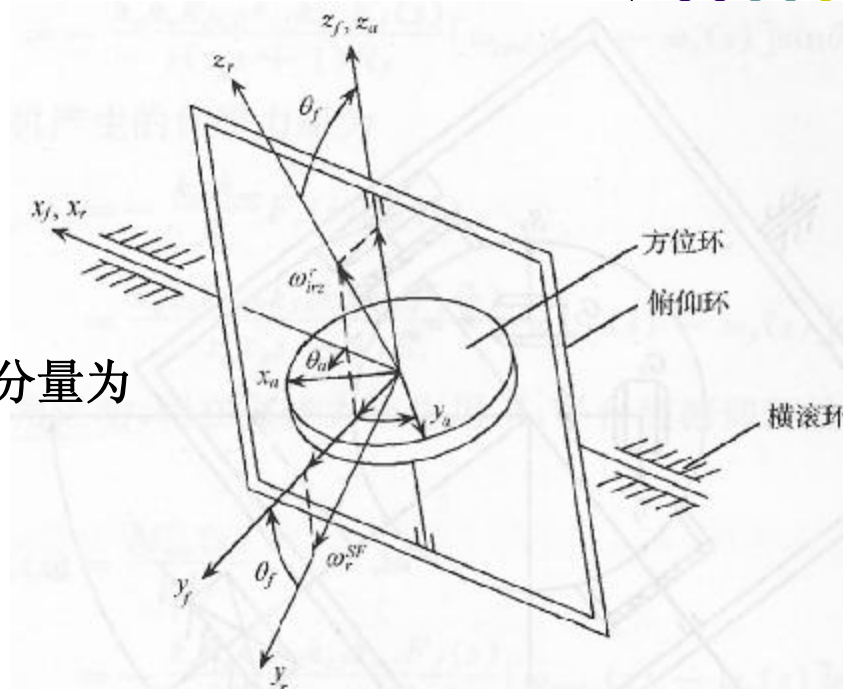
所以，俯仰环绕 y_f 轴的旋转角速度为

$$w_{fy}^f = w_{y_f}^f(w_{ib}) + (w_{rss}^{SF})_{y_f}$$

$$w_{fy}^f = w_{irz}^r \sin q_f - w_{irz}^r \sin q_f = 0$$

由几何约束关系，平台台体（方位环）绕俯仰环 y_f 轴的旋转角速度应与 w_{fy}^f 相等，也为零。

可知，由几何约束引起的基座角速度耦合是依靠伺服回路产生的伺服角速度对消的。



$$w_{y_f}^f(w_{ib}) = w_{irz}^r \sin q_f$$

$$w_r^{SF}(s) = \frac{M_{mr}(s)}{sJ_r} = \frac{k_{ACR}k_{SR}k_gk_uk_{ar}k_{mr}}{R_rJ_r} \frac{F_r(s)}{s^2(t_g s + 1)} Y(s) [w_{irz}^r(s) \tan q_f + w_r^{SF}(s)]$$



5.3.1 三轴平台的稳定回路工作原理-几何稳定状态



2. 对基座角运动的隔离原理

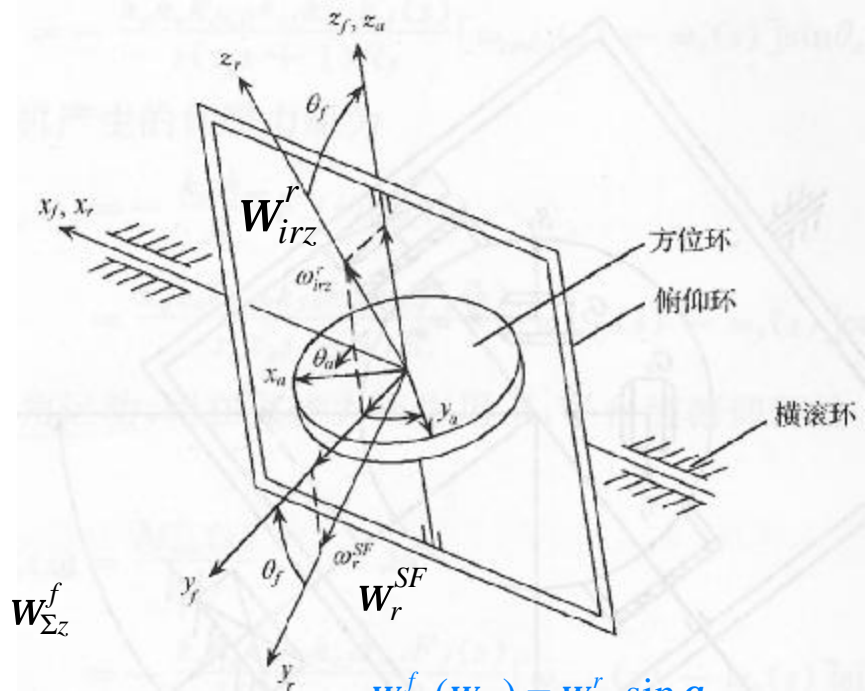
由基座角速度和伺服角速度引起俯仰环沿 z_f 轴方向的角速度为

$$W_{\Sigma z}^f = W_{irz}^r \cos q_f - W_r^{SF} \sin q_f$$

$$\begin{aligned} W_{\Sigma z}^f &= W_{irz}^r (\cos q_f + \tan q_f \sin q_f) = \frac{W_{irz}^r}{\cos q_f} \\ &= (W_{ibx}^b \sin q_r + W_{ibz}^b \cos q_r) \sec q_f \end{aligned}$$

由于平台台体仅跟踪指令角速度旋转，所以 $W_{\Sigma z}^f$

引起平台台体方位轴与轴承（轴承固联在俯仰环上）之间的相对转动而产生摩擦力矩，此摩擦力矩将由方位环稳定回路产生的卸荷力矩对消掉。



$$W_{y_f}^f (W_{ib}) = W_{irz}^r \sin q_f$$

$$W_{irz}^r = W_{ibx}^b \sin q_r + W_{ibz}^b \cos q_r$$

$$W_{rSS}^{SF} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot W_r^{SF}(s) = -W_{irz}^r \tan q_f$$



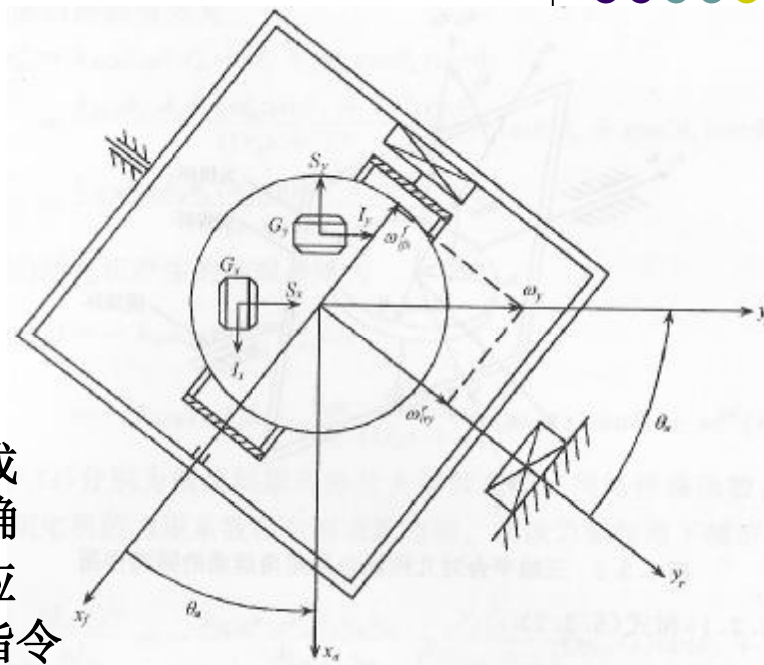


5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理-空间积分状态

设平台的指令角速度为

$$W_{cmd}^a = \begin{bmatrix} 0 \\ W_{cmdy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

在伺服回路作用下平台的进动角速度为 w_y 。为使分析过程简化，此处只讨论 $q_f = 0$ 和方位环架角为 q_a 的情况，平台采用积分陀螺作为敏感器件，如图所示。



系统工作时，将指令角速度换算成施矩电流，馈入 G_y 陀螺的力矩器，电流方向的确 定原则是：当 w_{cmdy} 为正时，馈入力矩电流后，应 使 G_y 陀螺产生负向输出角，即陀螺输出角 s_c 与指令 角速度反号：

$$\frac{S_c(s)}{W_{cmdy}(s)} = -\frac{k_g}{s(t_g s + 1)}$$

由于伺服回路作用，平台产生进动角速度 w_y ，而该角速度 G_y 陀螺能感测到。 设对应于 w_y 的陀螺 G_y 的输出角为 s_i ，则根据式 (2.3.6) p27

$$\frac{S_i(s)}{W_y(s)} = \frac{k_g}{s(t_g s + 1)}$$

所以 G_y 陀螺的输出角为

$$S(s) = S_c(s) + S_i(s) = -\frac{k_g}{s(t_g s + 1)} [W_{cmdy}(s) - W_y(s)]$$





5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理-空间积分状态

G_y 陀螺的信号器输出为 $u_{gy}^a(s) = -\frac{k_g k_u}{s(t_g s + 1)} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)]$

由于 G_x 陀螺指令角速度为零, 所以 $u_{gx}^a(s) = 0$
经方位坐标分解和俯仰正割分解后, 输入俯仰伺服放大器的电压信号为

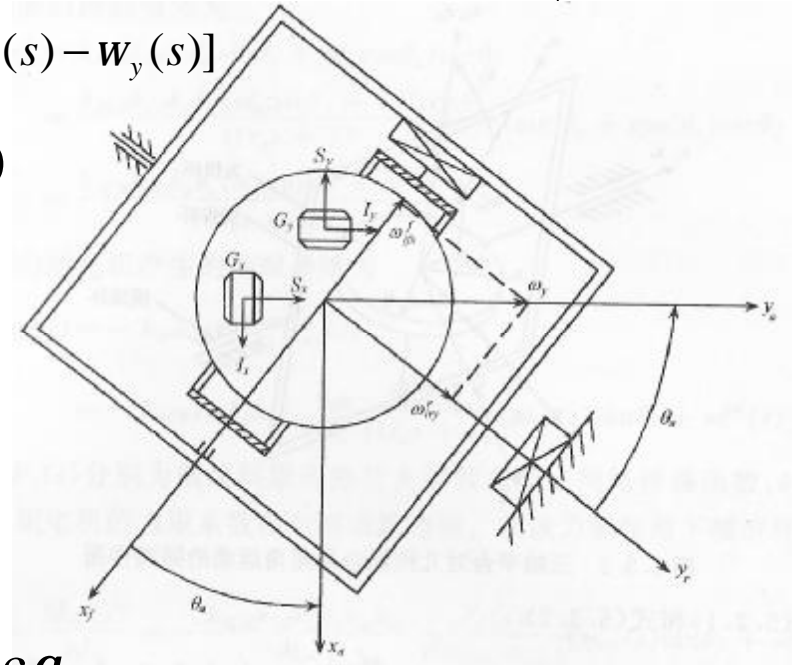
$$\begin{aligned} u_{gx}^A(s) &= k_{ACR} [u_{gx}^a(s) \cos q_a - u_{gy}^a(s) \sin q_a] \\ &= \frac{k_g k_u k_{ACR}}{s(t_g s + 1)} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \sin q_a \end{aligned}$$

输入横滚伺服放大器的电压信号为

$$\begin{aligned} u_{gy}^A(s) &= k_{ACR} k_{SR} [u_{gx}^a(s) \sin q_a + u_{gy}^a(s) \cos q_a] \sec q_f \\ &= -\frac{k_g k_u k_{ACR} k_{SR}}{s(t_g s + 1)} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \cos q_a \end{aligned}$$

上述信号经放大校正后, 分别馈入俯仰力矩电机和横滚力矩电机, 俯仰力矩电机产生的伺服力矩为

$$\begin{aligned} M_{mx}^f(s) &= -\frac{k_{af} k_{mf}}{R_f} F_f(s) u_{gx}^A(s) \\ &= -\frac{k_g k_u k_{ACR} k_{af} k_{mf} F_f(s)}{s(t_g s + 1) R_f} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \sin q_a \end{aligned}$$





5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理-空间积分状态

横滚力矩电机产生的伺服力矩为

$$M_{my}^r(s) = -\frac{k_{ar}k_{mr}}{R_r} F_r(s) u_{gy}^A(s)$$

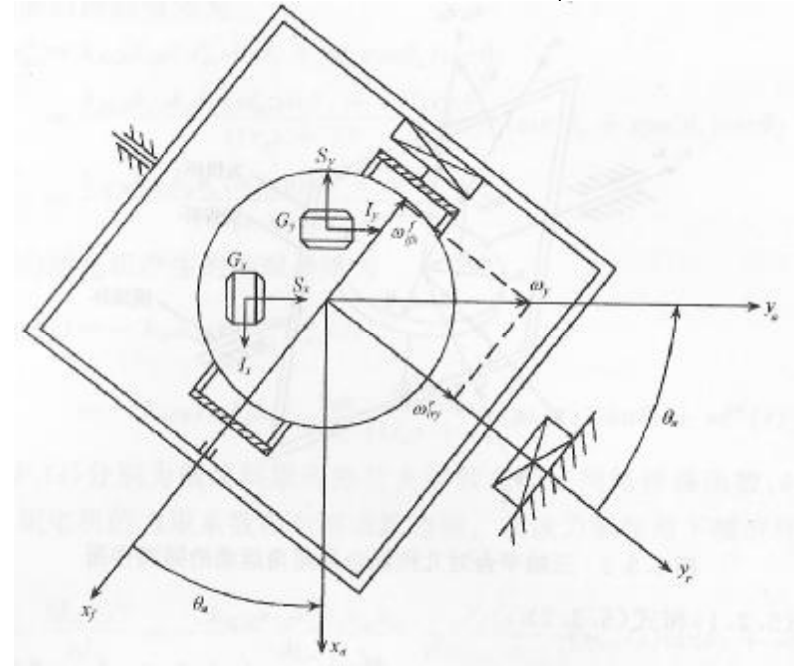
$$= \frac{k_g k_u k_{ACR} k_{SR} k_{ar} k_{mr} F_r(s)}{s(t_g s + 1) R_r} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \cos q_a$$

假设基座无角运动，则在上述力矩作用下，平台绕俯仰环轴 x_f 和横滚环轴 y_r 的角速度为

$$w_{ifx}^f(s) = \frac{M_{mx}^f(s)}{s J_f}$$

$$= -\frac{k_g k_u k_{ACR} k_{af} k_{mf} F_f(s)}{s^2 (t_g s + 1) R_f J_f} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \sin q_a$$

$$w_{iry}^r(s) = \frac{M_{my}^r(s)}{s J_r} = \frac{k_g k_u k_{ACR} k_{SR} k_{ar} k_{mr} F_r(s)}{s^2 (t_g s + 1) R_f J_f} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \cos q_a$$



而 w_y 是 w_{ifx}^f 和 w_{iry}^r 合成的结果，

$$w_y(s) = \sqrt{[w_{ifx}^f(s)]^2 + [w_{iry}^r(s)]^2}$$

$$= \frac{k_g k_u k_{ACR}}{s^2 (t_g s + 1)} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \left\{ \left[\frac{k_{af} k_{mf} F_f(s) \sin q_a}{R_f J_f} \right]^2 + \left[\frac{k_{SR} k_{ar} k_{mr} F_r(s) \cos q_a}{R_r J_r} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理-空间积分状态



设 w_y 与横滚轴间的夹角为 q'_a ，则

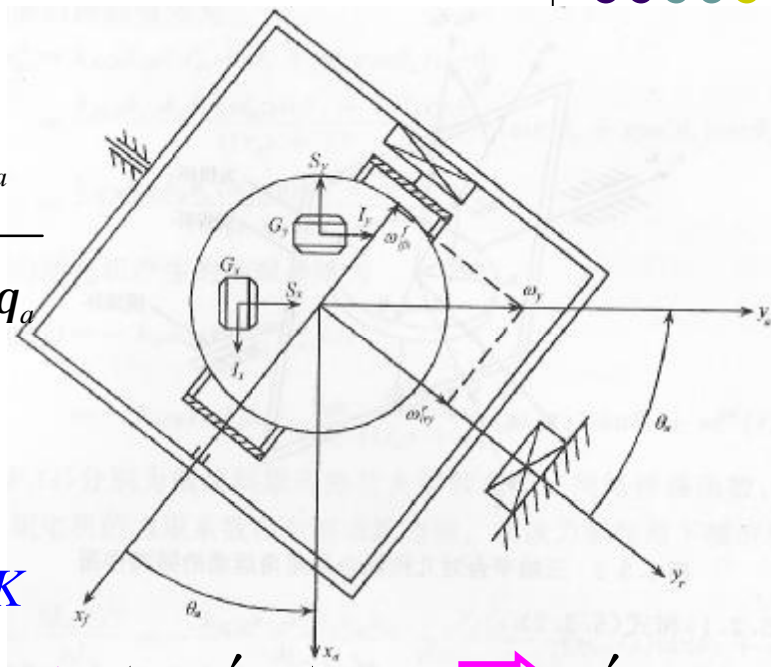
$$\tan q'_a = \frac{\frac{k_g k_u k_{ACR} k_{af} k_{mf} F_f(s)}{s^2(t_g s + 1) R_f J_f} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \sin q_a}{\frac{k_g k_u k_{ACR} k_{SR} k_{ar} k_{mr} F_r(s)}{s^2(t_g s + 1) R_r J_r} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)] \cos q_a}$$

$$= \frac{\frac{k_{af} k_{mf} F_f(s)}{R_f J_f}}{\frac{k_{SR} k_{ar} k_{mr} F_r(s)}{R_r J_r}} \tan q_a$$

如果在设计中取

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{af} k_{mf}}{R_f J_f} = \frac{k_{SR} k_{ar} k_{mr}}{R_r J_r} = K \\ F_f(s) = F_r(s) = F(s) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tan q'_a = \tan q_a \Rightarrow q'_a = q_a$$



$$w_y(s) = \frac{k_g k_u k_{ACR}}{s^2(t_g s + 1)} K F(s) (\sin^2 q_a + \cos^2 q_a)^{\frac{1}{2}} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)]$$

$$\text{令 } K_\Sigma = k_g k_u k_{ACR} K$$

$$w_y(s) = \frac{K_\Sigma F(s)}{s^2(t_g s + 1)} [w_{cmdy}(s) - w_y(s)]$$

$$w_y(s) = \frac{\frac{K_\Sigma F(s)}{s^2(t_g s + 1)}}{1 + \frac{K_\Sigma F(s)}{s^2(t_g s + 1)}} w_{cmdy}(s) = \frac{K_\Sigma F(s)}{s^2(t_g s + 1) + K_\Sigma F(s)} w_{cmdy}(s)$$

5.3.2 三轴平台的修正回路工作原理-空间积分状态



设 ω_y 与横滚轴间的夹角为 q'_a ，则

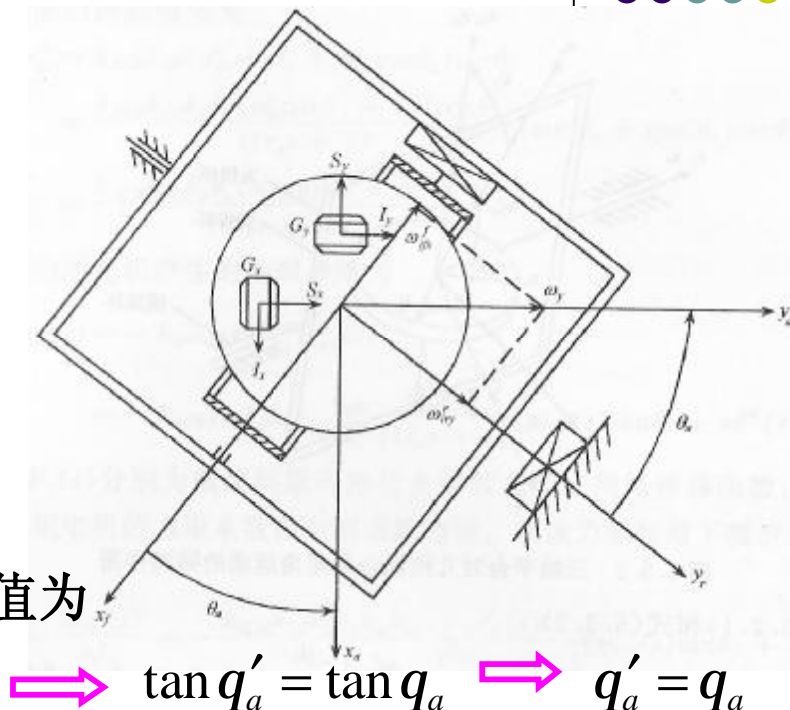
如果在设计中取

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{af}k_{mf}}{R_f J_f} = \frac{k_{SR}k_{ar}k_{mr}}{R_r J_r} = K \\ F_f(s) = F_r(s) = F(s) \end{array} \right.$$

对于常值指令角速度，

$$W_{cmdy}(s) = \frac{W_{cmdy}}{s}, \text{ 平台进动角速度的稳态值为}$$

$$W_{yss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot W_y(s) = W_{cmdy}$$



上述分析说明，只要平台设计中满足式，平台就能准确跟踪指令角速度。

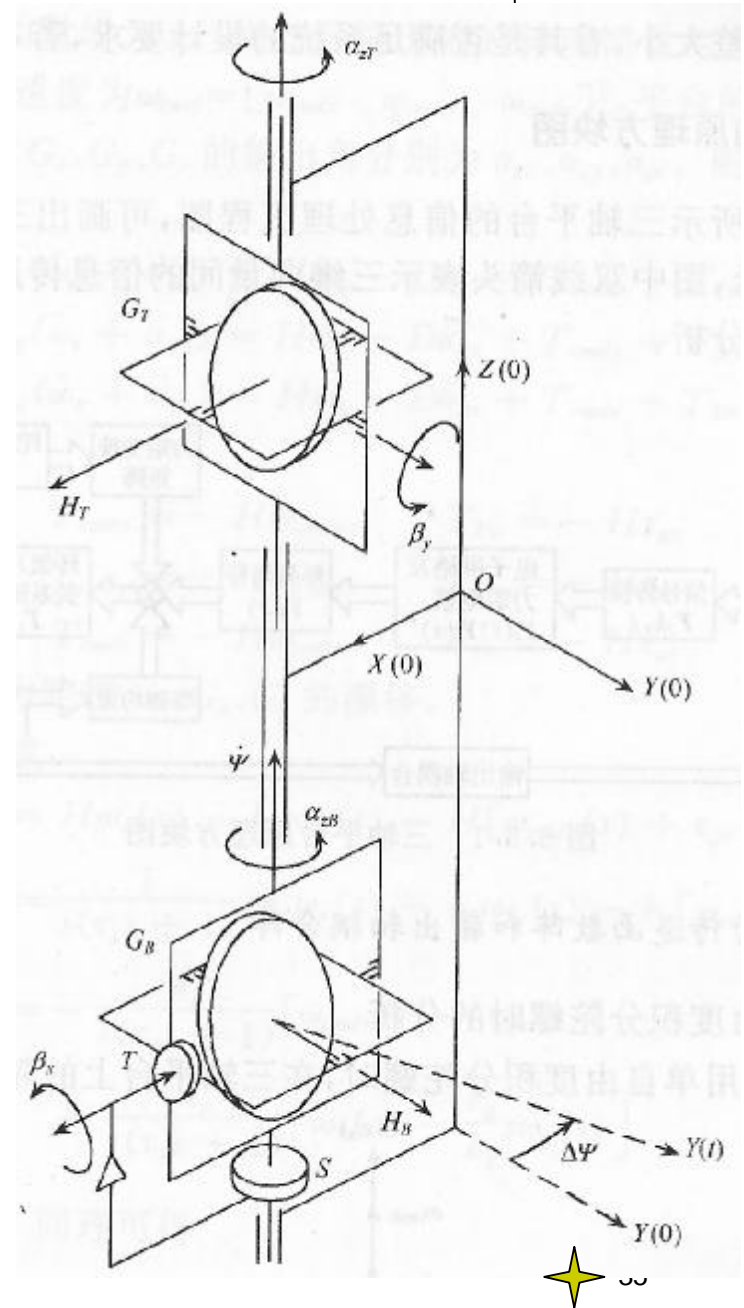


5.4 三轴平台的方位锁定原理

当三轴平台使用**双自由度陀螺仪**作为敏感器件时，需要两个陀螺仪。

而双自由度陀螺仪有两个敏感轴，控制三轴平台时有一个敏感轴冗余。这个冗余轴必须控制住使之随平台一起旋转，即陀螺在该轴上的信号器输出经放大后馈入控制该轴的力矩器中，使陀螺在该轴上形成闭环，工作在**力反馈状态**。

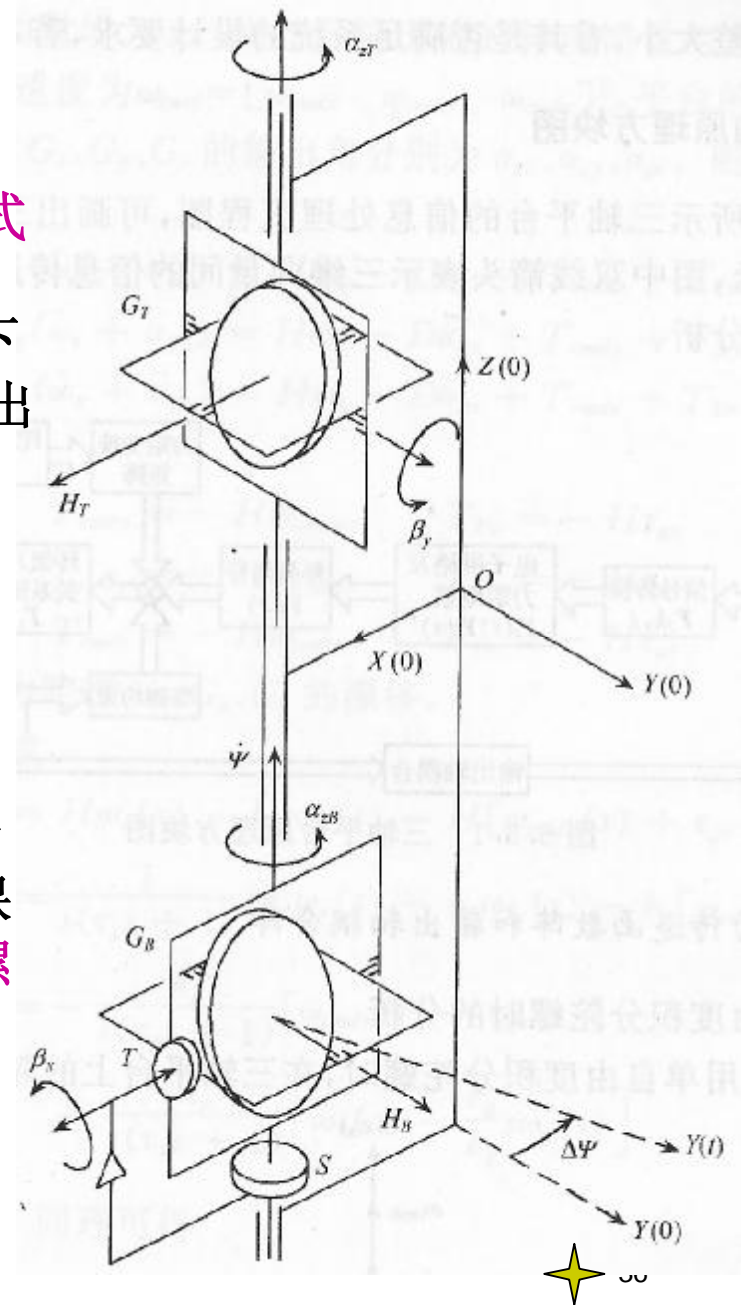
如果该轴与平台的伺服回路未形成闭环而处于自由状态，由于陀螺的**定轴性**，台体旋转但转子轴未转动，则这种相对转动有可能使陀螺和止档装置发生碰撞影响正常工作，甚至会损坏陀螺。



5.4 三轴平台的方位锁定原理

右图为双自由度陀螺仪在三轴平台上的哑铃式配置示意图，其中上陀螺 G_T 的输出角 β_y 用来控制平台的Y轴， α_{zT} 用来控制平台的Z轴；下陀螺 G_B 的输出角 β_x 用来控制平台的X轴，输出角 α_{zB} 冗余。

设平台在指令控制下方位改变 $\Delta\psi$ ，若下陀螺 G_B 的外环轴不作控制，则由于陀螺的定轴性， H_B 仍然指向 $Y(0)$ ，而平台的方位环已转至 $Y(t)$ ，下陀螺的外环有可能与固联在方位环上的限位装置相碰而损坏陀螺。如果 H_B 随Y轴一起进动，则陀螺外环相对平台方位环的位置保持不变，就不会发生碰撞。因此必须使下陀螺的外环轴处于锁定状态，具体做法是：



5.4 三轴平台的方位锁定原理

具体做法是：

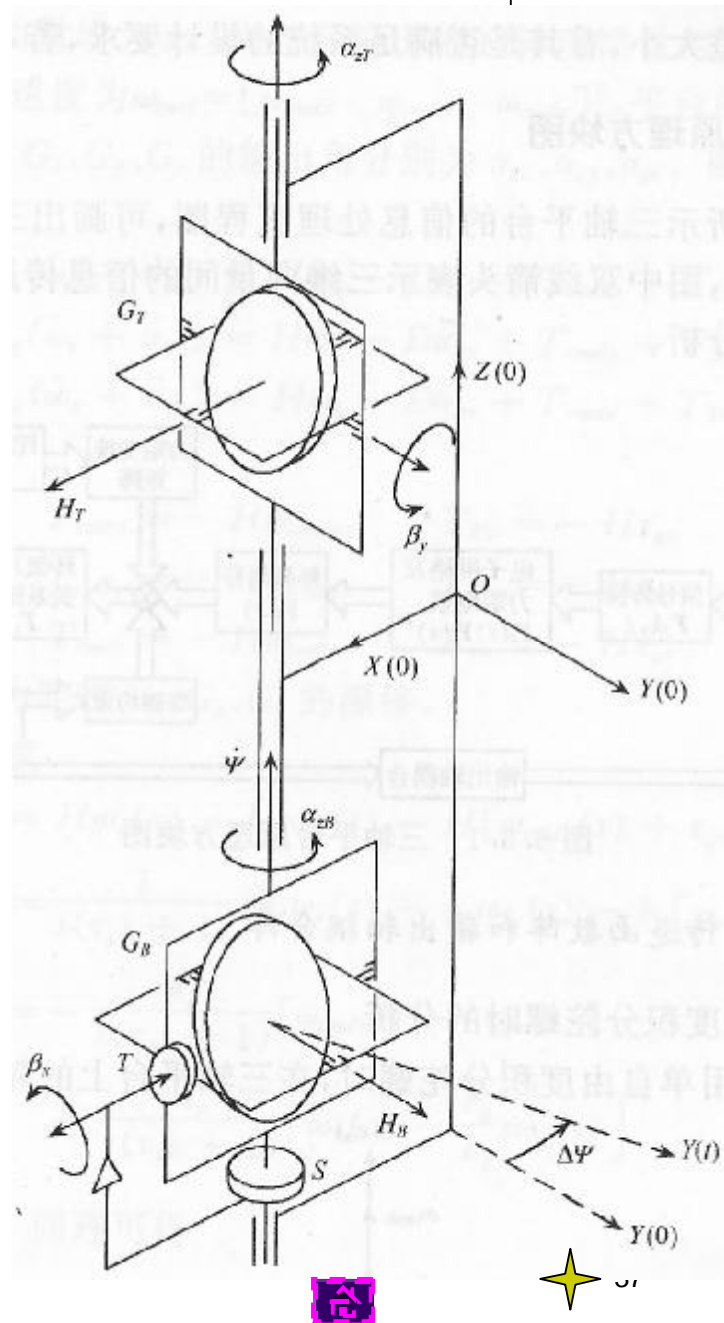
下陀螺 G_B 外环轴上的信号器输出经放大后
馈入 G_B 内环轴上的力矩器中，在该锁定力
矩作用下 G_B 的转子绕外环轴进动，进动角
速度与航向角变化率 $\dot{\psi}$ 相同，

这样就实现了下陀螺在方位上的锁定。

选择锁哪根轴？

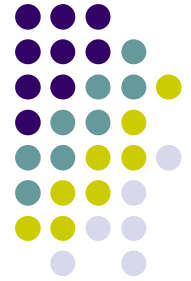
从上述分析可看出，**锁定实质是使陀螺处于力反馈工作状态**，跟随的角速度越大，加入力矩器中的锁定电流就越大，但锁定电流受力矩器的承载能力限制，锁定电流是不能太大的。诸如飞机、火箭、舰艇等运载体的俯仰角速度和横滚角速度都比航向变化率大，所以三轴平台中，被**锁定的轴一般应选择方位轴**，即采用方位锁定来解决一个敏感轴的冗余问题。

锁定角速度小的那根轴！





丨 谢谢！



- | 5.5三轴平台的动力学方程和系统的传递函数阵
- | 5.5.1三轴平台的原理方块图
- | 1.陀螺组件的传递函数阵和输出轴耦合阵
- | 2.伺服放大器（平台电子网络）的传递函数阵
- | 3.力矩电机的传递函数矩阵
- | 4.环架系统的传递函数矩阵

惯性导航系统原理

程向红

2010.05

第二篇 陀螺稳定平台



陀螺具有定轴性和进动性.

具有**1)**相对惯性空间指向保持不变的能力和**2)**按照要求的规律相对惯性空间旋转的能力,因此可利用陀螺来控制被控对象的角运动.

控制角运动包含**2**个含义:

一是隔离运载体的角运动对被控对象的角运动的影响,例如船舶上的同步卫星接收天线,当船舶受风浪作用而摇晃时,天线能始终指向同步卫星;

二是能使被控对象按指令即要求的规律旋转,指向始终跟踪变动着的方向,例如监测火箭发射的地面光学跟踪系统,光轴始终跟踪观察点与火箭的连线,而该连线的指向在不断地变化着.





陀螺稳定平台 惯性平台

以陀螺为敏感元件,能隔离基座的角运动并能使被控对象按指令旋转的机电控制系统.

如平台式惯导系统中使用的稳定平台,要求精确模拟惯导系统所采用的导航坐标系,精度要求达到角分级甚至角秒级,此类平台习惯上称之为惯性平台.

又如天线、炮塔等稳定系统,被控对象体积和重量都十分庞大,精度要求不必像惯性平台那样高,控制的旋转轴也可能少于三轴,此类稳定平台习惯上称之为陀螺稳定装置.

■ 陀螺稳定平台的2个基本功能: 区别: 1精度2体积3稳定的轴的数量

1) 稳定功能,即对外界干扰起对消作用,如基座角运动是一种外界干扰,在稳定平台与基座的轴承连接处将引起摩擦力矩作用在平台上,或由于几何约束关系台体被强制带动跟随基座一起旋转,稳定平台能自动产生卸荷力矩对消摩擦力矩,同时能产生适当的反旋转对消被基座带动的强制旋转;

2) 跟踪功能,即能跟踪指令,按要求的角速度旋转,确保平台的坐标轴指向要求的方位.

第四章 陀螺稳定平台工作原理

- 4.1 各类稳定平台简介
- 4.1.1 直接式陀螺稳定平台
- 4.1.2 间接式陀螺稳定平台
- 4.1.3 动力式陀螺稳定平台
- 4.1.4 指示式陀螺稳定平台
- 4.1.5 用速率陀螺仪构成的稳定平台



4.1 各类稳定平台简介

陀螺稳定平台的稳定作用之一是平台能自动产生卸荷力矩抵消干扰力矩。

卸荷力矩由两类不同的力矩组成：

- 1) 由固联在台体上的陀螺产生的陀螺力矩；
- 2) 由平台的伺服回路产生的伺服力矩。

按两类力矩在卸荷力矩中所起作用的不同,对陀螺稳定平台分类:

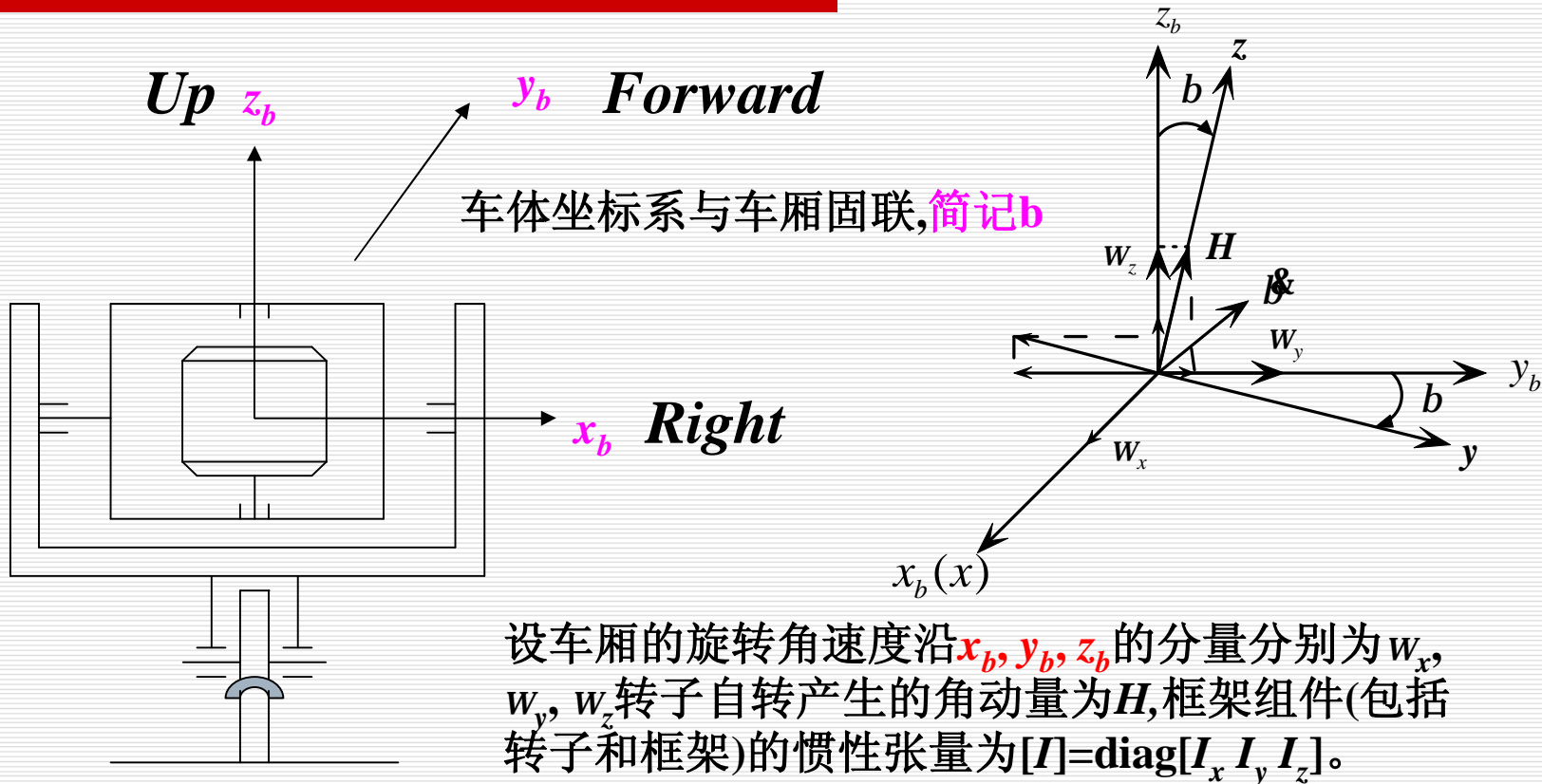
- (1) 直接式陀螺稳定平台。
- (2) 间接式陀螺稳定平台。
- (3) 动力式陀螺稳定平台。
- (4) 指示式陀螺稳定平台。
- (5) 指示-动力式陀螺稳定平台。

下面实例分析 



直接式陀螺稳定平台 单轨列车设计方案

(1) 干扰力矩全部由陀螺力矩对消的稳定平台。



xyz 为陀螺框架坐标系, 简记为**G**, 相对车体坐标系统 x_b 有偏角 β 。

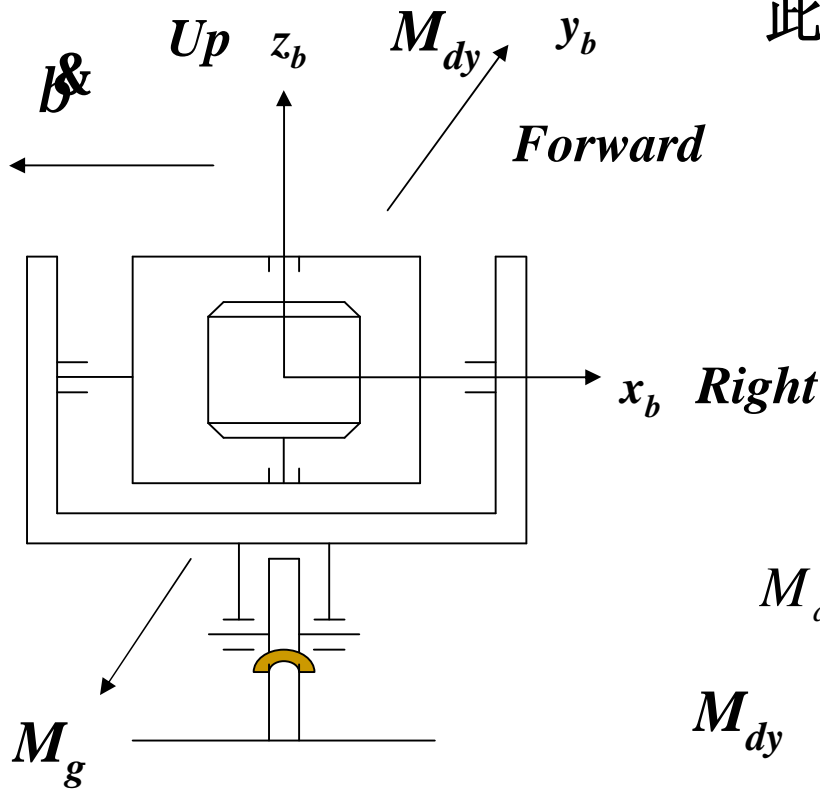
该陀螺稳定系统, 倾倒地矩的对消过程为:
 在倾倒地矩 M_{dy} (假设沿列车向前, 即图中穿入纸面方向) 作用下,

陀螺发生进动, 引起的进动角速度 $\dot{\psi}$ 向左, 即 x_b 负方向,

此进动角速度引起陀螺力矩

$$M_g = H \times \dot{\psi}$$

M_g 方向沿列车后向, 即图中穿出纸面方向, 因此陀螺力矩对倾倒地矩直接起到了对消作用.



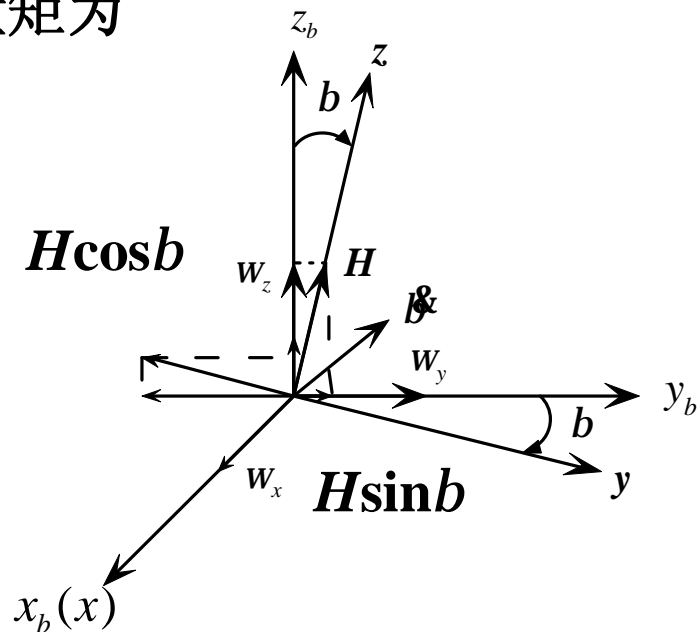
$$M_{dy} = \dot{\psi} \times H$$

$$M_{dy} \longrightarrow \dot{\psi} \longrightarrow M_g = H \times \dot{\psi}$$



以**框架组件**为分析对象,框架组件的总动量矩为

$$\begin{aligned}
 H_G^b &= H^b + [I](w_{ib}^b + w_{bG}^b) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ H \sin b \\ H \cos b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x - \dot{b} \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I_x(w_x - \dot{b}) \\ H \sin b + I_y w_y \\ H \cos b + I_z w_z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



根据**动量矩定理**,并应用**哥氏定理**,得

$$\left. \frac{dH_G}{dt} \right|_b + w_{ib}^b \times H_G^b = M^b$$

$$\begin{bmatrix} I_x(\dot{w}_x - \ddot{b}) \\ H \dot{b} \cos b + I_y \dot{w}_y \\ -H \dot{b} \sin b + I_z \dot{w}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(w_x - \dot{b}) \\ H \sin b + I_y w_y \\ H \cos b + I_z w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^b \\ M_{dy}^b \\ M_z^b \end{bmatrix}$$



展开上式得：

$$\begin{bmatrix} I_x(\dot{\omega}_x - \dot{\beta}) \\ H\dot{\beta}\cos b + I_y\dot{\omega}_y \\ -H\dot{\beta}\sin b + I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(\omega_x - \dot{\beta}) \\ H\sin b + I_y\omega_y \\ H\cos b + I_z\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^b \\ M_{dy} \\ M_z^b \end{bmatrix}$$

$$I_x(\dot{\omega}_x - \dot{\beta}) - \omega_z(H\sin b + I_y\omega_y) + \omega_y(H\cos b + I_z\omega_z) = \underline{M_x^b}$$

$$\underline{H\dot{\beta}\cos b + I_y\dot{\omega}_y} + \omega_z I_x(\omega_x - \dot{\beta}) - \omega_x(H\cos b + I_z\omega_z) = M_{dy}$$

$$\underline{-H\dot{\beta}\sin b + I_z\dot{\omega}_z} - \omega_y I_x(\omega_x - \dot{\beta}) + \omega_x(H\sin b + I_y\omega_y) = \underline{M_z^b}$$

为便于说明问题,假设 $\omega_x = \dot{\omega}_x = \omega_z = \dot{\omega}_z = 0$

则上述三式成:

$$\left\{ \begin{array}{l} -I_x\dot{\beta} + \omega_y H\cos b = M_x^b \\ H\dot{\beta}\cos b + I_y\dot{\omega}_y = M_{dy} \\ H\dot{\beta}\sin b = -M_z^b + \omega_y I_x\dot{\beta} \end{array} \right. \begin{array}{l} H\dot{\beta}\cos b = M_{dy} - I_y\dot{\omega}_y \\ H\dot{\beta}\cos b \\ \text{形成的陀螺力矩在 } y_b \text{ 轴上的分量,由转子产生,经} \\ \text{框架轴传递,作用在车厢上,对倾倒力矩起对消作} \\ \text{用.} \end{array}$$

是由陀螺角动量 H 和进动角速度 $\dot{\beta}$

另外式知,陀螺力矩沿 z_b 轴的分量 $H\dot{\beta}\sin b$ 由车轮与导轨间的抗扭转约束力矩平衡。



直接式陀螺稳定平台的特点

(1) 只有当 $\dot{\theta} \neq 0$ 时陀螺力矩才存在, 如果倾倒地矩长时间存在, 则 b 将越来越大, 当 $b=90^\circ$ 时, $H \dot{\theta} \cos b = 0$

即陀螺力矩失去卸荷作用, 所以单轨列车实质上是一个正反馈不稳定系统, 要成为稳定系统, 必须采取措施使 $b=0$, 即在对消倾倒地矩的同时应使倾倒地角回零。

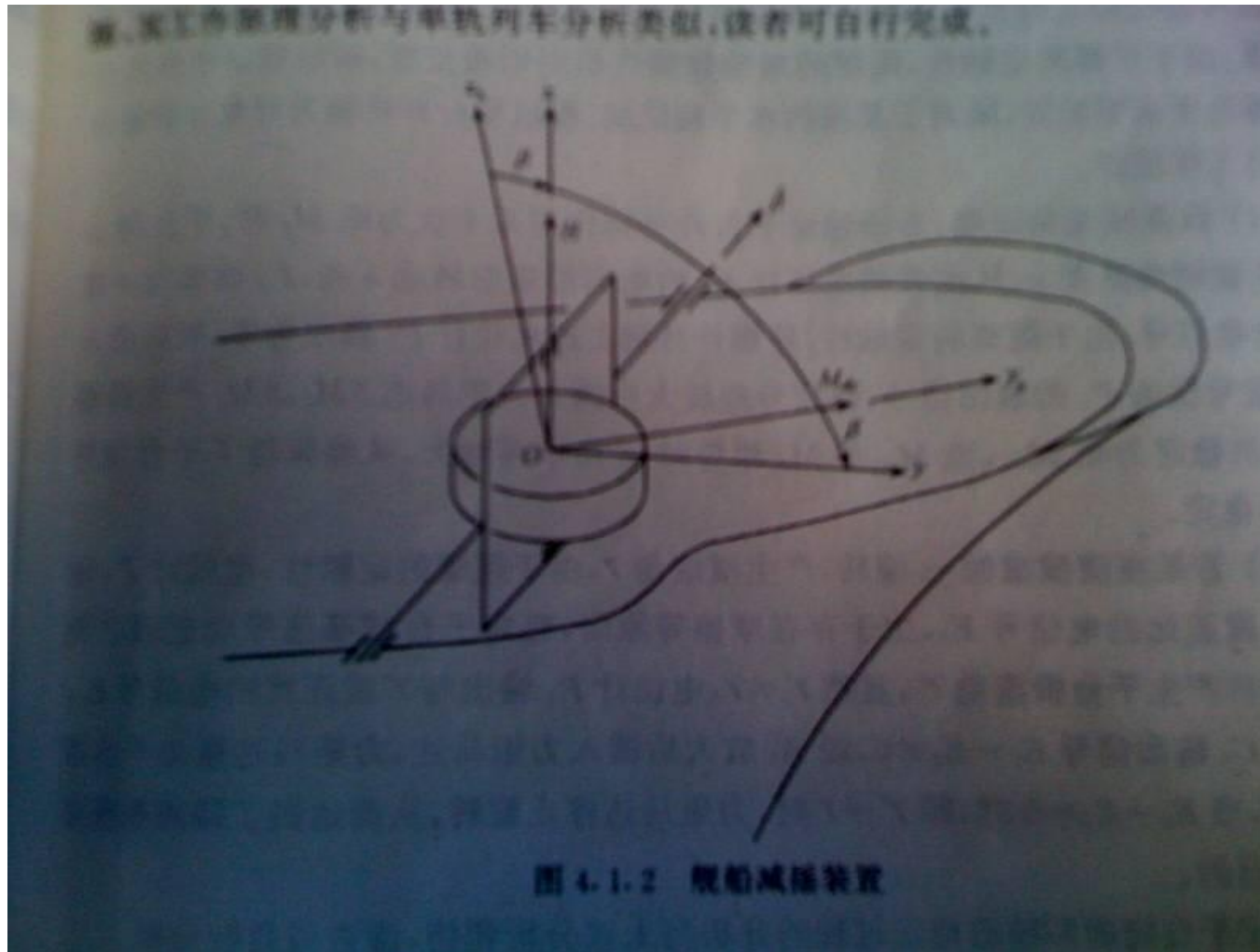
(2) 只有当角动量 H 非常巨大时才能产生足够大的陀螺力矩, 所以设施非常笨重。

单轨列车曾经一度引起过关注, 1912年曾研制出可乘坐40人的实验样车, 但由于安全因素等原因, 单轨列车并没有得到实际应用。

直接式陀螺稳定平台的另一项应用实例是舰船的减摇装置, 如图4.1.2所示, 该装置的作用是能减轻舰船的横摇, 其工作原理分析与单轨列车分析类似。



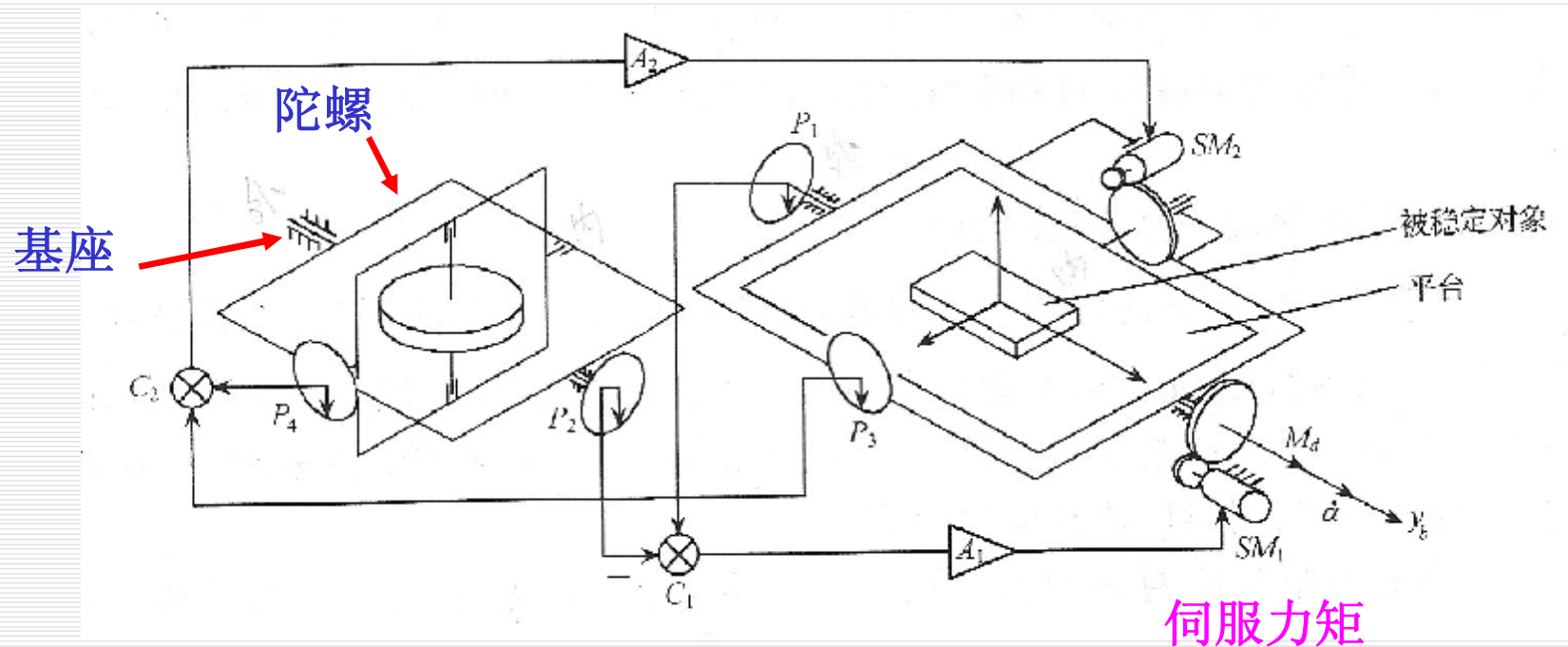
舰船的减摇装置



间接式陀螺稳定平台

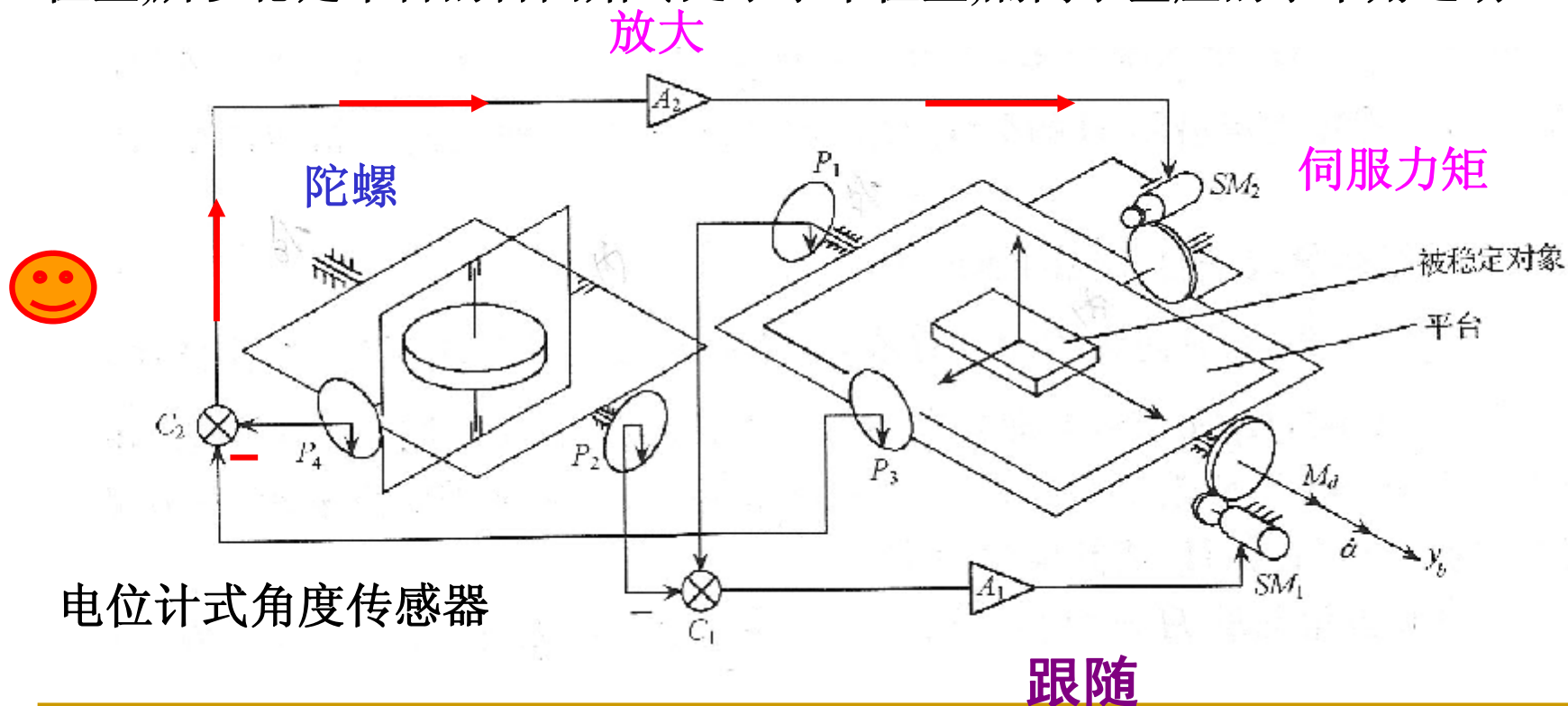
(2) 陀螺安装在基座上,陀螺感测的基座角运动信息经处理后用来控制平台,干扰力矩全部由**伺服力矩**抵消,则此类稳定平台称为间接式陀螺稳定平台.

该系统中,**垂直陀螺**作为角位置敏感元件安装在基座上,被稳定对象安装在平台台体上,台体由两个环架支承,当稳定平台和陀螺都处在中立位置时,环架轴与陀螺的框架轴对应平行.



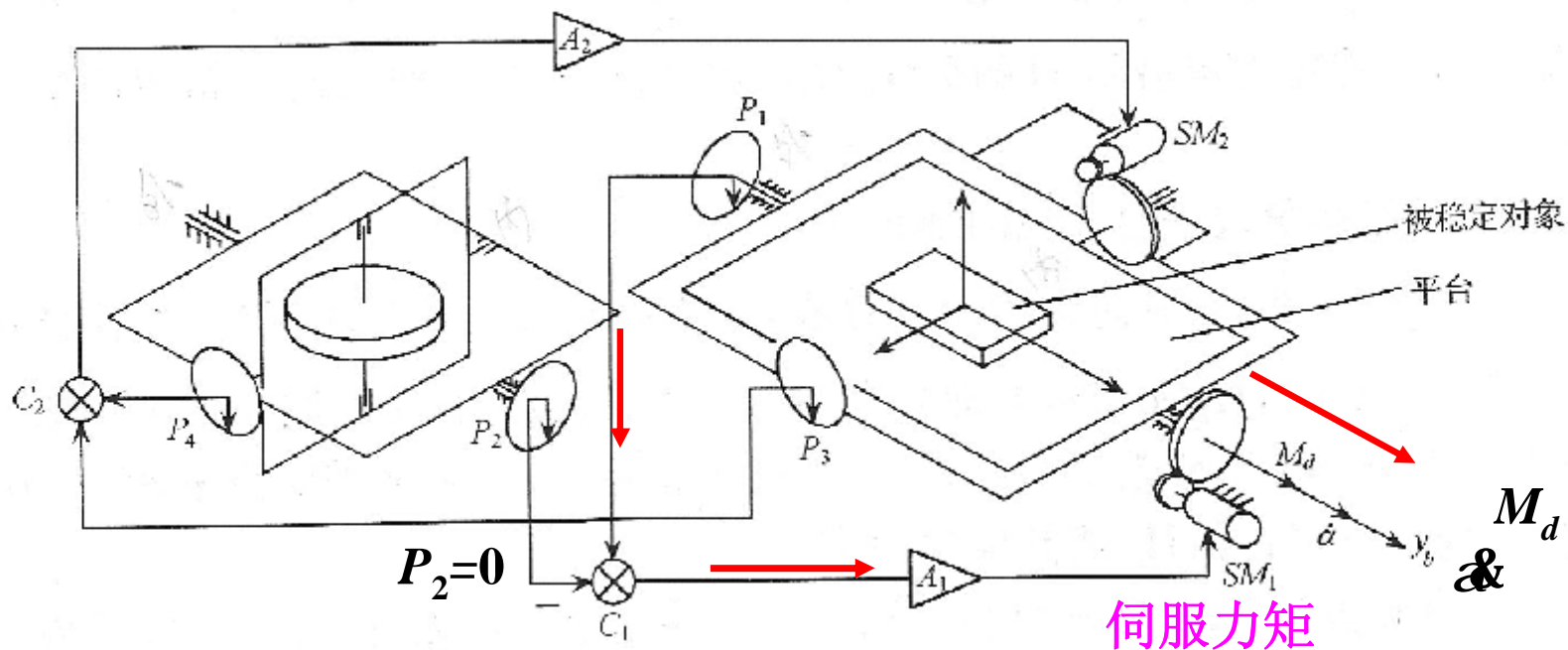
以平台外环轴为对象分析稳定平台的工作原理

陀螺的内、外框架轴上的电位计式角度传感器 P_4 和 P_2 拾取基座角位移信息,以此信息为基准信息与稳定平台相应轴上的电位计输出作**比较**,所得比较量经**放大**后馈入相应轴上的力矩马达,马达**拖动稳定平台旋转**,确保稳定平台始终**跟随**垂直陀螺,由于陀螺的定轴性,陀螺的角动量始终指向铅垂位置,所以稳定平台的台面始终处于水平位置,隔离了基座的水平角运动。



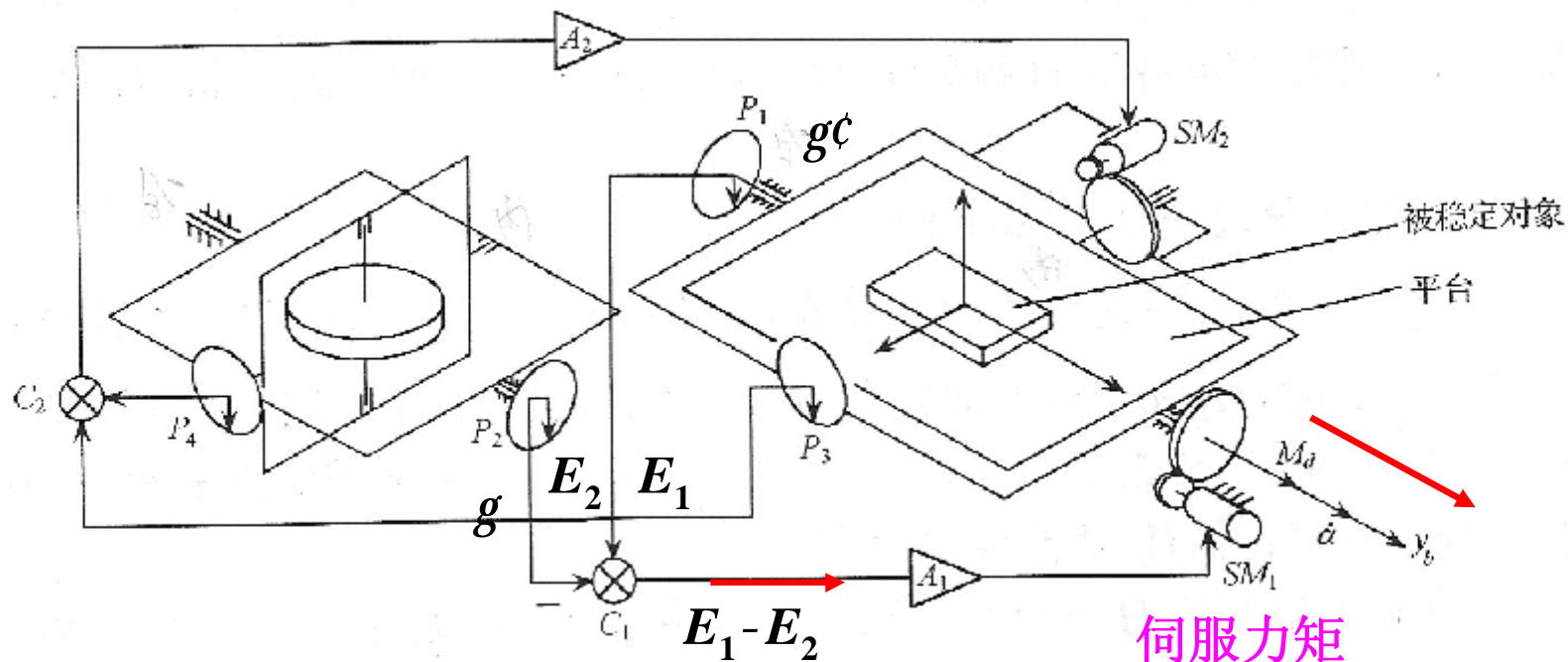
现以平台外环轴为对象分析稳定平台的工作原理.

(1) 设基座无角运动,当沿稳定平台外环轴作用有干扰力矩 M_d 时,平台绕 y_b 轴产生旋转角速度 ω



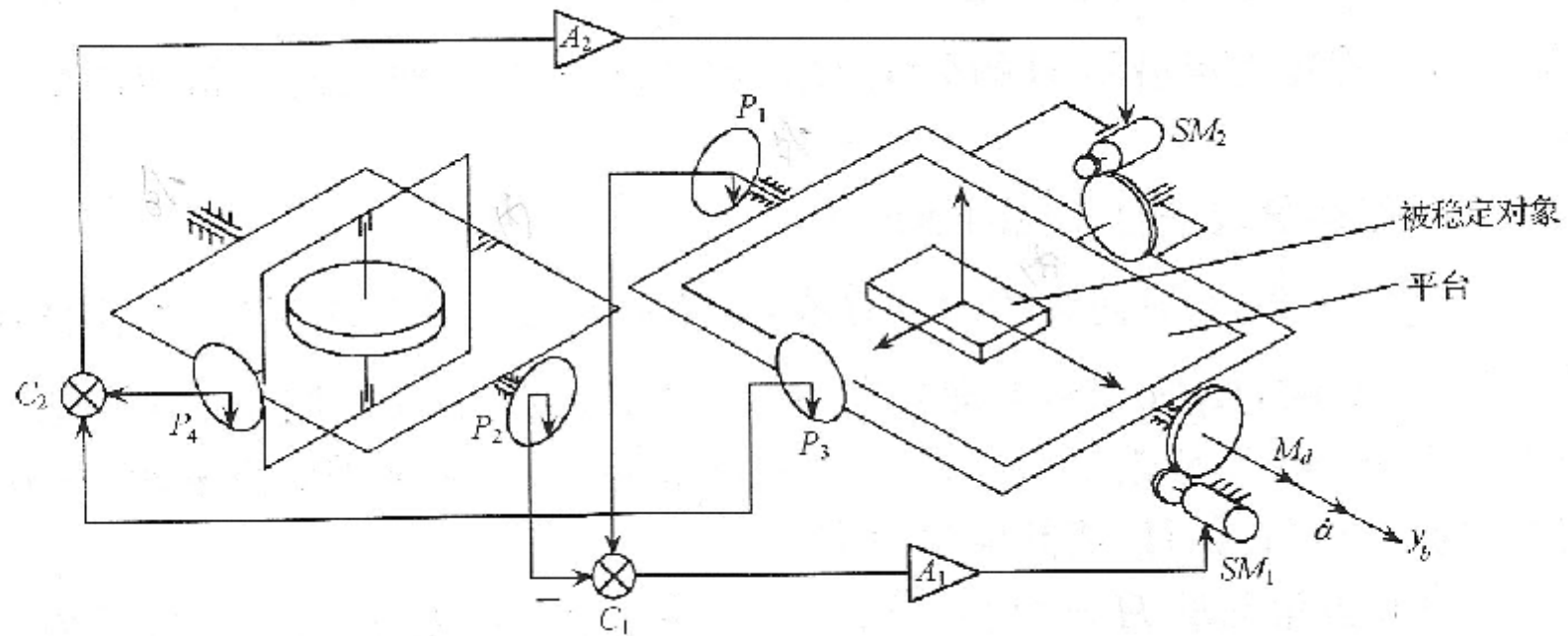
从而带动电位计 P_1 的电刷沿绕组转动 α 角, P_1 输出与 α 成比例的电信号. 由于陀螺的定轴性, 陀螺外环轴上的电位计 P_2 输出为零, 所以进入 A_1 的信号仅为 P_1 的输出信号, 该信号经放大后馈入力矩马达 SM_1 , SM_1 产生抑制 α 增大的稳定力矩 M_{m1} , 当 M_{m1} 与 M_d 相等时, α 角不再增大, 从而保持了平台绕外环轴的稳定.

以平台外环轴为对象分析稳定平台的工作原理。



(2)若基座绕横滚轴 y_b 滚转,产生横滚角 g ,由于陀螺的定轴性,电位计 P_2 输出与 g 成正比的电信号 E_2 ,由于存在摩擦等原因,稳定平台被基座带动也随之绕 y_b 轴旋转产生平台横滚角 $g\zeta$ 显然 $g\zeta \neq g$,电位计 P_1 输出与 $g\zeta$ 成正比的电信号 E_1 ,比较点 C_1 输出信号 $E_1 - E_2 \neq 0$,经 A_1 放大后馈入力矩马达,力矩马达拖动平台绕 y_b 旋转,当 $E_1 - E_2 = 0$ 时,力矩马达停止旋转,从而达到了隔离基座角运动的目的。

间接式陀螺稳定平台的特点



间接式陀螺稳定平台在工程中的应用是很广泛的,其最大优点是不同的被稳定对象可共用一个信息参考基准,这对降低成本,减少重量和体积是十分有利的.但这类稳定平台达到的精度一般都不高,图示双轴水平稳定平台,其精度很难达到 0.2° .



动力式陀螺稳定平台

 陀螺力矩只是在平台系统的过渡过程中参与对消干扰力矩,当平台系统达到稳态后,干扰力矩全部由伺服力矩对消,则此类稳定平台称为动力式陀螺稳定平台.

动力式陀螺稳定平台是工程上最常用的一类系统,这类平台可以是单轴的、双轴的和三轴的.

前苏联的AЛ-15型自动驾驶仪的航向稳定器可将重量和转动惯量很大的轰炸瞄准具稳定在一定航向上; И GB型双轴动力式陀螺平台可以给飞机上众多设备提供飞机的姿态角信息; AЛ-15型自动驾驶仪中使用了一个三轴动力式陀螺稳定平台,它可以作为飞机偏航角、姿态角的角度传感器.

此外,动力式陀螺稳定平台也可用于坦克火炮的稳定,航空摄像机和雷达天线稳定等.

无论是双轴的还是三轴的动力式陀螺稳定平台,它们的工作原理、系统设计都以单轴稳定平台为基础.

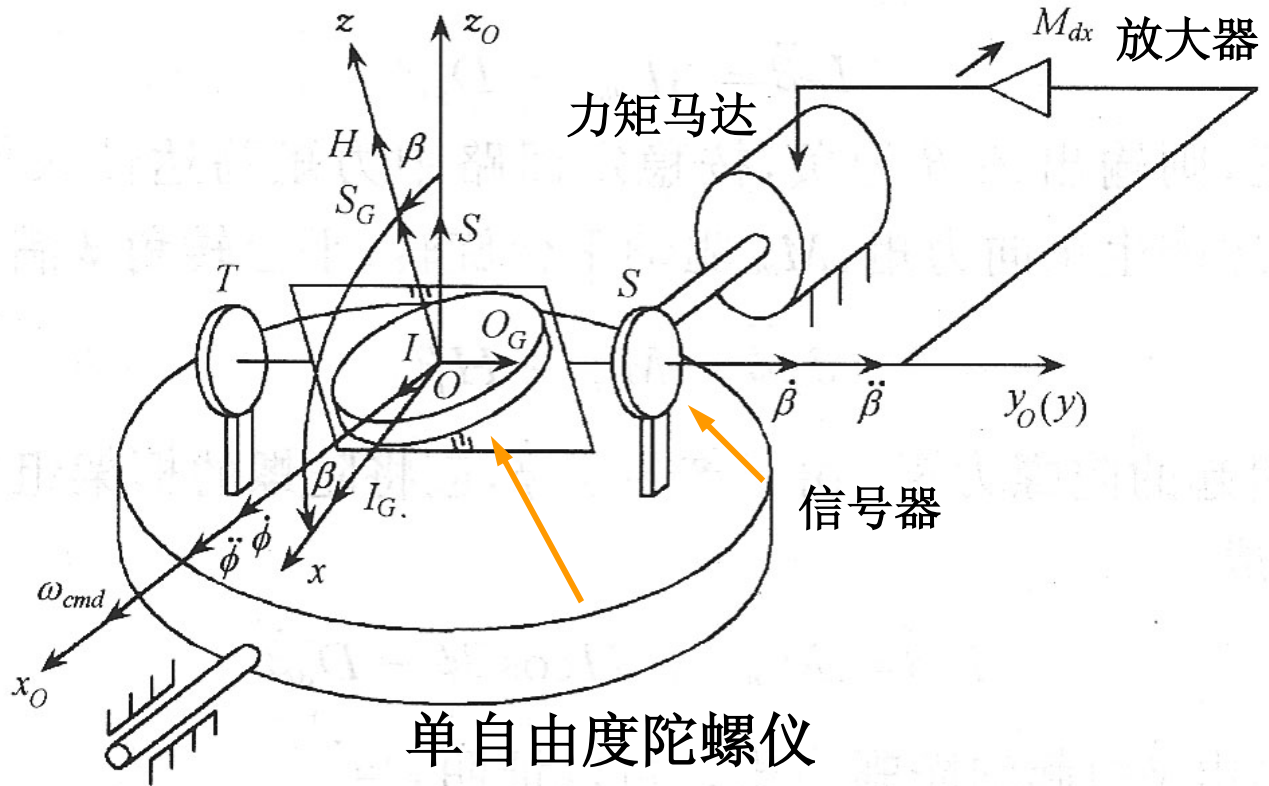


动力式陀螺稳定平台——单轴动力式陀螺稳定平台

组成

台体上安装了1个单自由度陀螺仪,陀螺仪信号器输出经放大后馈入力矩马达,马达带动平台旋转.

该稳定平台可理解成带有稳定回路的双自由度陀螺仪,陀螺的外环轴为稳定轴,稳定回路由内环轴上的信号器、放大器、力矩马达和齿轮减速器组成.

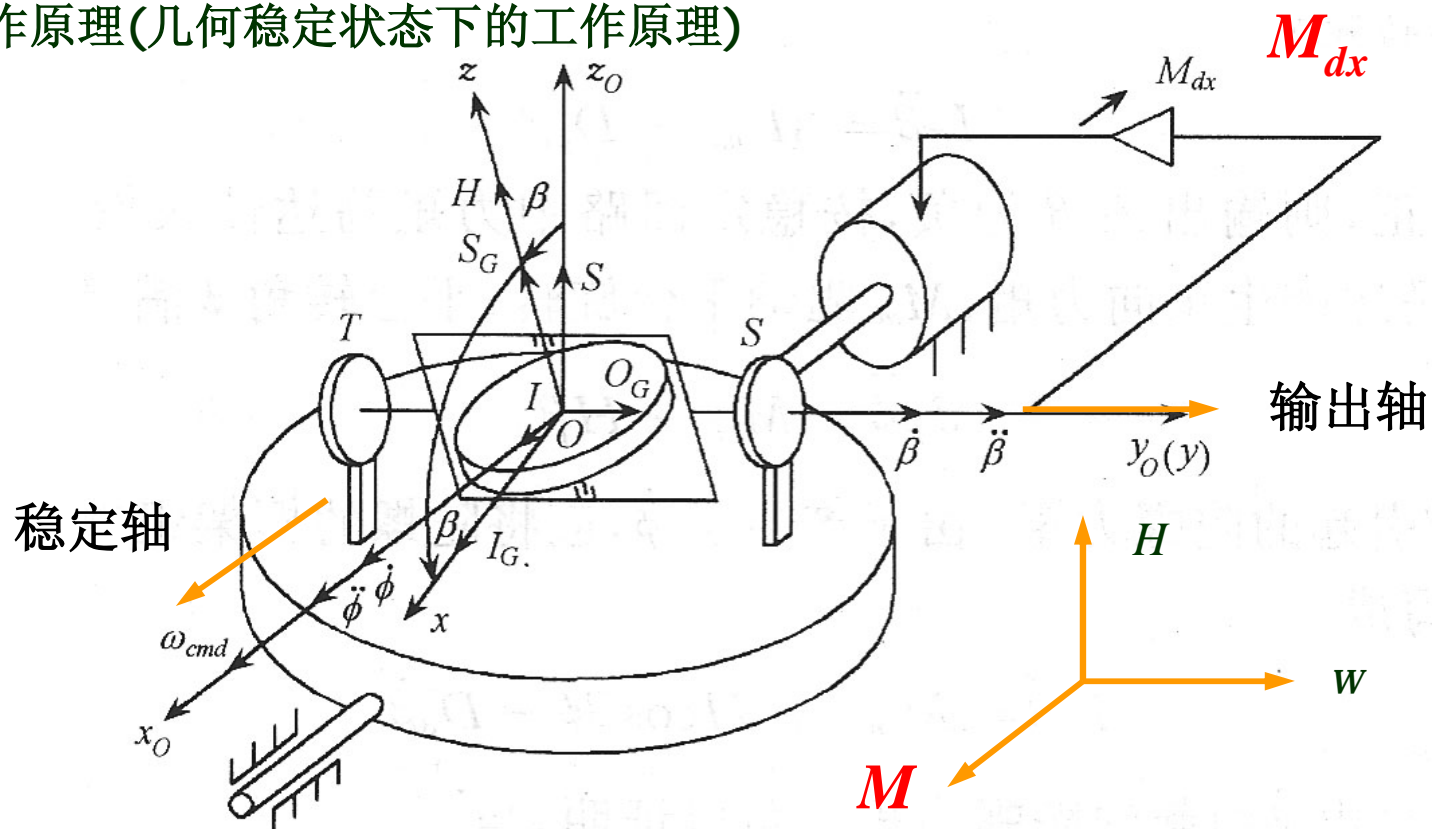


1. 稳定回路工作原理(几何稳定状态下的工作原理)
2. 修正回路工作原理(空间积分状态下的工作原理)



单轴动力式陀螺稳定平台——稳定回路工作原理

1. 稳定回路工作原理(几何稳定状态下的工作原理)



设沿稳定轴负方向作用有干扰力矩 M_{dx} , 由于陀螺的进动作用, 角动量 H 倒向 M_{dx} , 陀螺产生输出角 β , 旋转方向与陀螺输出轴 O 的指向相反, 记此 β 角为负值, 信号器将 β 变换成电压信号, 经放大处理后馈入力矩马达, 信号接入力矩马达时正负方向确定的原则是: 输出角 β 为负时, 力矩马达产生正向力矩(与 x_0 轴指向相同); 输出角 β 为正时, 力矩马达产生负向力矩. 即

$$M_m = -K \beta$$



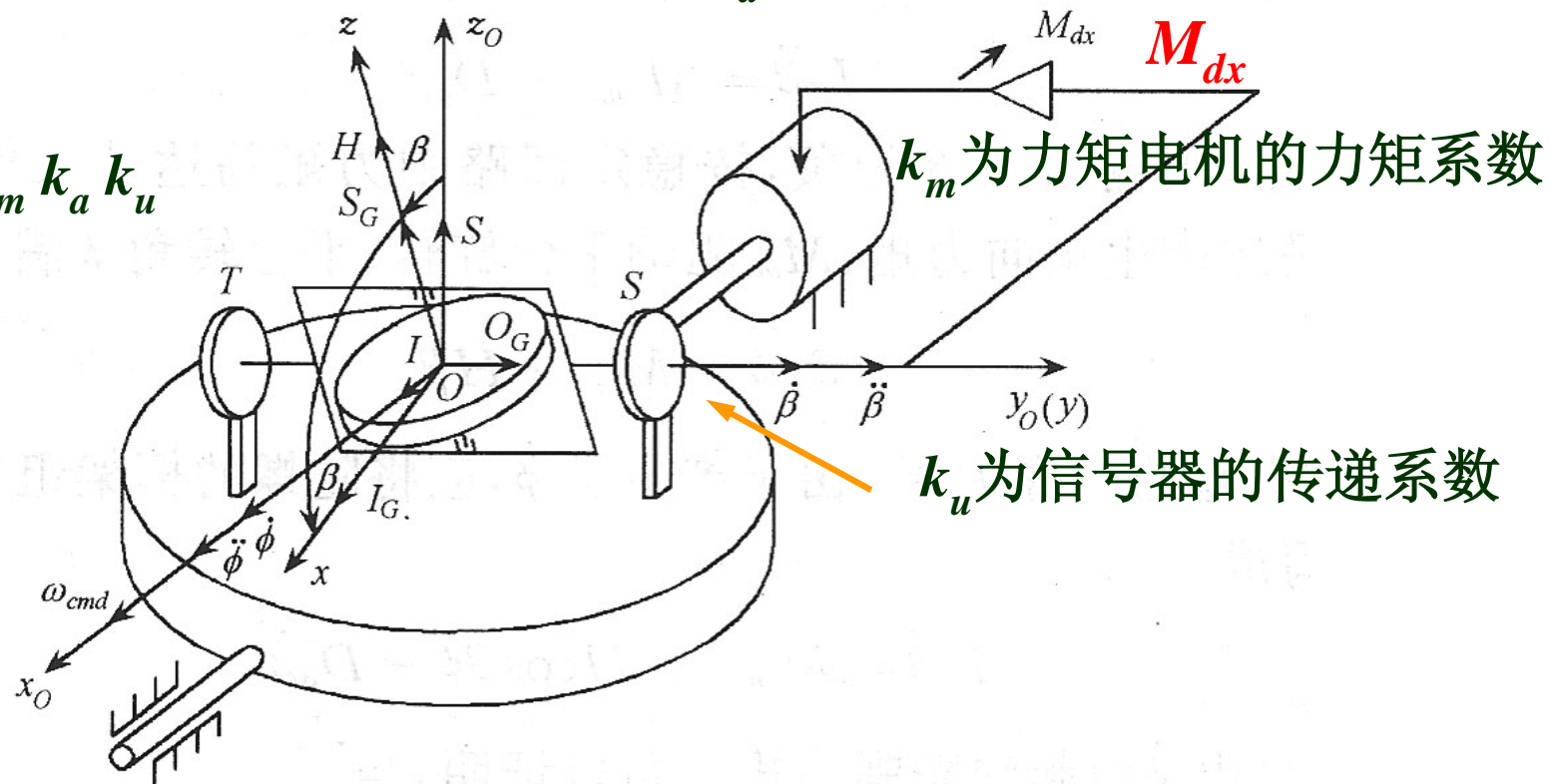
单轴动力式陀螺稳定平台

稳定回路工作原理

k_a 为放大器的放大倍数

$$M_m = -K \beta$$

其中, $K = k_m k_a k_u$



所以对于 M_{dx} 为负向干扰力矩时, β 角为负值,力矩马达产生的卸荷力矩 M_m 为正向力矩,对 M_{dx} 起对消作用,当 $M_m < |M_{dx}|$ 时, $|\beta|$ 继续增大, M_m 也随之增大,当 $M_m = |M_{dx}|$ 时, $|\beta|$ 停止增大,干扰力矩被完全对消,实现了平台台体的角位置稳定.

单轴动力式陀螺稳定平台——修正回路工作原理

修正回路的作用是使平台跟踪给定的指令,相对惯性空间以该指令角速度旋转.

k_a 为放大器的放大倍数 M_{dx}

陀螺输出轴的负向

指令电流

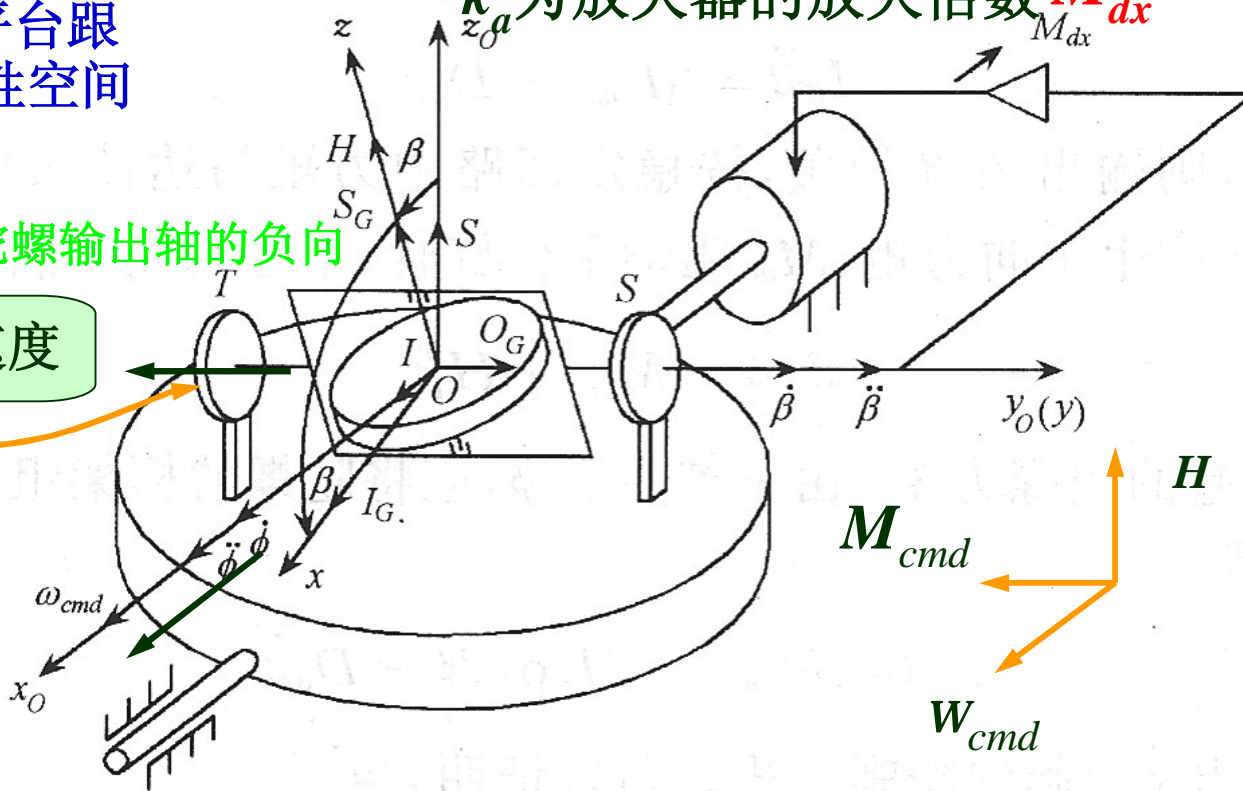
指令角速度

$$i_{cmd} = k_{iw} W_{cmd}$$

力矩器系数

$$M_{cmd} = -k_T k_{iw} W_{cmd}$$

指令力矩



指令电流接入力矩器时正负方向确定的原则是:若 ω_{cmd} 沿稳定轴正向,则产生的指令力矩应沿陀螺输出轴的负向;若 ω_{cmd} 沿稳定轴负向,则产生的指令力矩应沿陀螺输出轴的正向.两者符号正好相反.



单轴动力式陀螺稳定平台——修正回路工作原理

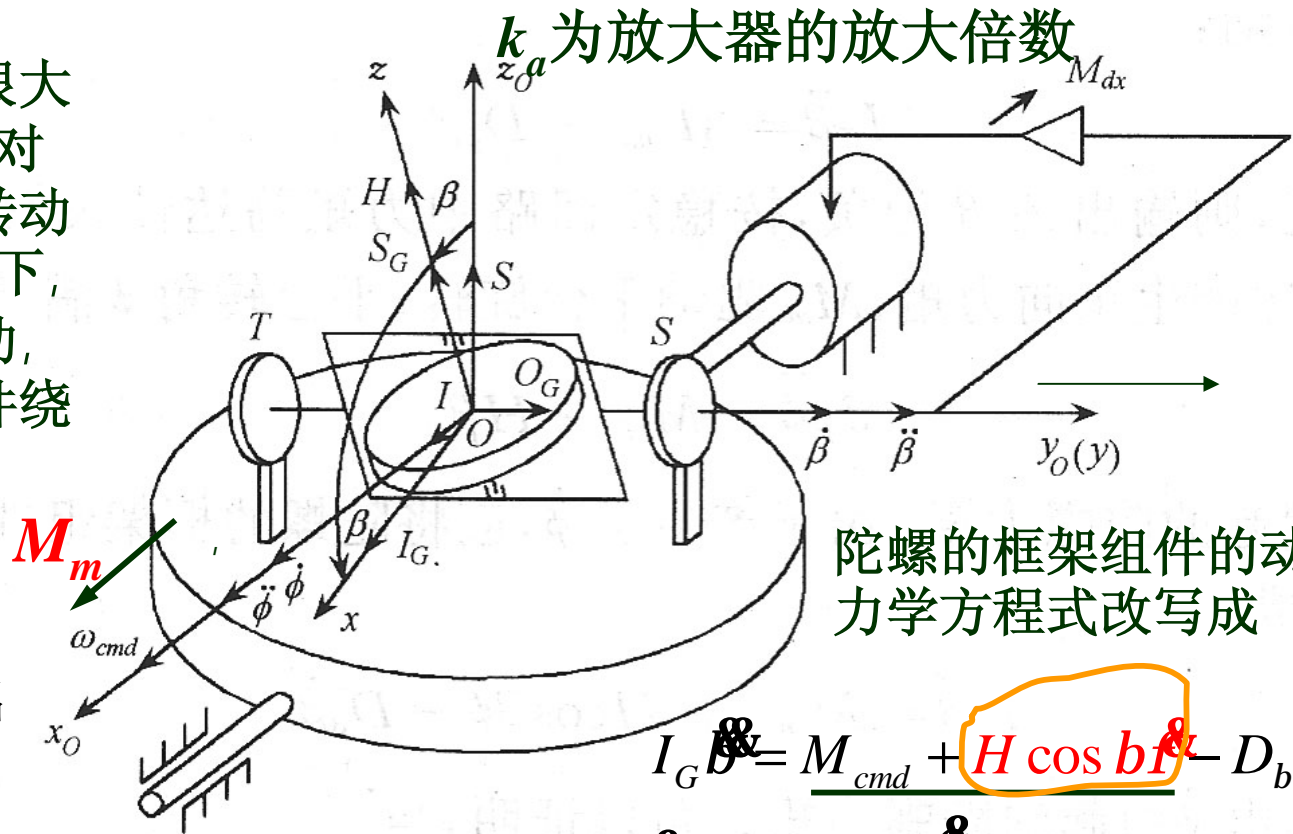
由于在稳定轴上存在很大的摩擦力矩,且被稳定对象(台体)具有很大的转动惯量,所以在 M_{cmd} 作用下,陀螺不会绕稳定轴进动,而只引起陀螺框架组件绕 y_0 轴作一般刚体转动:

$$I_G \ddot{\beta} = M_{cmd} - D_b \dot{\beta}$$

对应于 ω_{cmd} 为正,则输出角 β 为负,按稳定回路中力矩马达馈入信号的正负向接法,此时力矩马达产生正向力矩, M_m 驱动平台旋转,平台转角 β 满足如下方程:

$$J_p \ddot{\beta} = M_m - H \dot{\beta}$$

2010-05



陀螺的框架组件的动力学方程式改写成

$$I_G \ddot{\beta} = M_{cmd} + H \cos \beta \dot{\beta} - D_b \dot{\beta}$$

$M_{cmd} + H \cos \beta \dot{\beta} = 0$ 时, $\dot{\beta}$ 引起的陀螺力矩
 $\begin{cases} \dot{\beta} = 0 \\ \ddot{\beta} = 0 \end{cases}$, 即 β 达到稳态值. 此时

$$H \cos \beta \dot{\beta} = -M_{cmd} = k_T k_{iw} \omega_{cmd}$$

$\dot{\beta}$ 引起的陀螺力矩. 由于产生了 $\dot{\beta}$

返回



单轴动力式陀螺稳定平台——修正回路工作原理

$$H \cos \beta \dot{\beta} = -M_{cmd} = k_T k_{iw} W_{cmd} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\beta} = \frac{k_T k_{iw}}{H} W_{cmd}$$

由于输出角 β 小角, $\cos \beta \approx 1$

设计中取 $\frac{k_T k_{iw}}{H} = 1$

称为陀螺的刻度因数。

$\dot{\beta} = W_{cmd}$ 即平台能跟随指令角速度旋转。



陀螺输出角 β 越小, 近似度就越好, 平台跟踪精度就越高。

动力式陀螺稳定平台名称的由来?

$$J_p \ddot{\beta} = M_m - H \dot{\beta} \quad \text{平台组件的动力学方程}$$

当陀螺还未达到稳定时, 即 $\dot{\beta} \neq 0$ 时, 陀螺力矩 $H \dot{\beta}$ 也参与了对平台的驱动, 而一旦陀螺达到稳定, 即 $\dot{\beta} = 0$, 陀螺力矩消失, 平台完全由伺服力矩驱动,

所以此类平台定义为动力式陀螺稳定平台。

 稳定性分析



单轴动力式陀螺稳定平台——稳定性分析

若考虑作用在稳定轴上的阻尼力矩和干扰力矩

$$M_m = -K \beta$$

$$\begin{cases} J_p \ddot{f} = M_m - H \dot{\beta} + M_{dx} - D_f \dot{f} \\ J_p \ddot{f} = -K b + M_{dx} - H \dot{\beta} - D_f \dot{f} \\ I_G \ddot{\beta} = M_{cmd} + H \cos b \dot{f} - D_b \dot{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (J_p s^2 + D_f s) f(s) + (Hs + K) b(s) = M_{dx} \\ -Hs f(s) + (I_G s^2 + D_b s) b(s) = M_{cmd} \end{cases}$$

方程

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} J_p s^2 + D_f s & Hs + K \\ -Hs & I_G s^2 + D_b s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{dx}(s) \\ M_{cmd}(s) \end{bmatrix}$$

系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix} J_p s^2 + D_f s & Hs + K \\ -Hs & I_G s^2 + D_b s \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式

$$(J_p s^2 + D_f s)(I_G s^2 + D_b s) + (Hs + K)Hs = 0$$

$$J_p I_G s^3 + (J_p D_b + I_G D_f) s^2 + (D_f D_b + H^2) s + KH = 0$$

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$



单轴动力式陀螺稳定平台——稳定性分析

展开行列式 $(J_p s^2 + D_f s)(I_G s^2 + D_b s) + (Hs + K)Hs = 0$

$$\underline{J_p I_G} s^3 + \underline{(J_p D_b + I_G D_f)} s^2 + \underline{(D_f D_b + H^2)} s + \underline{KH} = 0$$

$$a_0 = J_p I_G \quad a_1 = J_p D_b + I_G D_f \quad a_2 = D_f D_b + H^2, \quad a_3 = KH$$

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

根据劳斯-霍尔维茨判据，系统稳定的条件为

$$a_1 > 0 \quad a_1 = J_p D_b + I_G D_f > 0 \text{ 自然满足:}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_p D_b & KH \\ J_p I_G & D_f D_b + H^2 \end{vmatrix}$$

$$= (J_p D_b + I_G D_f)(D_f D_b + H^2) - KH J_p I_G > 0$$

由于 $D_f D_b \ll H^2$ ，所以要确保陀螺稳定平台稳定，应满足：

$$K < \frac{H(J_p D_b + I_G D_f)}{J_p I_G} = H \left(\frac{D_b}{I_G} + \frac{D_f}{J_p} \right)$$



单轴动力式陀螺稳定平台——关于伺服回路增益K的解释

$$J_p \ddot{\beta} = M_m - H \dot{\beta} + M_{dx} - D_f \dot{\beta}$$

当稳定平台达到稳定时，此时 $\ddot{\beta} = 0$ $\dot{\beta} = 0$ $\beta = 0$

$$K = \frac{M_{dx}}{b} \quad b = \frac{M_{dx}}{K}$$

$K = k_u k_a k_m$ 为平台伺服回路的增益

K具有角刚度的概念，对于一定的平台干扰力矩 M_{dx} ，K越大，则陀螺输出角就越小，所以从减小陀螺输出角 β ，

提高平台的控制精度 $\implies K \uparrow$

从平台控制系统的稳定要求来看 $\implies K < H \left(\frac{D_b}{I_G} + \frac{D_f}{J_p} \right)$ $K \downarrow$

而阻尼系数 D_b 和 D_f 都很小，要提高K的允许值，唯一的途径就是增大陀螺的角动量H，所以动力式陀螺稳定平台设计中必须选用大角动量陀螺。

Back

$$M_m = -K \beta$$

$$K_{\min} < K < K_{\max}$$

其中, $K = k_m k_a k_u$

精度要求

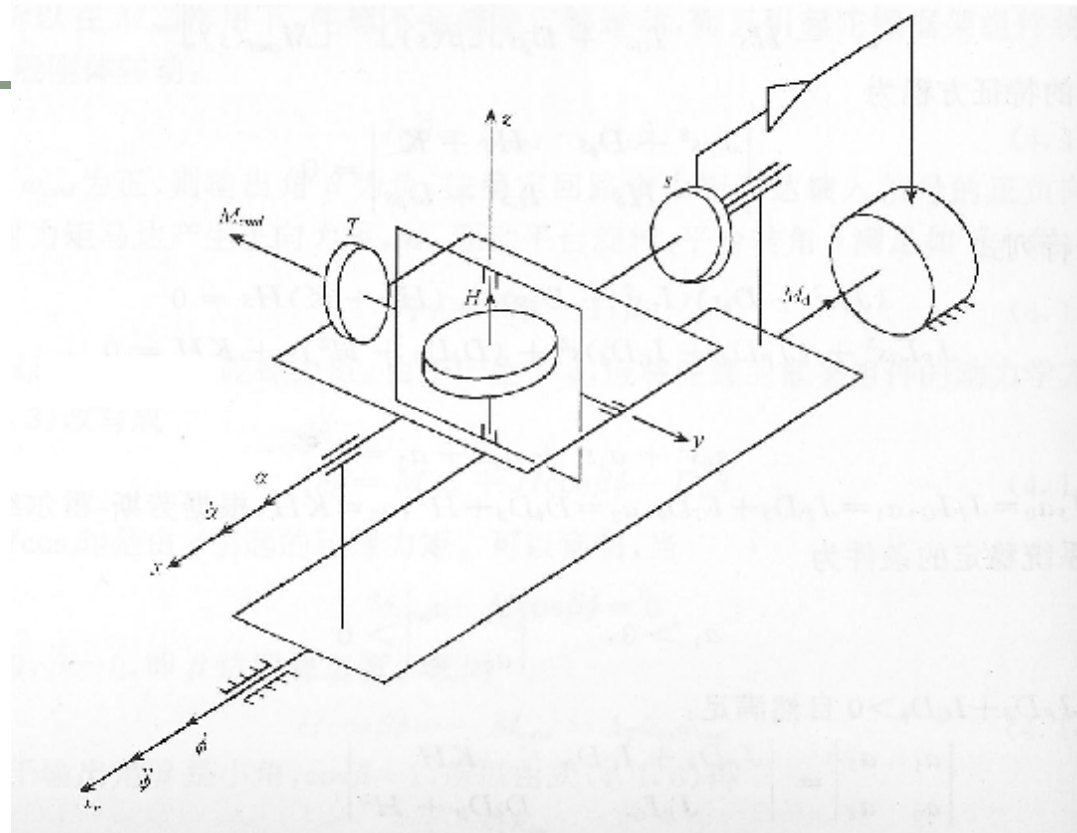
稳定要求



指示式陀螺稳定平台

如果在系统设计中选用双自由度陀螺仪作为角位置敏感器件，则该稳定平台称为指示式陀螺稳定平台，如图所示。

这类陀螺稳定平台中，力矩马达馈入信号接入时正负方向的确定原则是：当陀螺输出角 a 为正，即沿稳定轴正向时，产生的伺服力矩也为正，即也沿稳定轴正向； a 为负时，产生的伺服力矩也为负。



1. 稳定回路工作原理(几何稳定状态下的工作原理)
2. 修正回路工作原理(空间积分状态下的工作原理)

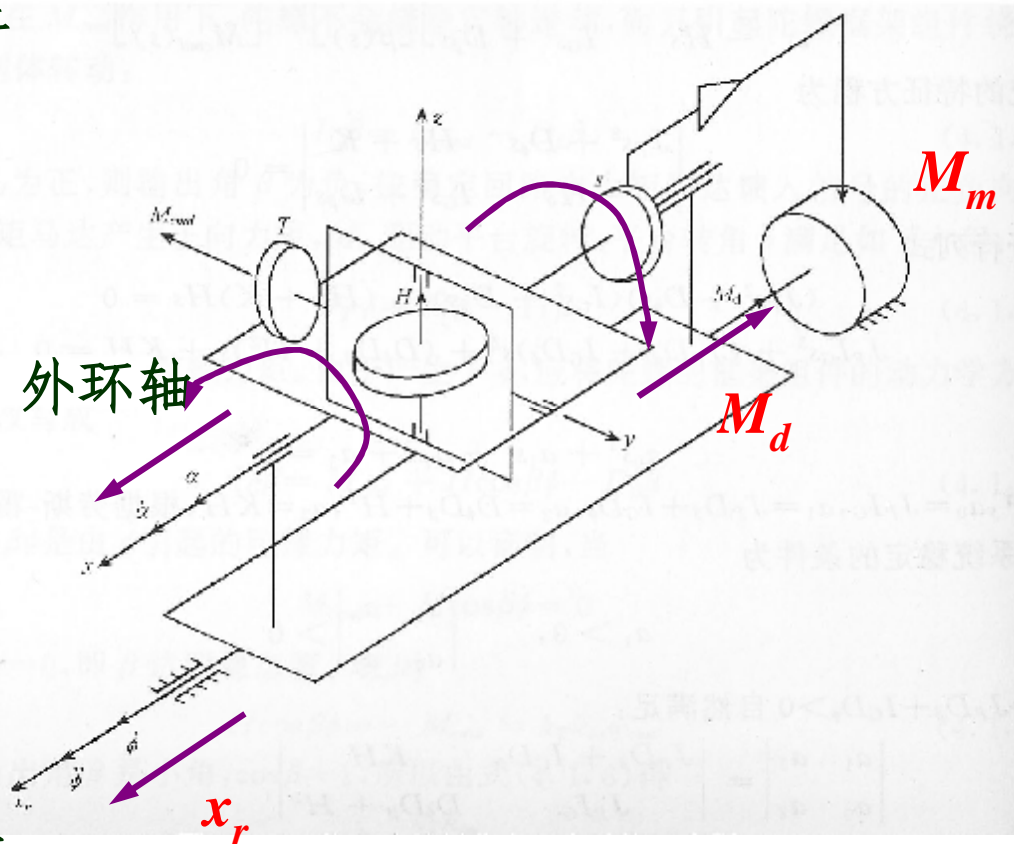


指示式陀螺稳定平台——稳定回路工作原理(几何稳定)

设沿稳定轴 x_r 的负方向作用有干扰力矩 M_d ，则平台做一般刚体旋转，产生偏角 f （引起偏角的旋转方向与 x_r 同向时 f 为正，否则为负）。

B采用了双自由度陀螺仪，角动量 H 相对惯性空间稳定。

S陀螺绕外环轴具有输出 $a = -f$ ，信号器将 a 转换成电压信号，经放大处理后馈入力矩马达，产生与 a 同号即沿 x_r 轴正向的伺服力矩 M_m ，对消干扰力矩 M_d ，此过程中不产生任何陀螺力矩，卸荷完全依靠伺服力矩实现。



指示式陀螺稳定平台——修正回路工作原理(空间积分)

若要求稳定平台沿 x_r 轴正向以角速度 w_{cmd} 旋转，则将 w_{cmd} 折算成电流

$$i_{cmd} = k_{iw} w_{cmd}$$

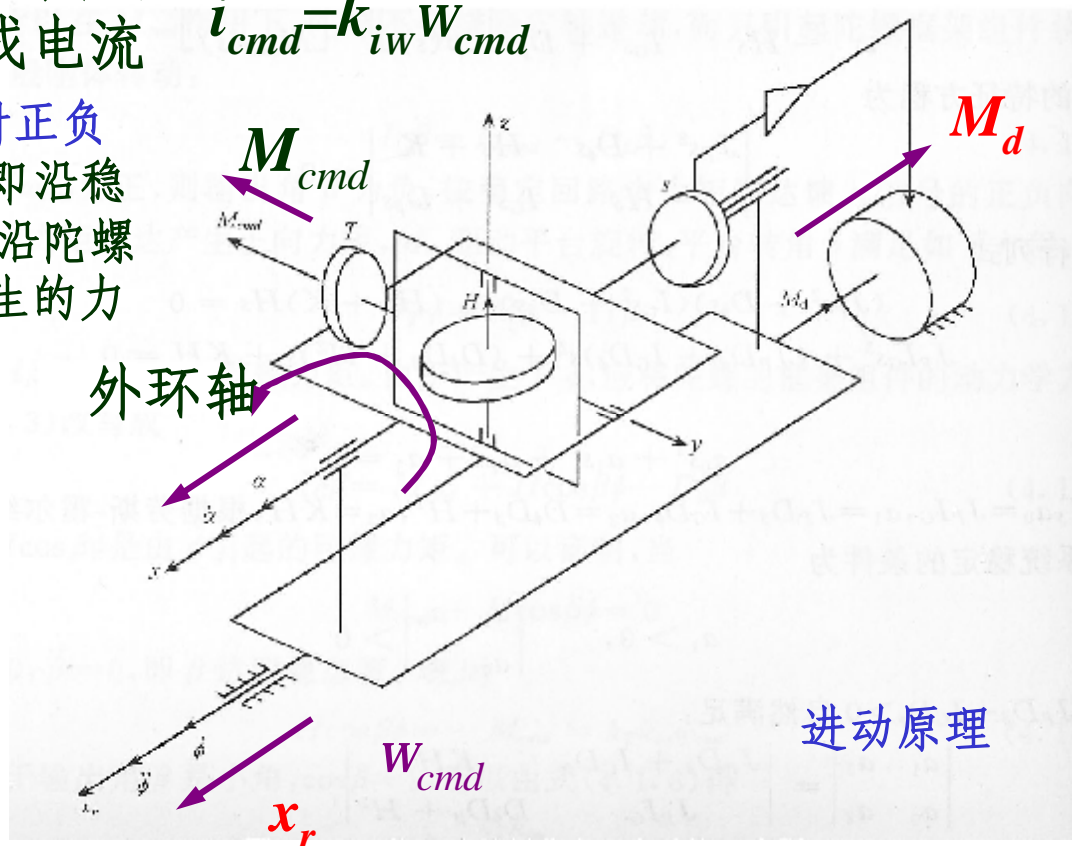
将 i_{cmd} 馈入陀螺力矩器，电流接入时正负方向确定的原则是：若 w_{cmd} 为正，即沿稳定轴正向，则产生的力矩为负，即沿陀螺内环轴的负向；若 w_{cmd} 为负，则产生的力矩为正，即沿陀螺内环轴的正向。

当 w_{cmd} 为正的情况下，力矩器产生的指令力矩沿 y 轴负向：

$$M_{cmd} = -k_T k_{iw} w_{cmd}$$

k_T 为力矩器力矩系数， k_{iw} 为力矩器指令电流折算系数。

在 M_{cmd} 作用下，陀螺角动量 H 倒向 M_{cmd} ，产生沿外环轴正向的输出角 a ，外环上的信号器将 a 转换成电压信号，经放大处理后馈入力矩马达，力矩马达产生与 a 同向的伺服力矩，驱动平台绕 x_r 轴旋转，旋转方向同 x_r 轴的正向。



指示式陀螺稳定平台——修正回路工作原理(空间积分)

陀螺外框架组件绕外环轴相对惯性空间的角速度为

$$W_{iG} = \dot{\alpha} + \dot{\beta}$$

引起的陀螺力矩为 $M_g = H(\dot{\alpha} + \dot{\beta})$
方向沿内环轴正向。

当作用在内环轴上的陀螺力矩与指令力矩平衡时，即

$$M_g + M_{cmd} = 0$$

$$H(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = -M_{cmd} = k_T k_{iw} W_{cmd}$$

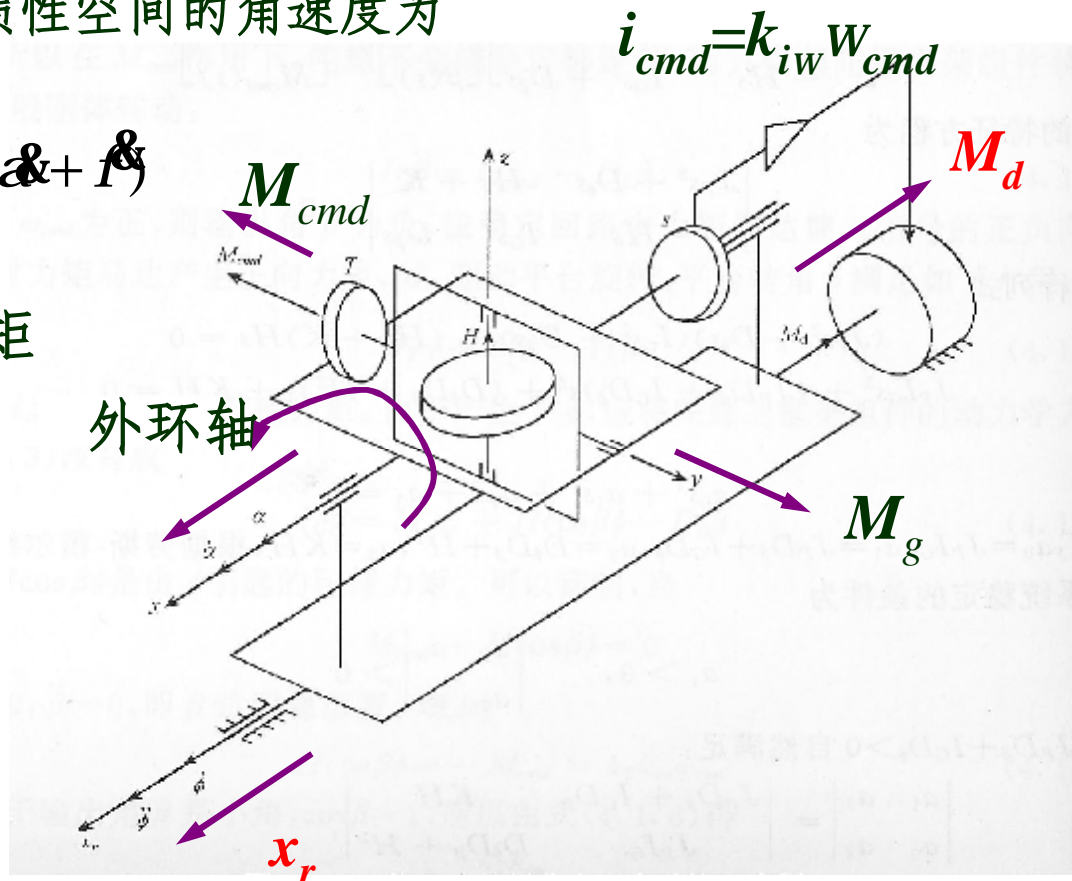
→ 陀螺停止进动，即

$\dot{\alpha} = 0$ 系统达到稳定

此时 $H\dot{\beta} = k_T k_{iw} W_{cmd}$

$$\dot{\beta} = \frac{k_T k_{iw}}{H} W_{cmd} \Rightarrow \dot{\beta} = W_{cmd}$$

= 1

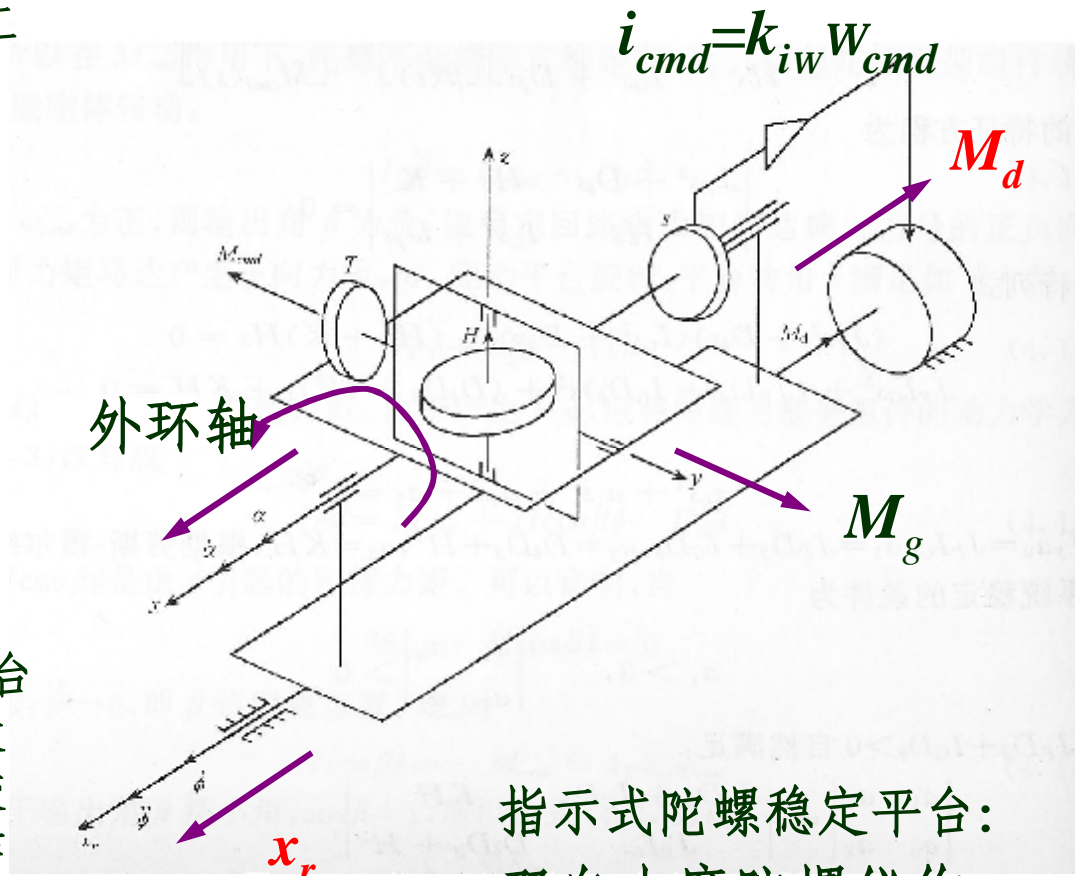


指示式陀螺稳定平台——修正回路工作原理(空间积分)

分析得出：在对消干扰力矩的工作过程中并不产生陀螺力矩，在跟踪指令角速度的工作过程中，陀螺力矩作用在稳定轴的正交方向，并未对稳定轴直接起作用，故将此类陀螺稳定平台称为指示式陀螺稳定平台。

当设计陀螺稳定平台中选用液浮积分陀螺时，由于液浮的粘稠系数比较大，阻尼系数 D_b 相对较大，所以允许刚度 K 可以适当大些(见式)。

若要达到与动力式陀螺稳定平台相同的刚度，则陀螺角动量可以大幅度降低，所以陀螺力矩也相对较小，过渡过程中对消干扰力矩的作用并不明显，干扰力矩几乎完全由伺服力矩对消，为了便于与动力式陀螺稳定平台作区别，将此类稳定平台定义为指示-动力式陀螺稳定平台。



指示式陀螺稳定平台：
双自由度陀螺仪作为角位置敏感器件

用速率陀螺仪构成的稳定平台——单轴速率陀螺稳定平台

设平台的指令角速度为零，平台（包括被稳定对象和陀螺）绕稳定轴 x_0 轴的转动惯量为 J_p ，陀螺组件绕输出轴 O 的转动惯量为 I_G ，

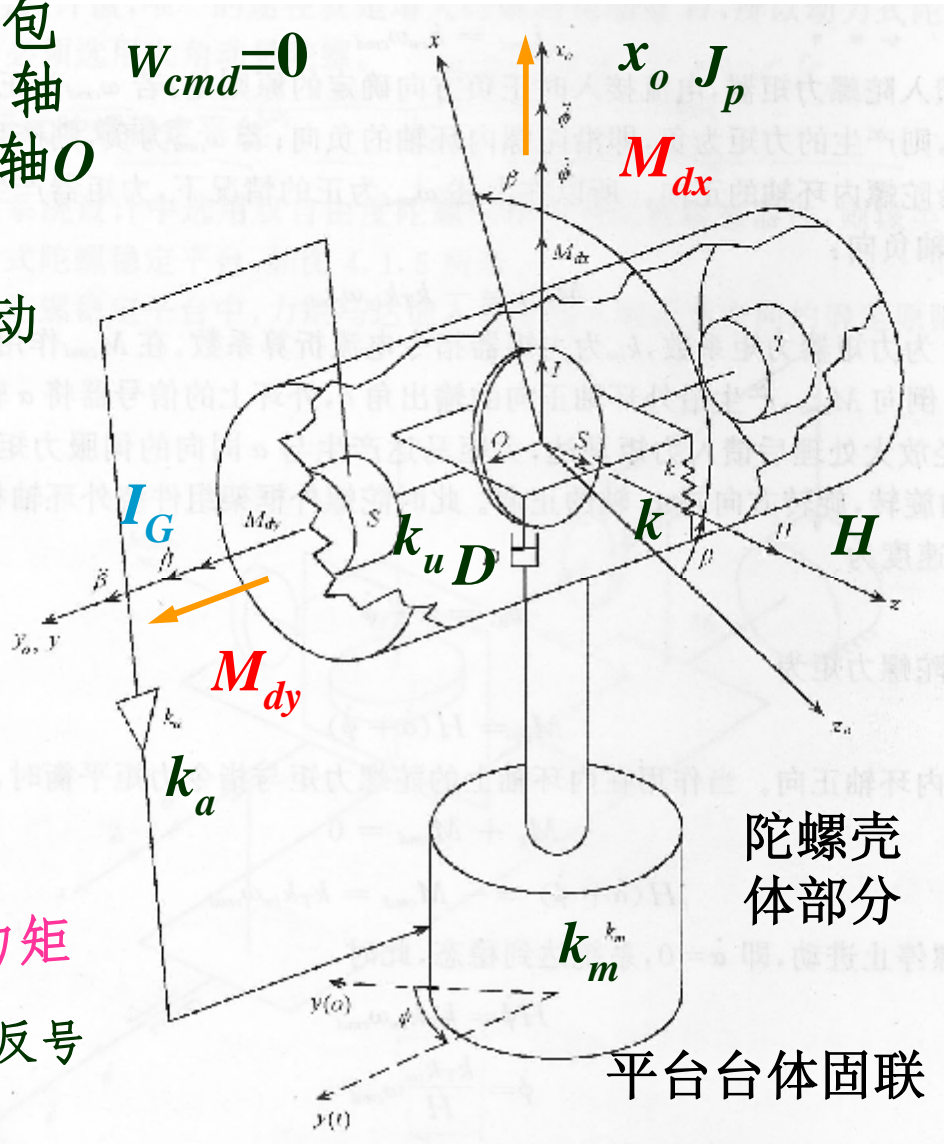
陀螺组件的角速度为 $\dot{\beta}$ ，陀螺绕输出轴的阻尼系数和陀螺输出系数分别为 D 和 k_u ，力矩马达的传递函数为 k_a ，放大器的放大系数为 k_a ，力矩马达力矩系数为 k_m 。

则平台旋转角 f 满足以下方程：

$$J_p \ddot{f} = M_{dx} - H \dot{\beta} \cos b - k_m k_a k_u b$$

由 $\dot{\beta}$ 引起的陀螺力矩

力矩马达的伺服力矩与陀螺输出角 b 反号



用速率陀螺仪构成的稳定平台——单轴速率陀螺稳定平台

则平台旋转角 f 满足以下方程:

$$J_p \ddot{f} = M_{dx} - H \dot{b} \cos b - k_m k_a k_u b$$

陀螺输出角 b 满足以下方程:

$$I_G \ddot{b} = M_{dy} - kb - D \dot{b} + H \dot{f} \cos b$$

$\cos b \gg 1$

弹性力矩

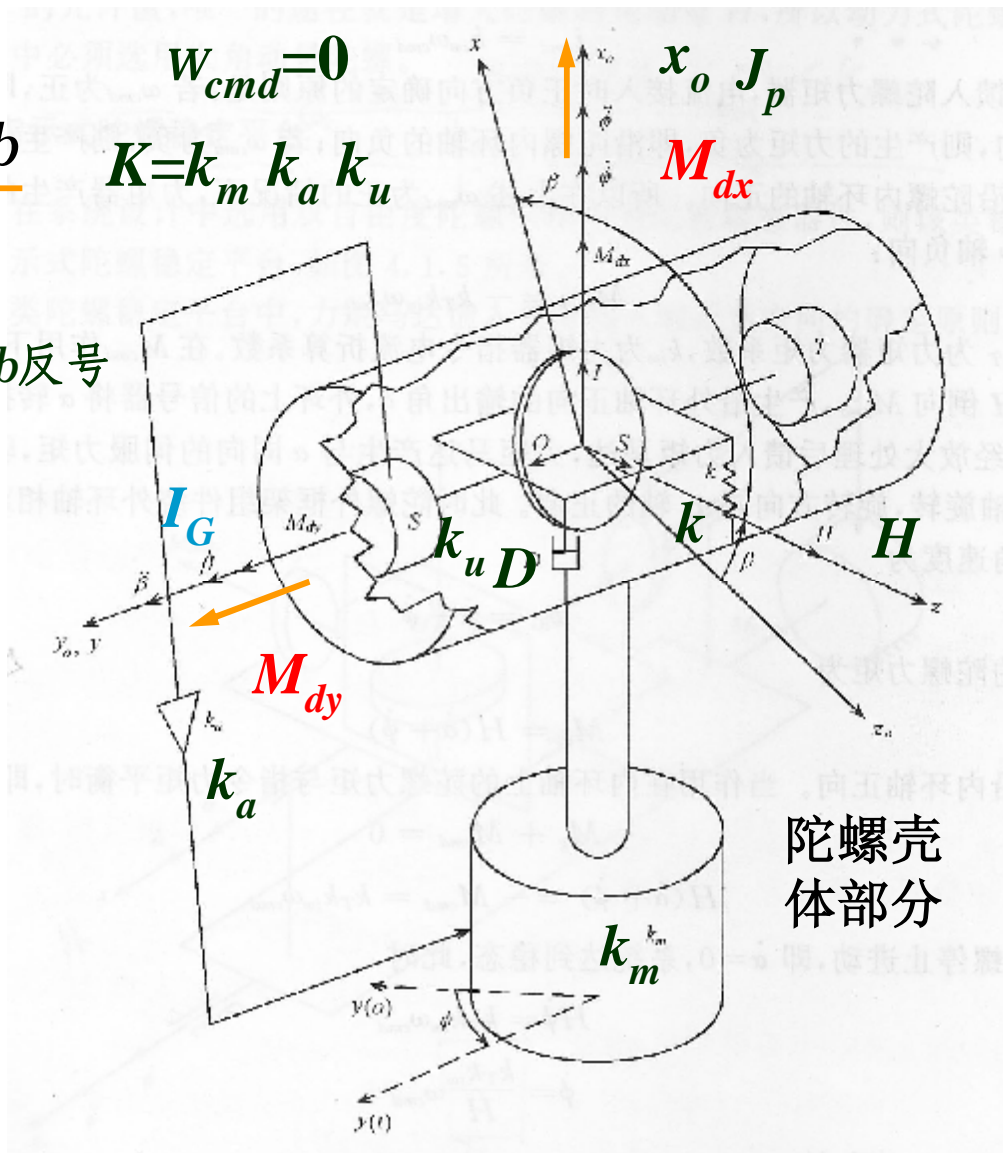
引起的陀螺力矩

$$\begin{cases} J_p \ddot{f} = M_{dx} - H \dot{b} - K b \\ I_G \ddot{b} = M_{dy} - kb - D \dot{b} + H \dot{f} \end{cases}$$

由于陀螺的带宽远高于稳定平台的带宽, 所以考虑平台的响应时可不考虑陀螺的过渡过程, 而只需要考虑陀螺的稳态输出。

$$\dot{b} = 0$$

$$\ddot{b} = 0$$



用速率陀螺仪构成的稳定平台——单轴速率陀螺稳定平台

$$\begin{cases} J_p \dot{e} = M_{dx} - H \dot{b} - K b \\ I_G \dot{b} = M_{dy} - k b - D \dot{b} + H \dot{e} \end{cases}$$

$\dot{e} = 0 \quad \dot{b} = 0$

$$b = \frac{M_{dy}}{k} + \frac{H}{k} \dot{e}$$

由于指令角速度为零，所以 $e = \dot{e}$

$$J_p \dot{e} + \frac{KH}{k} e = M_{dx} - \frac{K}{k} M_{dy}$$

作拉氏变换

$$J_p s e(s) + \frac{KH}{k} e(s) = M_{dx}(s) - \frac{K}{k} M_{dy}(s)$$

$$e(s) = \frac{M_{dx}(s) - \frac{K}{k} M_{dy}(s)}{J_p s + \frac{KH}{k}}$$

对于常值干扰力矩，平台漂移的稳态值为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{M_{dx}}{s} - \frac{K}{ks} M_{dy}}{J_p s + \frac{KH}{k}} = \frac{k}{KH} M_{dx} - \frac{M_{dy}}{H}$$



用速率陀螺仪构成的稳定平台——单轴速率陀螺稳定平台

对于常值干扰力矩，平台漂移的稳态值为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{M_{dx}}{s} - \frac{K}{ks} M_{dy}}{J_p s + \frac{KH}{k}} = \frac{k}{KH} M_{dx} - \frac{M_{dy}}{H}$$

从上式可看出，绕稳定轴和绕陀螺输出轴的干扰力矩都能引起平台漂移，增大陀螺角动量能有效降低它们的影响；弹性约束是一种干扰，增大稳定回路的增益能降低其影响。

若对上述方案作如下修改：①采用液浮陀螺，输出轴上的干扰力矩 M_{dy} 可略去不计；②力矩马达除输出与陀螺输出成正比的伺服力矩外，还输出与输出角积分成正比的伺服力矩。

$$b = \frac{M_{dy}}{k} + \frac{H}{k} \dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad b = \frac{H}{k} \dot{\theta}$$



用速率陀螺仪构成的稳定平台——单轴速率陀螺稳定平台

若对上述方案作如下修改：①采用液浮陀螺，输出轴上的干扰力矩 M_{dy} 可略去不计；②力矩马达除输出与陀螺输出成正比的伺服力矩外，还输出与输出角积分成正比的伺服力矩。

$$b = \frac{M_{dy}}{k} + \frac{H}{k} \dot{f} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{H}{k} \dot{f}$$

力矩马达的输出力矩为 $M_m = -Kb - k' \int b dt$

$$J_p \ddot{f} = M_{dx} - H \dot{f} - Kb$$

$$J_p \ddot{f} = M_{dx} - k' \int b dt - Kb \quad \Rightarrow \quad J_p \ddot{f} + \frac{KH}{k} \dot{f} + \frac{k'H}{k} f = M_{dx}$$

$$f(s) = \frac{M_{dx}(s)}{J_p s^2 + \frac{KH}{k} s + \frac{k'H}{k}}$$

对稳定轴上的常值干扰力矩

$$f_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{M_{dx}}{s}}{J_p s^2 + \frac{KH}{k} s + \frac{k'H}{k}} = \frac{kM_{dx}}{k'H} \quad M_{dx}(s) = \frac{M_{dx}}{s}$$

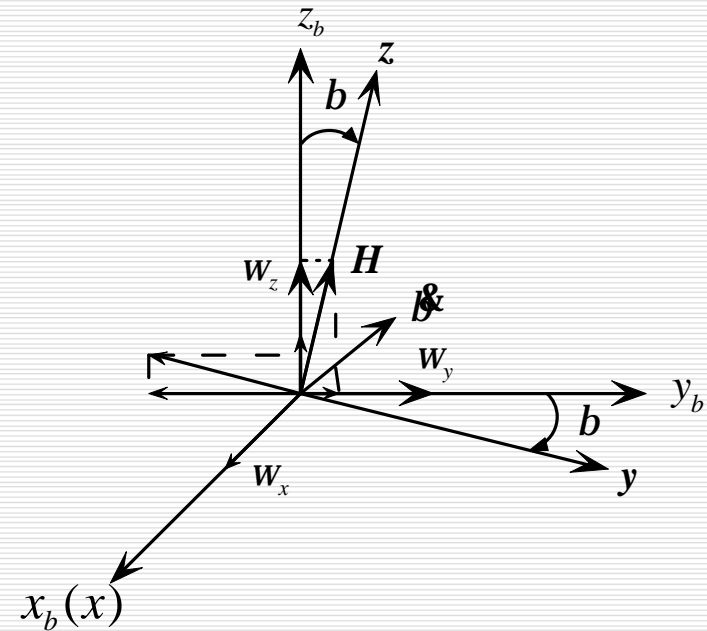
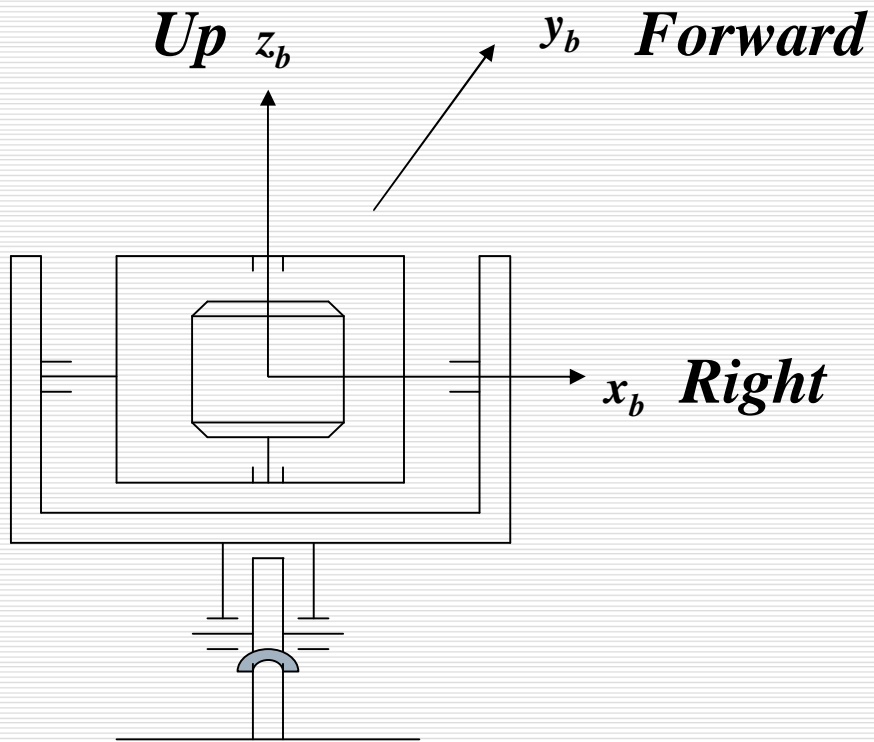
此时，只存在稳定偏差角，而平台的漂移角速度为零。



n 谢谢!

直接式陀螺稳定平台

(1) 干扰力矩全部由陀螺力矩对消, 则此类稳定平台称为直接式陀螺稳定平台.



返回

间接式陀螺稳定平台

(2)陀螺安装在基座上,陀螺感测的基座角运动信息经处理后用来控制平台,干扰力矩**全部由伺服力矩抵消**,则此类稳定平台称为间接式陀螺稳定平台.



[返回](#)

动力式陀螺稳定平台

(3) 陀螺力矩只是在平台系统的过渡过程中参与对消干扰力矩, 当平台系统达到稳态后, 干扰力矩全部由伺服力矩对消, 则此类稳定平台称为动力式陀螺稳定平台.



[返回](#)

指示式陀螺稳定平台

(4)安装在台体上的陀螺属于角位置陀螺,如双自由度液浮角位置陀螺、静电陀螺、挠性陀螺等,此类陀螺不产生陀螺力矩,干扰力矩全部由伺服力矩抵消,则此类稳定平台称为指示式陀螺稳定平台.



[返回](#)

指示-动力式陀螺稳定平台

(5) 陀螺力矩虽然在平台系统的过渡过程中参与了对消干扰力矩, 但所起作用很小, 当平台系统达到稳定后, 干扰力矩全部由伺服力矩对消, 则此类稳定平台称为指示-动力式陀螺稳定平台.

采用单自由度液浮积分陀螺和速率陀螺为敏感元件的稳定平台就属于此类系统, 其中陀螺的主要作用是感测角速度.



[返回](#)



欢迎!



惯性导航系统原理

程向红

2009.05

第四章 陀螺稳定平台工作原理

- n 4.1 各类稳定平台简介
- n 4.1.1 直接式陀螺稳定平台 P
- n 4.1.2 间接式陀螺稳定平台 P
- n 4.1.3 动力式陀螺稳定平台 P
- n 4.1.4 指示式陀螺稳定平台 P
- n 4.1.5 用速率陀螺仪构成的稳定平台 P
- n 4.2 力矩装置和平台台体的传递函数
- n 4.3 单轴陀螺稳定平台





4.2 力矩装置和平台台体的传递函数

n4.2.1 力矩装置的传递函数

n4.2.2 平台台体的传递函数



4.2.1.力矩装置的传递函数

是依靠力矩装置实现的

在稳定平台回路中，执行机构 { 平衡干扰力矩
按要求驱动平台旋转

力矩装置应满足如下要求：

- (1) 对平台施加的干扰力矩要小；
- (2) 传动应平稳可靠,定位分辨力要高,滞环要小；
- (3) 功耗小；
- (4) 对平台附加的转动惯量要小；
- (5) 体积小,重量轻,结构紧凑。

工程上常采用直接驱动式和间接驱动式两类力矩驱动装置。

直接驱动式力矩装置的力矩马达驱动轴直接与稳定轴相联,力矩马达可以是交流的,也可以是直流的,但目前广泛使用直流型。

间接驱动式力矩装置的力矩电机驱动轴通过齿轮减速器与稳定轴相联,常采用交流伺服电机。

n 1. 直流力矩电机的传递函数

n 2. 基座旋转引起的平台干扰力矩分析



1. 直流力矩电机的传递函数

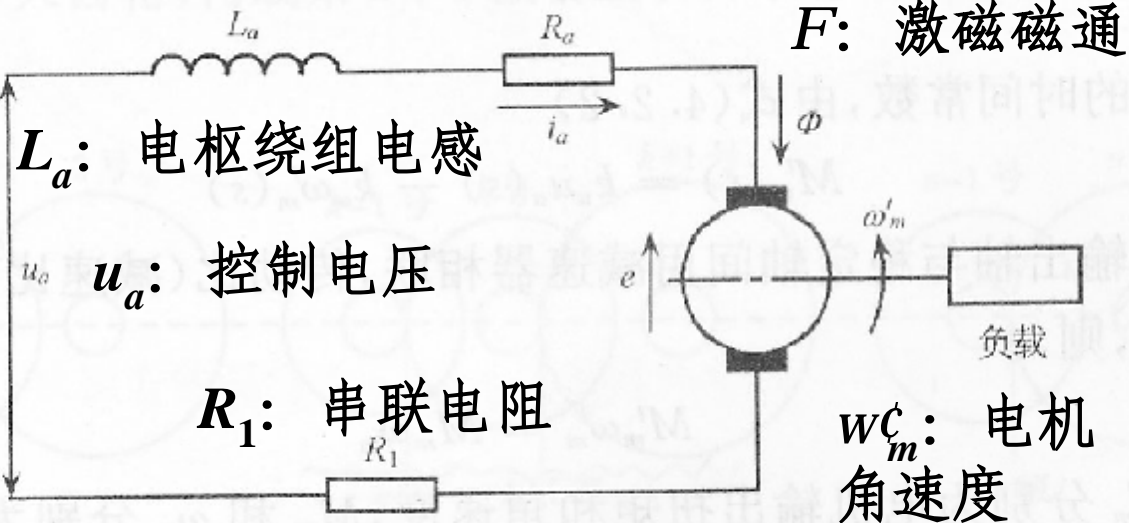
R_a : 电枢绕组电阻

$$u_a - e = i_a(R_a + R_1) + L_a \frac{di_a}{dt}$$

记 $R = R_a + R_1$

拉氏变换

电枢回路电压平衡方程



F : 激磁磁通

L_a : 电枢绕组电感

u_a : 控制电压

R_1 : 串联电阻

ω_m : 电机角速度

$$u_a(s) = e(s) + Ri_a(s) + L_a si_a(s)$$

$$i_a(s) = \frac{u_a(s) - e(s)}{sL_a + R} = \frac{1}{R} \frac{u_a(s) - e(s)}{t_e s + 1}$$

e : 由 ω_m 引起的反电势

$t_e = \frac{L_a}{R}$: 为电机的时间常数

由 i_a 产生的电机输出扭矩为

$$M'_m(s) = k_m i_a(s) = \frac{k_m}{R} \frac{u_a(s) - e(s)}{t_e s + 1}$$

电磁转矩方程

$$\frac{M'_m(s)}{u_a(s) - e(s)} = \frac{k_m}{R} \frac{1}{t_e s + 1}$$

k_m 为电机的扭矩系数, 即电机的电流-力矩系数.



1. 直流力矩电机的传递函数

R_a : 电枢绕组电阻

电机的传递函数为

$$\frac{M'_m(s)}{u_a(s) - e(s)} = \frac{k_m}{R} \frac{1}{t_e s + 1}$$

反电势由电机旋转引起。设电机旋转角速度为 ω'_m , 则

$$e(s) = k_e \omega'_m(s)$$

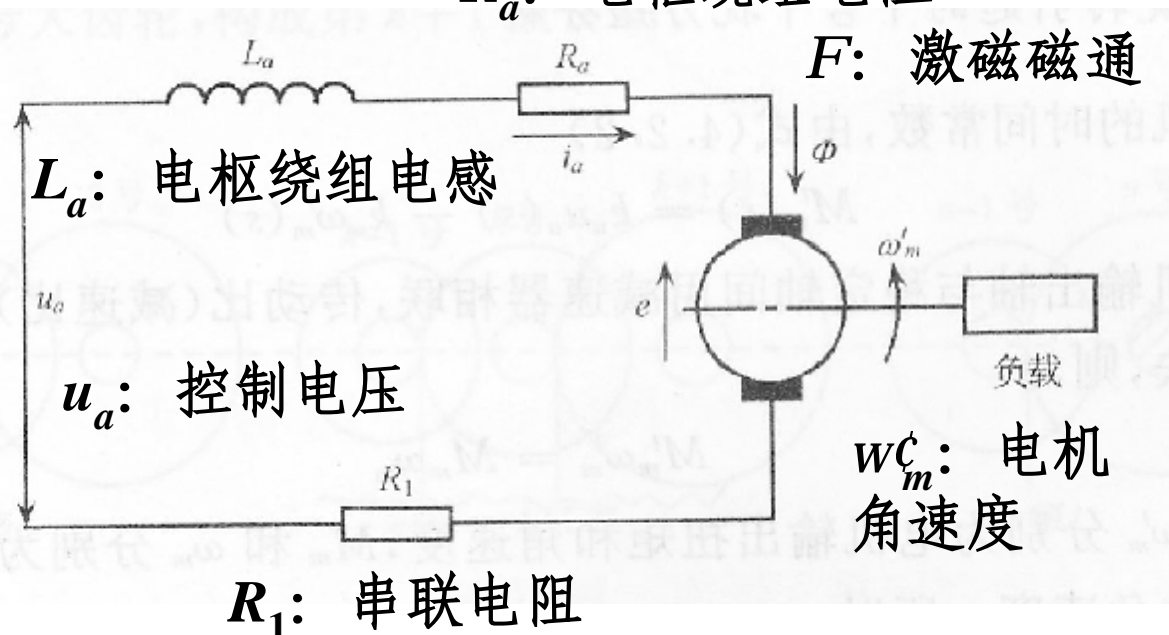
$$M'_m(s) = \frac{k_m}{R} \frac{1}{t_e s + 1} [u_a(s) - k_e \omega'_m(s)]$$

电机的稳态输出力矩为

$k_w = k_u k_e$ 为电机的反电势阻尼力矩系数。

$$M'_{mss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot M'_m(s) = \frac{k_m}{R} (u_a - k_e \omega'_m) = k_u u_a - k_w \omega'_m$$

为电机的电压-力矩系数



2. 基座旋转引起的平台干扰力矩分析

$$M'_m(s) = \frac{k_m}{R} \frac{1}{t_e s + 1} [u_a(s) - k_e w'_m(s)] \quad \text{忽略电机的时间常数} \quad M'_m(s) = k_u u_a(s) - k_w w'_m(s)$$

假设电机输出轴与稳定轴间用减速器相联, 传动比(减速比)为*i*, 不考虑减速器的功率损失, 则

$$M'_m w'_m = M_m w_m$$

式中 M'_m 和 w'_m , 分别为电机输出扭矩和角速度, M_m 和 w_m 分别为平台获得的扭矩和相对基座的角速度。所以

$$M'_m(s) = k_u u_a(s) - k_w w'_m(s)$$

$$M'_m = \frac{M_m}{i} \quad W_{bp}$$

$$\frac{M'_m(s)}{i} = k_u u_a(s) - k_w i w_m = k_u u_a(s) - k_w i (w_{ip} - w_{ib}) \quad M_{m1}(s) = i k_u u_a(s) - i^2 k_w w_{ip}(s)$$

$$M_m(s) = \underline{i k_u u_a(s)} - \underline{i^2 k_w w_{ip}(s)} + \underline{i^2 k_w w_{ib}(s)}$$

$$M_m(s) = M_{m1}(s) + M_i(s)$$

输入为 u_a , 考虑平台绝对角速度等效反电势后的平台驱动力矩。

为基座角运动引起的平台干扰力矩

$$M_i(s) = i^2 k_w w_{ib}(s)$$



4.2.2 平台台体的传递函数

- 1.直接由力矩马达驱动时传递函数
- 2.经减速器驱动时的传递函数



1.直接由力矩马达驱动时传递函数

设平台台体的转动惯量为 J ，则由动量矩定理

$$J\dot{\omega}_{ip} = M_{\Sigma}$$

其中 $M_S = M_m = M_{m1} + M_i$ 。



由上式，得平台台体的传递函数：

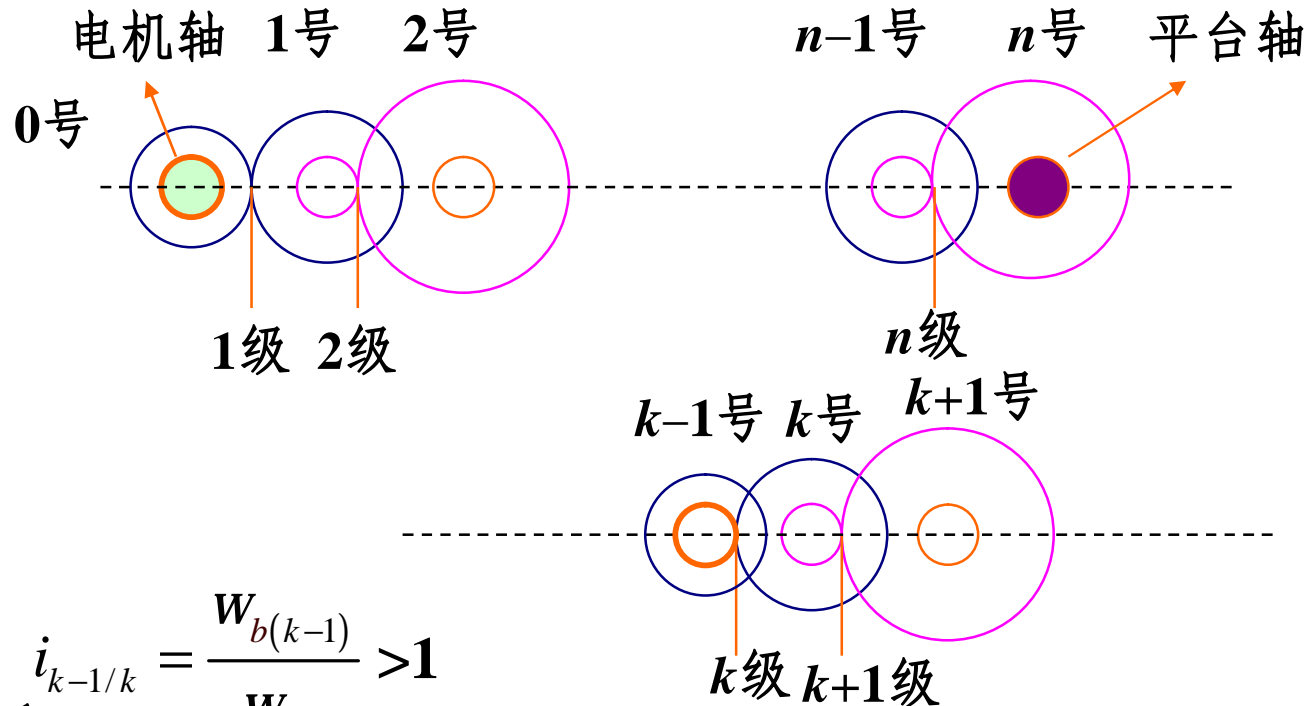
$$\frac{w_{ip}(s)}{M_{\Sigma}(s)} = \frac{1}{Js}$$



2. 经减速器驱动时的传递函数

1) 减速器的等效转动惯量、干扰转动惯量和平台的驱动力矩

图为 n 级减速器驱动示意图，其中 0 号齿轮轴与电机轴联接， n 号齿轮轴与平台台体轴联接，每个齿轮由固联在一起的大小齿轮组成，传动过程中由 k 号小齿轮拨动 $k+1$ 号大齿轮，构成第 $k+1$ 级传动。



k 级传动比表示为 $i_{k-1/k} = \frac{W_{b(k-1)}}{W_{bk}} > 1$

其中 b 为基座坐标系

$W_{b(k-1)}$ 为 $k-1$ 号齿轮相对 b 坐标系的角速度，
 W_{bk} 为 k 号齿轮相对 b 坐标系的角速度。

$M_{(k-1)k}$ 表示 k 号齿轮受 $k-1$ 号齿轮拨动而获得的扭矩，
 $M_{(k+1)k}^r$ 表示 k 号齿轮拨动 $k+1$ 号齿轮时受到 $k+1$ 号齿轮的反作用力矩。

考察 k 号齿轮的动力学方程，根据动量矩定理

$$J_k \dot{\omega}_k = M_{(k-1)k} - M_{(k+1)k}^r$$

J_k 为 k 号齿轮的转动惯量



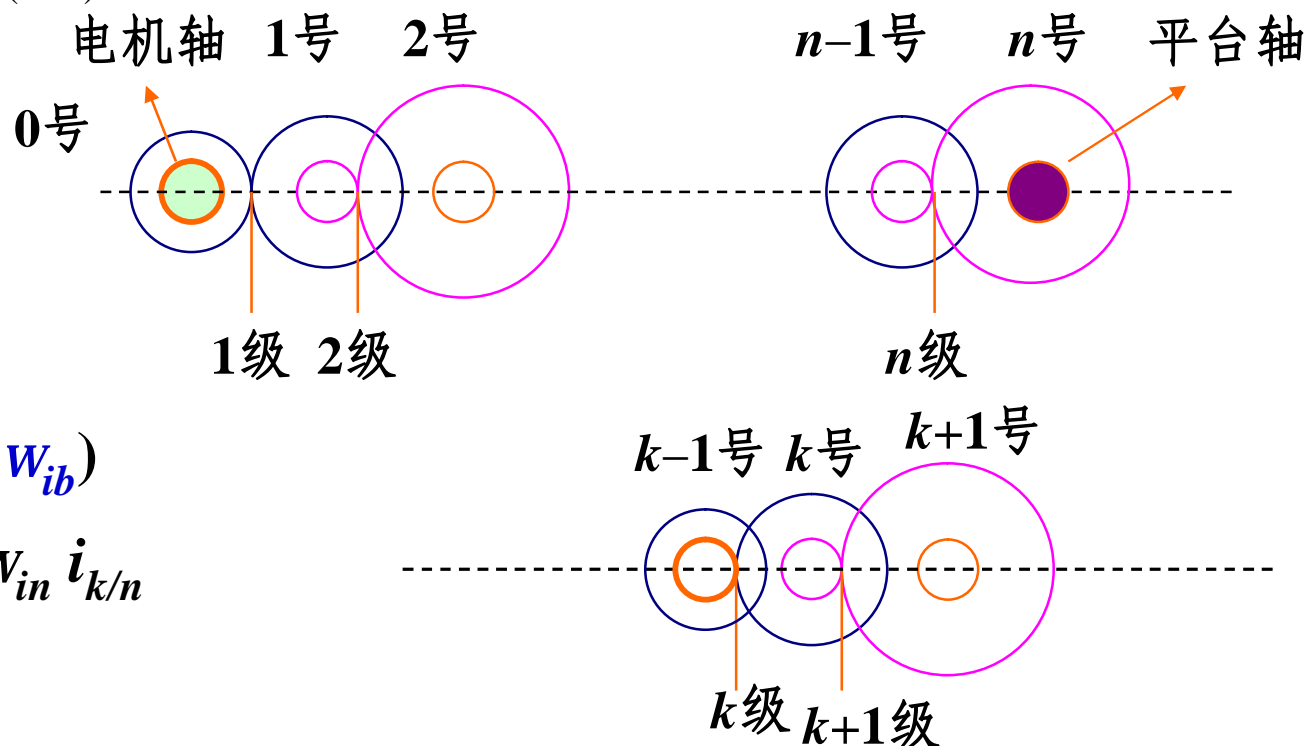
2. 经减速器驱动时的传递函数



1) 减速器的等效转动惯量、干扰转动惯量和平台的驱动力矩 $i_{k-1/k} > 1$

$$J_k \ddot{\omega}_k = M_{(k-1)k} - M_{(k+1)k}^r$$

J_k 为 k 号齿轮的转动惯量



$$\begin{aligned} W_{ik} &= W_{ib} + W_{bk} \\ &= W_{ib} + i_{k/n} W_{bn} \\ &= W_{ib} + i_{k/n} (W_{in} - W_{ib}) \\ &= (1 - i_{k/n}) W_{ib} + W_{in} i_{k/n} \end{aligned}$$

$$i_{k/n} = \frac{W_{bk}}{W_{bn}} = \frac{W_{bk}}{W_{b(k+1)}} \times \frac{W_{b(k+1)}}{W_{b(k+2)}} \times \dots \times \frac{W_{b(n-1)}}{W_{bn}} = i_{k/(k+1)} \times i_{(k+1)/(k+2)} \times \dots \times i_{(n-1)/n}$$

下面讨论

$k+1$ 级传动中 k 号齿轮和 $k+1$ 号齿轮间的作用力关系。

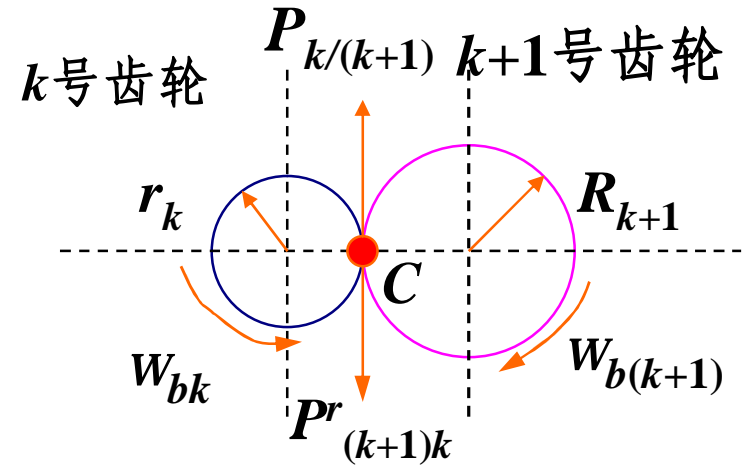
2. 经减速器驱动时的传递函数



1) 减速器的等效转动惯量、干扰转动惯量和平台的驱动力矩

图表示 $k+1$ 级传动中 k 号齿轮和 $k+1$ 号齿轮间的作用力关系，其中 $P_{k(k+1)}$ 、 $M_{k(k+1)}$ 分别表示 k 号齿轮对 $k+1$ 号齿轮的驱动力和驱动力矩，

$P_{(k+1)k}^r$ 和 $M_{(k+1)k}^r$ 分别表示 $k+1$ 号齿轮对 k 号齿轮的反作用力和反作用力矩，显然 $P_{k(k+1)}$ 与 $P_{(k+1)k}^r$ 大小相等，方向相反，且



$$M_{k(k+1)} = -|P_{k(k+1)}| R_{k+1}$$

$$M_{(k+1)k}^r = -|P_{(k+1)k}^r| r_k$$

$$\text{有 } \frac{M_{(k+1)k}^r}{M_{k(k+1)}} = \frac{r_k}{R_{k+1}}$$

因两齿轮在点 C 的速度相同，即

$$r_k w_{bk} = R_{k+1} w_{b(k+1)}, \text{ 所以}$$

式中，负号表示力矩方向穿入纸面。

$$\frac{R_{k+1}}{r_k} = \frac{w_{bk}}{w_{b(k+1)}} = i_{k/k+1}$$

$$M_{(k+1)k}^r = \frac{1}{i_{k/k+1}} M_{k(k+1)}$$

$$J_k \ddot{\theta}_k = M_{(k-1)k} - M_{(k+1)k}^r$$

2. 经减速器驱动时的传递函数

$$\frac{R_{k+1}}{r_k} = \frac{W_{bk}}{W_{b(k+1)}} = i_{k/k+1}$$

$$J_k \omega_k = M_{(k-1)k} - M_{(k+1)k}^r$$

$$M_{(k+1)k}^r = M_{(k-1)k} - J_k \omega_k$$

$$M_{(k+1)k}^r = \frac{1}{i_{k/k+1}} M_{k(k+1)}$$

$$W_{ik} = W_{ib} + W_{bk} = W_{ib} + i_{k/n} W_{bn} = W_{ib} + i_{k/n} (W_{in} - W_{ib}) = (1 - i_{k/n}) W_{ib} + W_{in} i_{k/n}$$

$$\frac{1}{i_{k/k+1}} M_{k(k+1)} = M_{(k-1)k} - J_k [\omega_{ib} (1 - i_{k/n}) + \omega_{in} i_{k/n}]$$

$$M_{k(k+1)} = i_{k/k+1} M_{(k-1)k} + i_{k/k+1} (i_{k/n} - 1) J_k \omega_{ib} - i_{k/k+1} i_{k/n} J_k \omega_{in}$$

上式即为齿轮逐级传递力矩的递推公式。

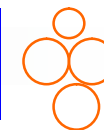
$$k=1, 2, \dots, n$$

下面确定递推初值 M_{01} 。

考虑第一级传动。



2. 经减速器驱动时的传递函数——确定递推初值 M_{01}



设电机的驱动力矩（输出力矩）为 M_c^m ，0号齿轮的转动惯量为 J_0 ，则

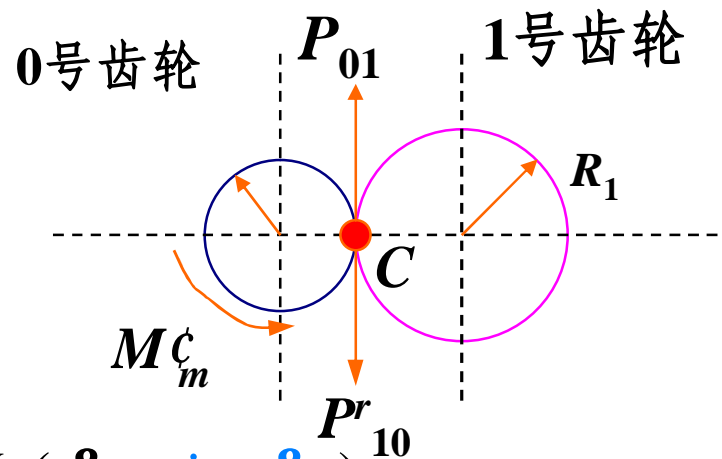
$$J_0 \dot{\omega}_0 = M'_m - M_{10}^r$$

$$M_{01} = -|P_{01}| R_1$$

$$M_{10}^r = -|P_{10}^r| r_0$$

$$\frac{1}{i_{0/1}} M_{01} = M'_m - J_0 \dot{\omega}_0$$

$$\frac{M_{10}^r}{M_{01}} = \frac{r_0}{R_1} = \frac{1}{i_{0/1}}$$



$$M_{01} = i_{0/1} M'_m - i_{0/1} J_0 (\dot{\omega}_{ib} + \dot{\omega}_{b0}) = i_{0/1} M'_m - i_{0/1} J_0 (\dot{\omega}_{ib} + i_{0/n} \dot{\omega}_{bn})$$

$$= i_{0/1} M'_m - i_{0/1} J_0 [\dot{\omega}_{ib} + i_{0/n} (\dot{\omega}_{in} - \dot{\omega}_{ib})]$$

$$= i_{0/1} M'_m + i_{0/1} (i_{0/n} - 1) J_0 \dot{\omega}_{ib} - i_{0/1} i_{0/n} J_0 \dot{\omega}_{in}$$

$$i_{k/n} = \frac{W_{bk}}{W_{bn}}$$

对于 $k=1$ $M_{12} = i_{1/2} M_{01} + i_{1/2} (i_{1/n} - 1) J_1 \dot{\omega}_{ib} - i_{1/2} i_{1/n} J_1 \dot{\omega}_{in}$

$$= i_{1/2} i_{0/1} M'_m + [i_{1/2} i_{0/1} (i_{0/n} - 1) J_0 + i_{1/2} (i_{1/n} - 1) J_1] \dot{\omega}_{ib}$$

$$- (i_{1/2} i_{0/1} i_{0/n} J_0 + i_{1/2} i_{1/n} J_1) \dot{\omega}_{in}$$

$$M_{k(k+1)} = i_{k/k+1} M_{(k-1)k} + i_{k/k+1} (i_{k/n} - 1) J_k \dot{\omega}_{ib} - i_{k/k+1} i_{k/n} J_k \dot{\omega}_{in}$$



2. 经减速器驱动时的传递函数——确定递推初值 M_{23}

$$\begin{aligned} \text{对于 } k=2 \quad M_{23} &= i_{2/3} M_{12} + i_{2/3} (i_{2/n} - 1) J_2 \omega_{ib} - i_{2/3} i_{2/n} J_2 \omega_{in} \\ &= i_{2/3} i_{1/2} i_{0/1} M'_m + [i_{2/3} i_{1/2} i_{0/1} (i_{0/n} - 1) J_0 \\ &\quad + i_{2/3} i_{1/2} (i_{1/n} - 1) J_1 + i_{2/3} (i_{2/n} - 1) J_2] \omega_{ib} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{对于 } k=n-1 \quad M_{(n-1)n} &= i_{(n-1)/n} i_{(n-2)/(n-1)} \mathbf{K} i_{0/1} M'_m + \{ i_{(n-1)/n} i_{(n-2)/(n-1)} \mathbf{K} i_{0/1} (i_{0/n} - 1) J_0 \\ &\quad + i_{(n-1)/n} i_{(n-2)/(n-1)} \mathbf{K} i_{1/2} (i_{1/n} - 1) J_1 + \mathbf{K} + i_{(n-1)/n} [i_{(n-1)/n} - 1] J_{n-1} \} \omega_{ib} \\ &\quad - [i_{(n-1)/n} i_{(n-2)/(n-1)} \mathbf{K} i_{0/1} i_{0/n} J_0 + i_{(n-1)/n} i_{(n-2)/(n-1)} \mathbf{K} i_{1/2} i_{1/n} J_1 + \mathbf{K} \\ &\quad + i_{(n-1)/n} i_{(n-1)/n} J_{n-1}] \omega_{in} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{(n-1)n} &= i_{0/n} M'_m + \{ i_{0/n} (i_{0/n} - 1) J_0 + i_{1/n} (i_{1/n} - 1) J_1 + \mathbf{K} + i_{n(n-1)} [i_{n(n-1)} - 1] J_{n-1} \} \omega_{ib} \\ &\quad - [i_{0/n}^2 J_0 + i_{1/n}^2 J_1 + \mathbf{K} + i_{(n-1)/n}^2 J_{n-1}] \omega_{in} = i_{0/n} M'_m + J_i \omega_{ib} - J_{ep} \omega_{in} \end{aligned}$$

$$J_i = i_{0/n} (i_{0/n} - 1) J_0 + i_{1/n} (i_{1/n} - 1) J_1 + \mathbf{K} + i_{(n-1)/n} [i_{(n-1)/n} - 1] J_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} i_{k/n} (i_{k/n} - 1) J_k \quad \text{减速器的干扰转动惯量}$$

$$J_{ep} = i_{0/n}^2 J_0 + i_{1/n}^2 J_1 + \mathbf{K} + i_{(n-1)/n}^2 J_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} i_{k/n}^2 J_k$$

J_{ep} 为减速器的等效转动惯量。

$$M_{12} = i_{1/2} i_{0/1} M'_m + [i_{1/2} i_{0/1} (i_{0/n} - 1) J_0 + i_{1/2} (i_{1/n} - 1) J_1] \omega_{ib} - (i_{1/2} i_{0/1} i_{0/n} J_0 + i_{1/2} i_{1/n} J_1) \omega_{in} \quad \star$$

$$M_{k(k+1)} = i_{k/k+1} M_{(k-1)k} + i_{k/k+1} (i_{k/n} - 1) J_k \omega_{ib} - i_{k/k+1} i_{k/n} J_k \omega_{in}$$

2. 经减速器驱动时的传递函数

2) 平台台体的传递函数

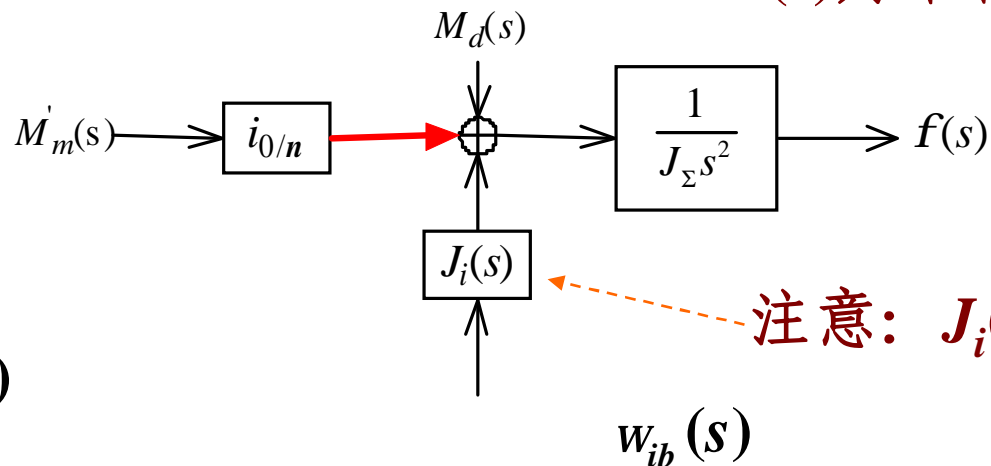
设平台台体的转动惯量为 J ，作用在稳定轴上的干扰力矩为 M_d ，则

$$J\dot{w}_{ip} = M_{(n-1)n} + M_d = i_{0/n}M'_m + J_i\dot{w}_{ib} - J_{ep}\dot{w}_{in} + M_d$$

由于 $w_{in} = w_{ip}$ $(J + J_{ep})\dot{w}_{ip} = i_{0/n}M'_m + J_i\dot{w}_{ib} + M_d$

记 $J_S = J + J_{ep}$ ，则由上式得

$f(s)$ 为平台的旋转角



$$w_{ip}(s) = s f(s)$$

$$w_{ib}(s)$$

$$J_S s w_{ip}(s) = i_{0/n} M'_m(s) + J_i s w_{ib}(s) + M_d(s)$$

$$M_{(n-1)n} = i_{0/n} M'_m + J_i \dot{w}_{ib} - J_{ep} \dot{w}_{in}$$





4.3 单轴陀螺稳定平台

4.3.1 单轴稳定平台的方块图及传递函数





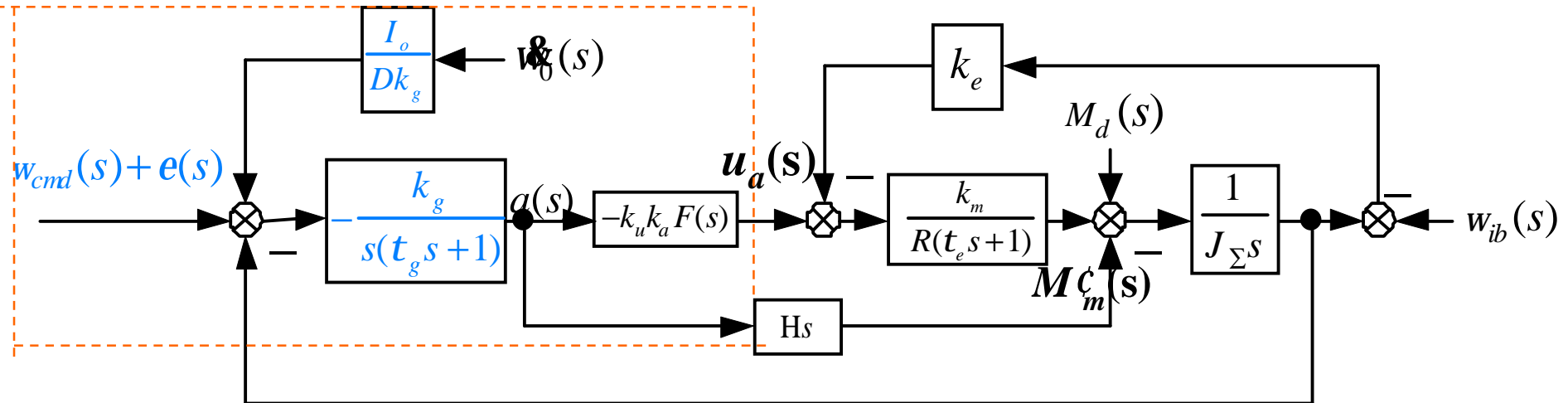
4.3.1 单轴稳定平台的方块图及传递函数

1. 积分陀螺单轴稳定平台的传递函数
2. 双自由度角位置陀螺单轴稳定平台的传递函数
3. 挠性陀螺单轴稳定平台传递函数



1. 积分陀螺单轴稳定平台的传递函数

积分陀螺的方块图p29 以直接驱动式单轴平台为研究对象



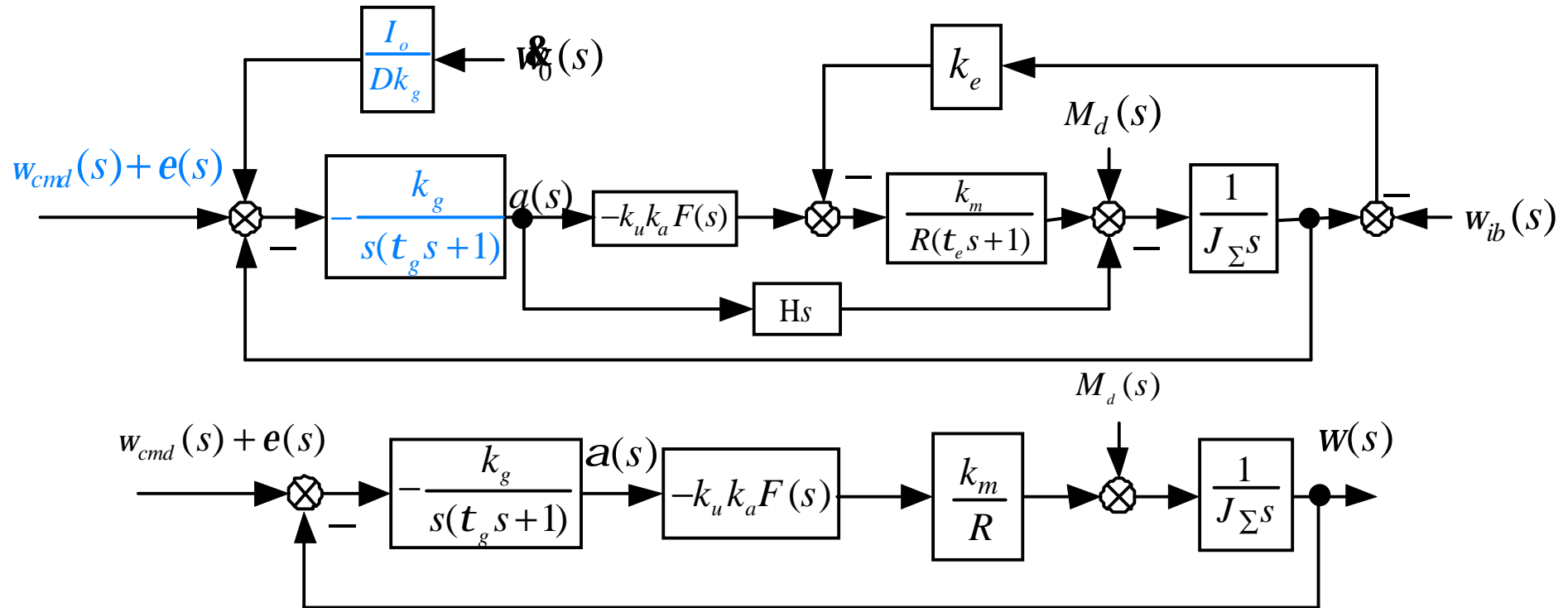
$$M'_m(s) = \frac{k_m}{R} \frac{1}{t_e s + 1} [u_a(s) - k_e w'_m(s)] \quad \frac{w_{ip}(s)}{M_\Sigma(s)} = \frac{1}{J_s}$$

考虑了陀螺输出角变化率 $\dot{\alpha}$ 引起的陀螺力矩对平台稳定轴的影响。

环节 $-k_u k_a F(s)$ 中的负号是由于力矩马达产生的伺服力矩与陀螺输出反号， k_u 为陀螺信号器的传递函数， k_a 为电子网络放大系数， $F(s)$ 为校正网络的传递函数。



1. 积分陀螺单轴稳定平台的传递函数——直接驱动式单轴平台

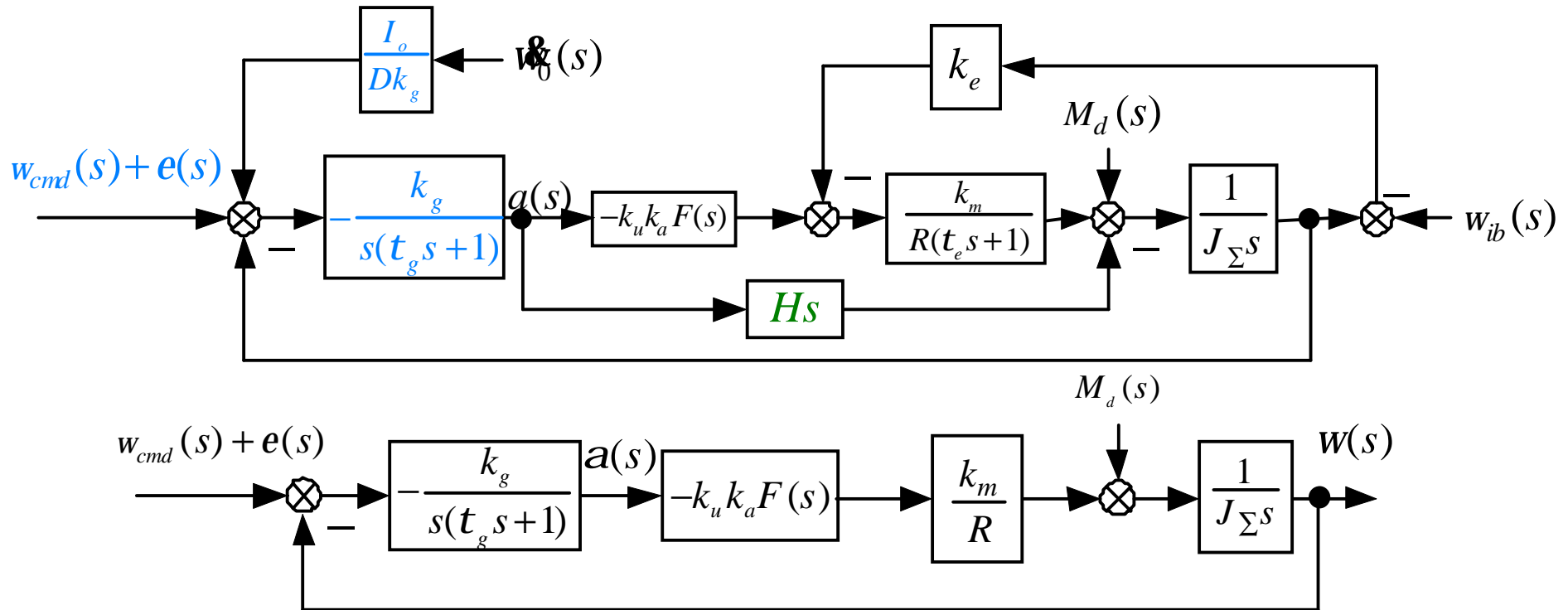


(1) 因为 \dot{w}_0 反映了沿陀螺输出轴方向的角加速度对平台稳定轴的影响，而平台稳定轴与陀螺输入轴方向相同，与陀螺输出轴方向正交，所以 \dot{w}_0

实质上反映了三轴平台正交轴之间的交叉耦合影响，而交叉耦合是较弱的，此处不予考虑。



1. 积分陀螺单轴稳定平台的传递函数——直接驱动式单轴平台



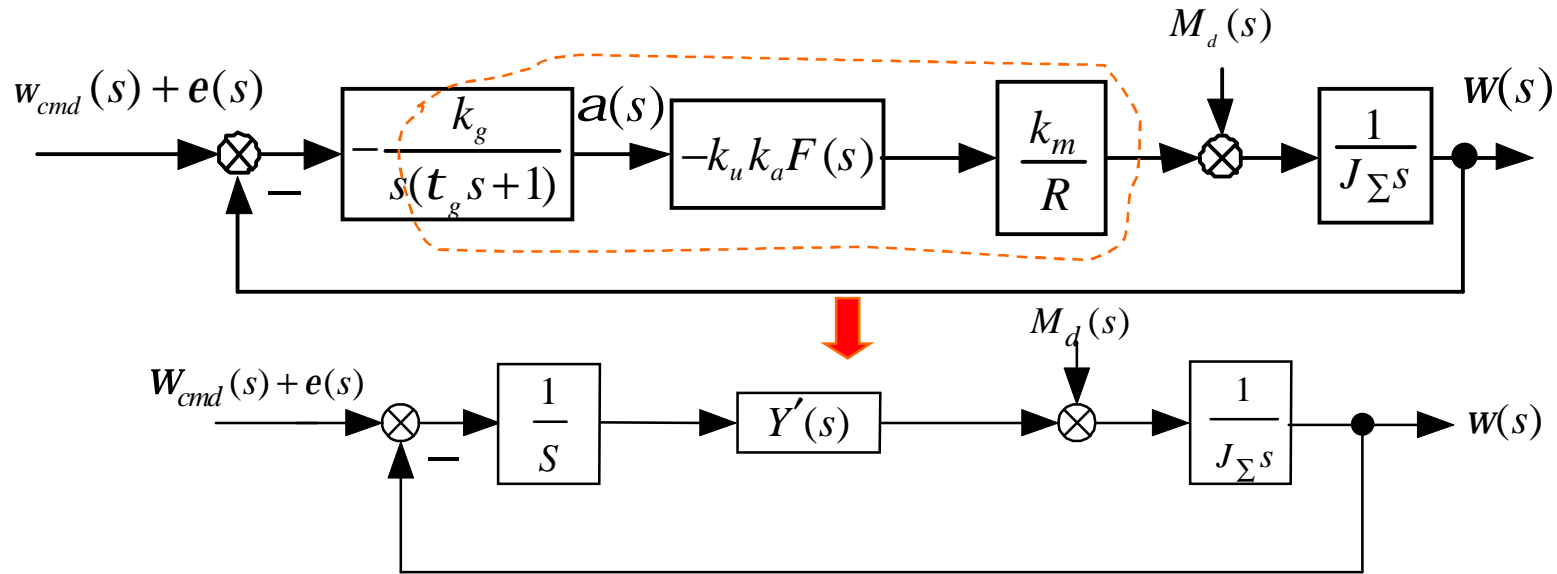
(2) 所用陀螺的角动量 H 一般都较小（如液浮陀螺），所以作用在稳定轴上的陀螺力矩 $H\dot{\omega}$ 可略去不计。

(3) 虽然 $e = k_e \omega$ 在系统中具有负反馈校正作用，但比校正网络所起的校正作用弱得多，在系统分析中可略去不计。

(4) 电机的时间常数 τ_e 是毫秒级的，电机的带宽远高于平台的带宽，所以电机的过渡过程可以不考虑。



1. 积分陀螺单轴稳定平台的传递函数——直接驱动式单轴平台



$$Y'(s) = \frac{k_g k_u k_a k_m F(s)}{R(t_g s + 1)}$$

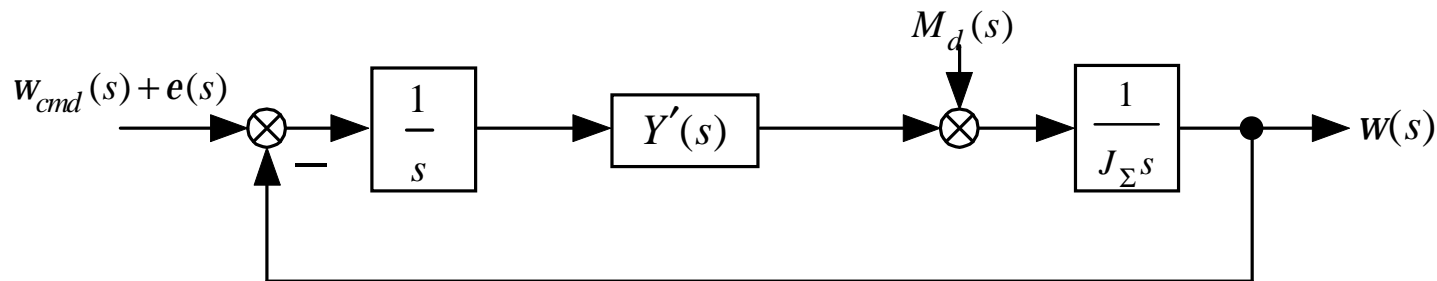
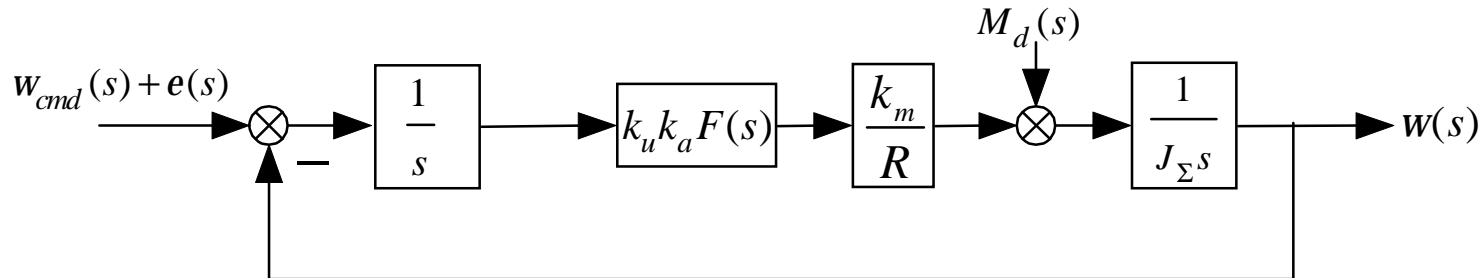
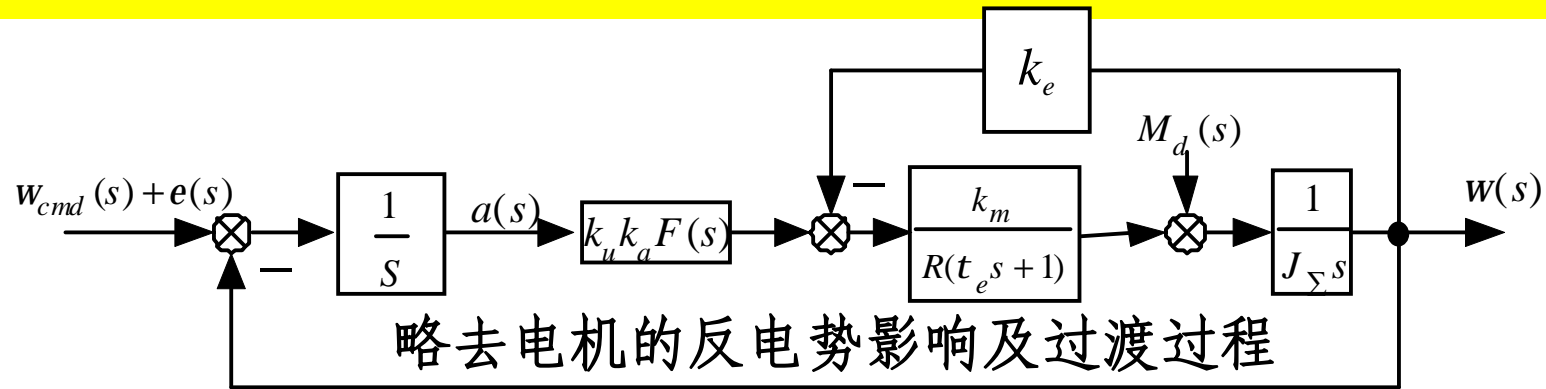
稳定平台的开环传递函数为



$$Y_0(s) = \frac{Y'(s)}{J_\Sigma s^2}$$



2. 双自由度角位置陀螺单轴稳定平台的传递函数



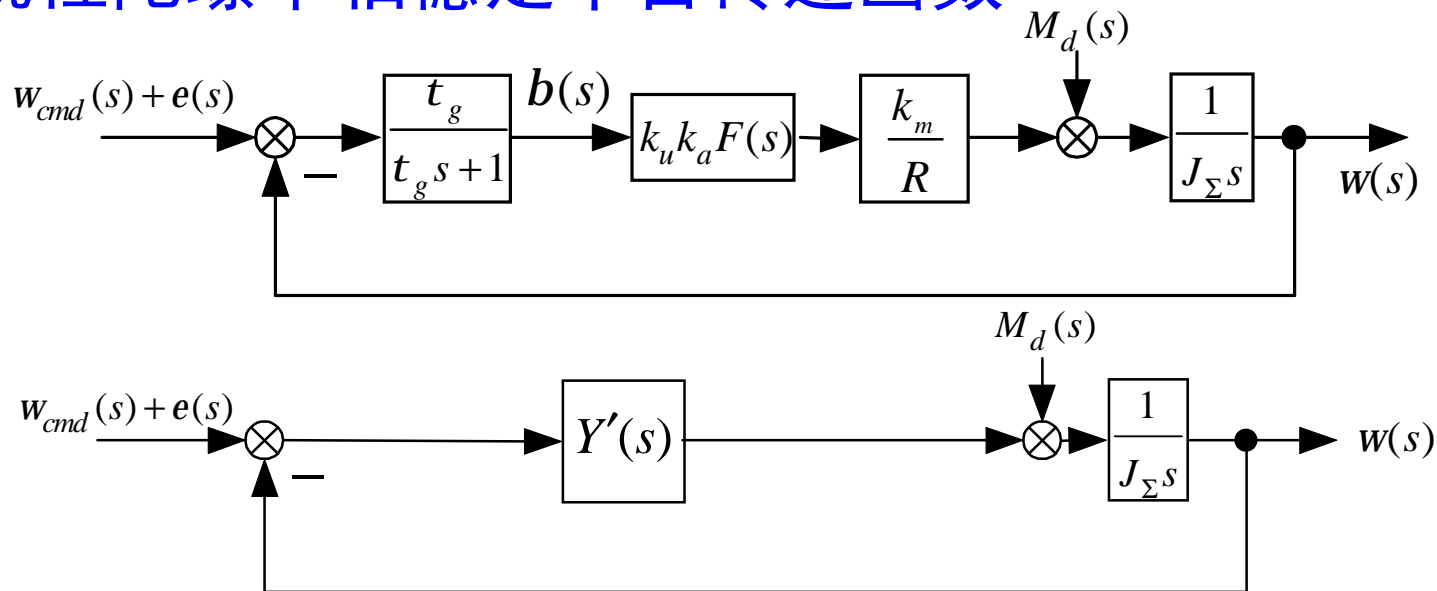
$$Y'(s) = \frac{k_u k_a k_m F(s)}{R}$$

稳定平台的开环传递函数为

$$Y_0(s) = \frac{Y'(s)}{J_\Sigma s^2}$$



3. 挠性陀螺单轴稳定平台传递函数



可得稳定平台的开环传递函数 $Y_0(s) = \frac{Y'(s)}{J_\Sigma s}$ $Y_0(s) = \frac{Y'(s)}{J_\Sigma s^2}$

$$Y'(s) = \frac{t_g k_u k_a k_m F(s)}{R(t_g s + 1)}$$


有何不同?

挠性陀螺单轴稳定平台比前两种稳定平台的开环传递函数少一个积分环节，要达到与前两种稳定平台相同的无静差度，在校正环节中需增加一个积分环节，这将引起相位滞后，系统的设计难度比前两种平台大。

如果挠性陀螺的时间常数 τ_g 很大，则传递函数近似为

$$\frac{b(s)}{f(s)} \approx -1$$

此时，挠性陀螺可近似看作一个角位置陀螺。



思考题：

分析基座为摇摆运动时，引起的平台干扰力矩的表达形式。



The end

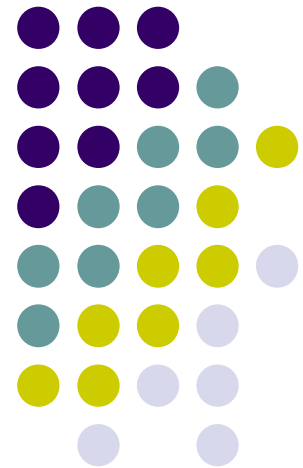
n Thank you for attention!

惯性导航系统原理

3 捷联式惯导系统

程向红

2010.03.19

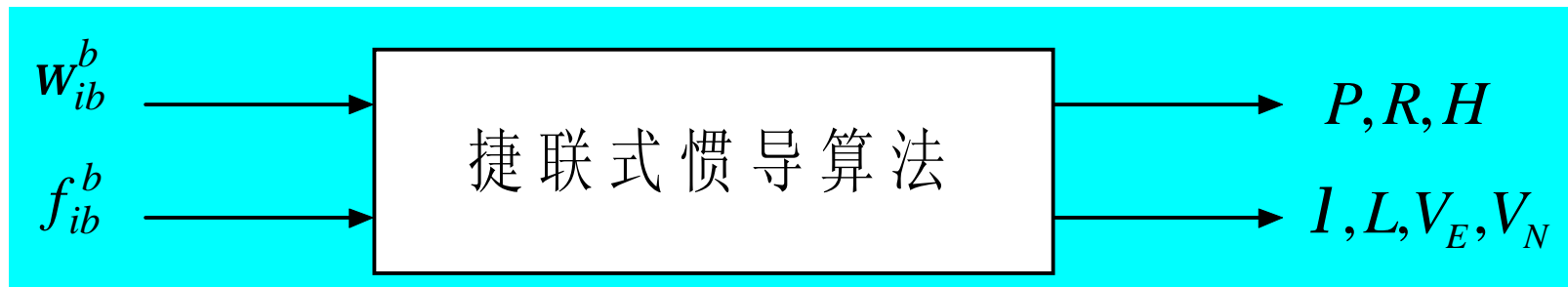
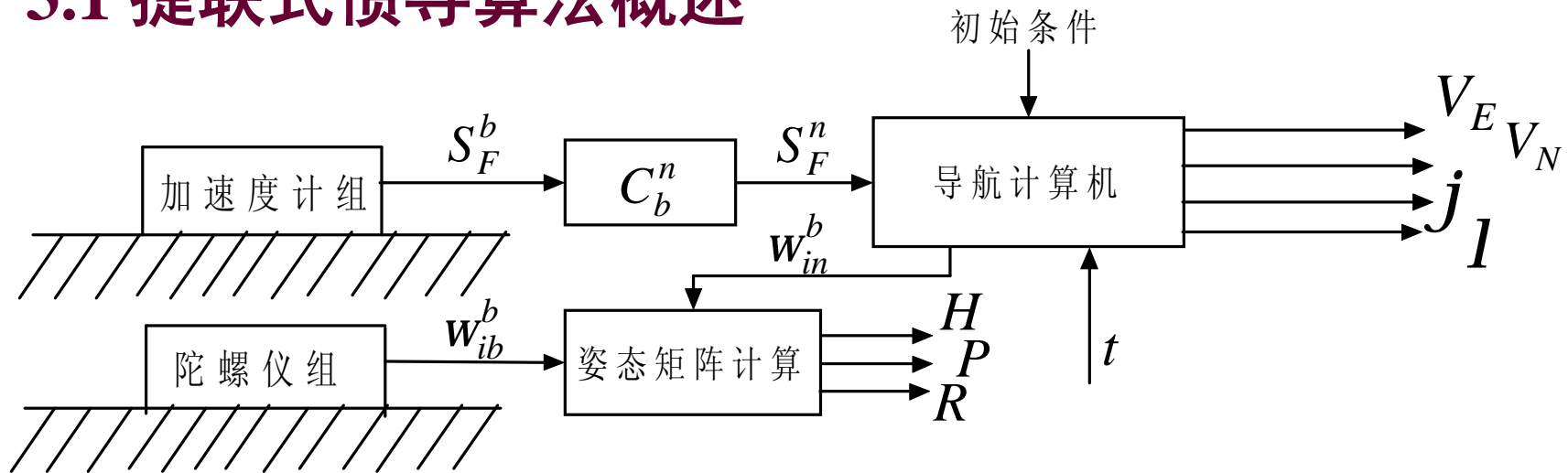




3 捷联式惯导系统

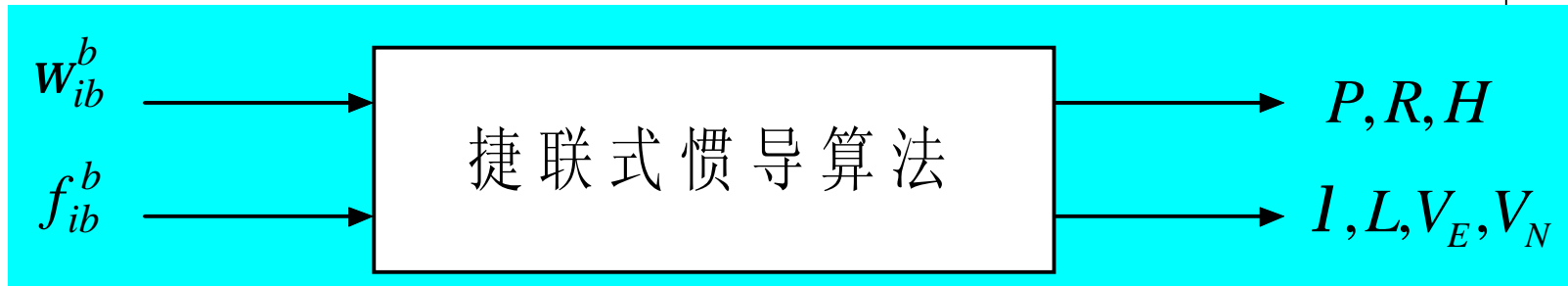
- | 3.1 捷联式惯导算法概述
- | 3.2 姿态矩阵的计算
- | 3.3 姿态矩阵计算机执行算法

3.1 捷联式惯导算法概述



捷联式惯导系统是一个信息处理系统，就是将载体上安装的惯性仪表所测量的载体运动信息，经过计算处理成所需要的导航信息。

捷联式惯性导航系统=信息处理系统



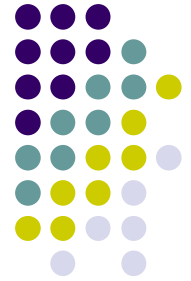
根据捷联式惯导的应用和功能要求不同，计算的内容和要求，有很大的差别。常有

SINS——Strapdown Inertial Navigation Systems

SVRU——Strapdown Vertical Reference Unit

SAHRS——Strapdown Attitude and Heading Reference Systems

IMU——Inertial measurement Unit



接联式惯导的算法的基本内容

- | (1) 系统的启动和自检测
- | (2) 系统初始化
- | (3) 惯性仪表的误差补偿
- | (4) 姿态矩阵的计算
- | (5) 导航计算
- | (6) 制导和控制信息的提取



(1) 系统的启动和自检测

系统启动后，各个部分的工作是否正常，要通过自检测程序加以检测，其中包括电源、惯性仪表、计算机以及计算机软件。

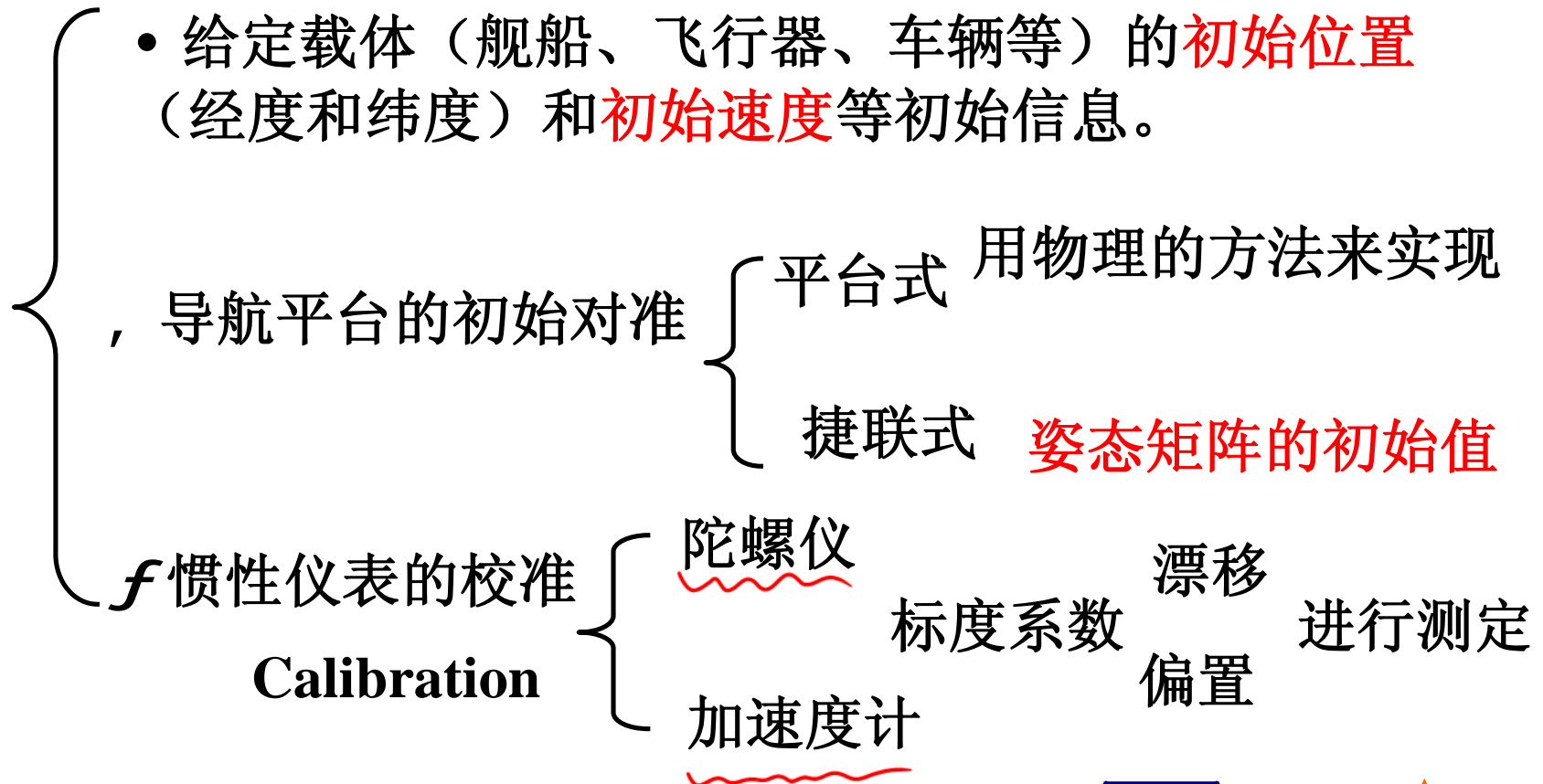
通过自检测，发现有不正常，则发出告警信息(或故障码)。系统的自检测是保证系统进入导航状态后能正常工作、提高系统可靠性的措施。

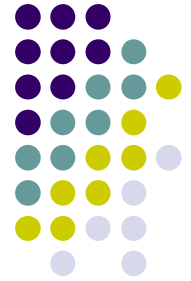


(2) 系统初始化



为何要初始化?





(3) 惯性仪表的误差补偿

对捷联式惯导系统来说，由于惯性仪表直接安装在载体上，因此，载体的线运动和角运动都引起较大的误差。

为了保证系统的精度，必须对惯性仪表的误差进行补偿，最好的补偿方法是计算机补偿。

在计算机中通过专用的软件来实现误差补偿。





(4) 姿态矩阵的计算

姿态矩阵的计算是捷联式惯导算法中最重要的一部分，也是捷联式系统所特有的。

不管捷联式惯导应用和功能要求如何，姿态矩阵的计算却是不可少的。姿态矩阵算法是本章重点讨论的内容。

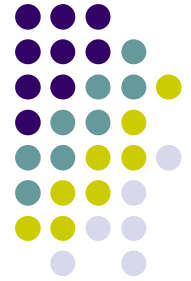




(5) 导航计算

导航计算就是把加速度计的输出信息变换到导航坐标系，然后，计算载体速度、位置等导航信息。





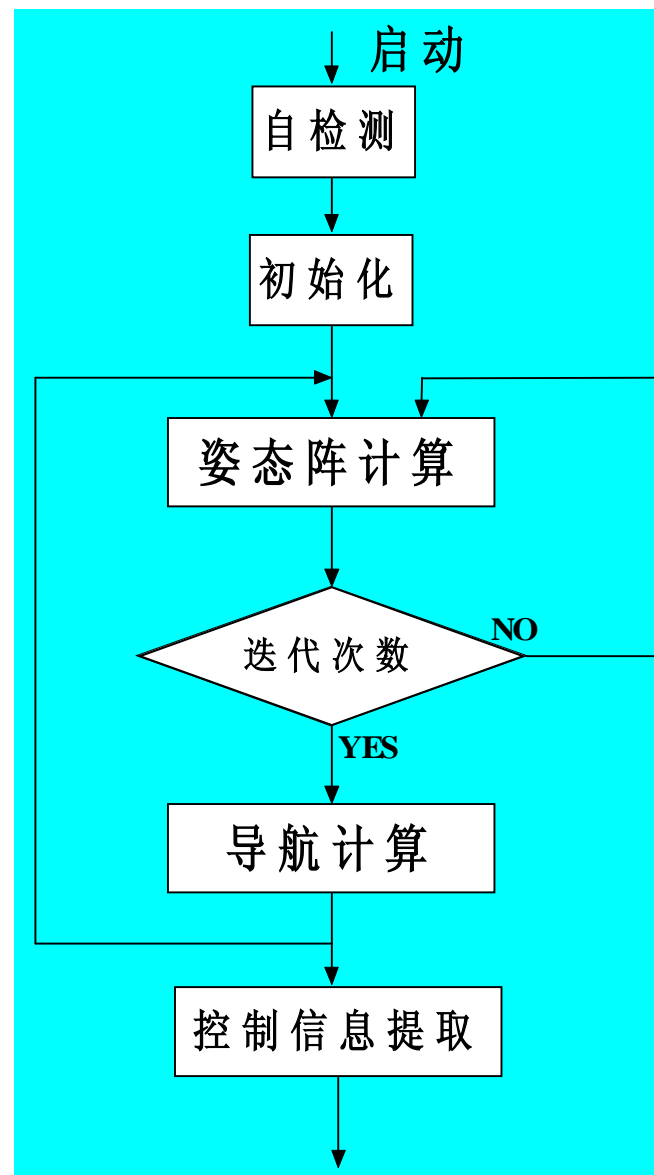
(6) 制导和控制信息的提取

制导和控制信息的提取，载体的**姿态**既可用于显示也是控制系统最基本的控制信息。

此外，载体的**角速度**和**线速度**信息也都是控制载体所需要的信息。

这些信息可以从**姿态矩阵的元素**和**陀螺加速度计的输出**中提取出来。

捷联式惯导系统算法流程图



[返回9](#)



3.2 姿态矩阵的计算

捷联式惯导中，载体**地理位置**就是地理坐标系相对地球坐标系的方位。而载体的**姿态和航向**则是**载体坐标系**相对于**地理坐标系**的方位关系。确定两个坐标系的方位关系问题，是力学中的刚体定点转到理论。在刚体定点转动理论中，描述动坐标系相对参考坐标系方位关系的方法有多种。

三参数法 欧拉角法，是欧拉在1776年提出的。

四参数法 四元数法。威廉·哈密顿(William Hamilton)在1843年发明的，首先在数学中引入四元数，以后用在刚体定位问题。凯里·克莱茵(Cayley-Klein)参数法，是在1897年提出的。

九参数法 基于方向余弦的概念，也称 方向余弦法。



3.2 姿态矩阵的计算

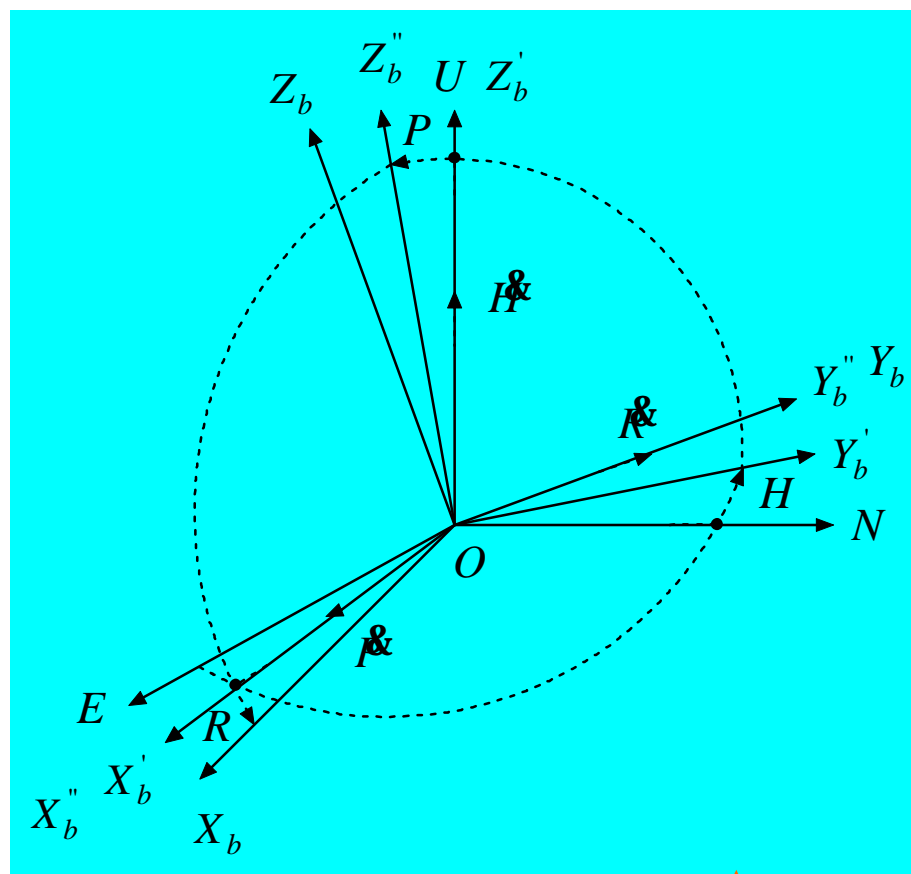
- | **3.2.1** 欧拉角法
- | **3.2.2** 方向余弦法
- | **3.2.3** 四元数法
- | **3.2.4** 等效转动矢量法

3.2.1 欧拉角法

一个动坐标系相对参考坐标系的方位，完全可以由动坐标系依次绕3个不同的轴转动的3个转角来确定。

如把 $OX_bY_bZ_b$ 作为动坐标系， ENU 作为参考坐标系，则航向角 H ，纵摇角（俯仰角） P 和横摇角（横滚角、倾斜角） R 。就是一组欧拉角。

欧拉角没有严格的定义，根据需要，可以选用不同的欧拉角组。第一次转动，可以绕三个轴中的任一个转动，故有3种可能，第二次有2种可能，第三次也有2种可能。总共有12种可能。



用欧拉角表示的姿态矩阵

$$\begin{bmatrix} X'_b \\ Y'_b \\ Z'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos H & \sin H & 0 \\ -\sin H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix}$$

C_H

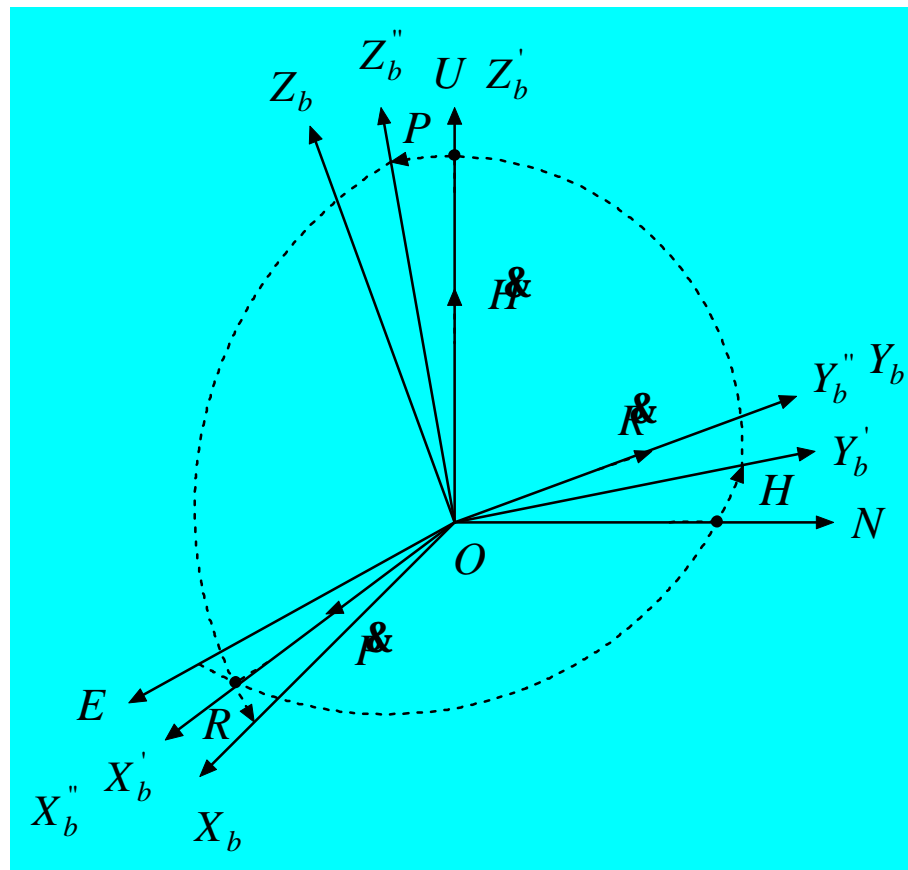
$$\begin{bmatrix} X''_b \\ Y''_b \\ Z''_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos P & \sin P \\ 0 & -\sin P & \cos P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_b \\ Y'_b \\ Z'_b \end{bmatrix}$$

C_P

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & 0 & -\sin R \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R & 0 & \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X''_b \\ Y''_b \\ Z''_b \end{bmatrix}$$

C_R

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos R \cos H - \sin P \sin R \sin H & \cos R \sin H + \sin P \sin R \cos H & -\cos P \sin R \\ -\cos P \sin H & \cos P \cos H & \sin P \\ \sin R \cos H + \sin P \cos R \sin H & \sin R \sin H - \sin P \cos R \cos H & \cos P \cos R \end{bmatrix}$$



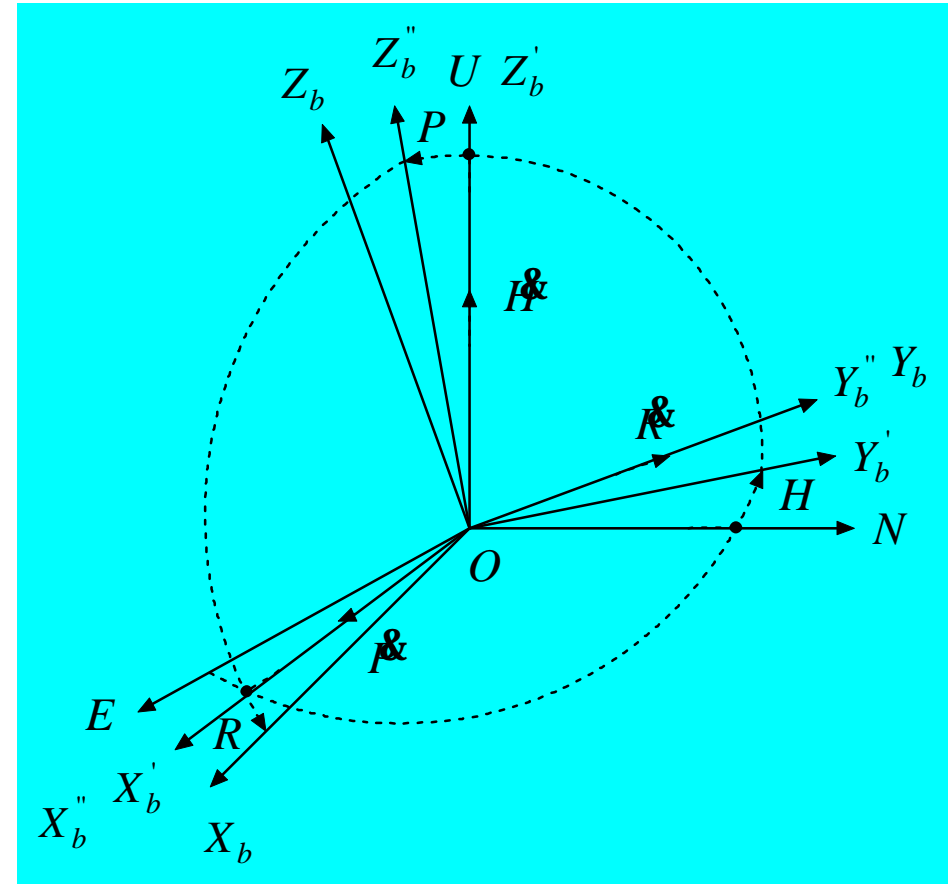
$H \otimes P \otimes R$



欧拉角微分方程

W_{nb}^b ——表示载体坐标系相对地理坐标系的角速度矢量在载体坐标系轴向的分量构成的列矩阵。

$$H \textcircled{R} P \textcircled{R} R$$



$$\begin{bmatrix} W_{nbx}^b \\ W_{nby}^b \\ W_{nbz}^b \end{bmatrix} = C_R C_P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \textcircled{R} \end{bmatrix} + C_R \begin{bmatrix} P \textcircled{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R \textcircled{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{nbx}^b \\ W_{nby}^b \\ W_{nbz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & 0 & -\sin R \cos P \\ 0 & 1 & \sin P \\ \sin R & 0 & \cos P \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \& \\ \& \\ \& \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \& \\ \& \\ \& \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & 0 & -\sin R \cos P \\ 0 & 1 & \sin P \\ \sin R & 0 & \cos P \cos R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_{nbx}^b \\ W_{nby}^b \\ W_{nbz}^b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \& \\ \& \\ \& \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos P} \begin{bmatrix} \cos P \cos R & 0 & \sin R \cos P \\ \sin P \sin R & \cos P & -\cos R \sin P \\ -\sin R & 0 & \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{nbx}^b \\ W_{nby}^b \\ W_{nbz}^b \end{bmatrix}$$

——欧拉角微分方程

求解微分方程 \implies 3个欧拉角 $\begin{cases} \text{航向角 } (H) \\ \text{姿态角 } (P, R) \end{cases} \implies C_n^b$





欧拉角法应用中的问题

• 求解方程可以直接得到航向和姿态信息，欧拉角法得到的姿态阵永远是**正交阵**，用这个矩阵将比力 $f^b \rightarrow f^n$ 信息的坐标变换时，变换后的信息中**不存在非正交误差**。因此，用欧拉角法得到的姿态矩阵无需进行正交化处理。

，欧拉角微分方程中包含三角函数的运算，给实时计算带来困难，当 $P=90^\circ$ 时，方程式出现“**奇点**”，使计算溢出。

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{R} \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos P} \begin{bmatrix} \cos P \cos R & 0 & \sin R \cos P \\ \sin P \sin R & \cos P & -\cos R \sin P \\ -\sin R & 0 & \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{nbx}^b \\ W_{nby}^b \\ W_{nbz}^b \end{bmatrix}$$

垂直发射困难！



3.2.2 方向余弦法

方向余弦表示的姿态矩阵

方向余弦法——用矢量的方向余弦来表示姿态矩阵的方法。

用 i_n, j_n, k_n ——表示沿地理坐标系轴向的单位矢量。

i_b, j_b, k_b ——沿载体坐标系轴向的单位矢量。 i_b 在地理坐标系内的方位完全可以由 i_b 的三个方向余弦来确定，其表达式为

$$i_b = (i_b \cdot i_n)i_n + (i_b \cdot j_n)j_n + (i_b \cdot k_n)k_n \\ \cos(i_b \cdot i_n)$$

$$j_b = (j_b \cdot i_n)i_n + (j_b \cdot j_n)j_n + (j_b \cdot k_n)k_n$$

$$k_b = (k_b \cdot i_n)i_n + (k_b \cdot j_n)j_n + (k_b \cdot k_n)k_n$$

方向余弦法

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_b \cdot i_n & i_b \cdot j_n & i_b \cdot k_n \\ j_b \cdot i_n & j_b \cdot j_n & j_b \cdot k_n \\ k_b \cdot i_n & k_b \cdot j_n & k_b \cdot k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_n \\ j_n \\ k_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix} \quad b = C_n^b n \quad n = \begin{bmatrix} i_n \\ j_n \\ k_n \end{bmatrix}$$

$$C_n^b = \begin{bmatrix} i_b \cdot i_n & i_b \cdot j_n & i_b \cdot k_n \\ j_b \cdot i_n & j_b \cdot j_n & j_b \cdot k_n \\ k_b \cdot i_n & k_b \cdot j_n & k_b \cdot k_n \end{bmatrix}$$





矢量的坐标变换

固定矢量的坐标变换

固定矢量的坐标变换是一个在空间大小和方向都不变的矢量在两个不同方位的坐标系轴向分量之间的变换关系，也即同一个矢量在两个不同的坐标系轴向投影之间的变换关系。

旋转矢量的坐标变换

是指一个矢量大小不变，但在方向上转动了一个位置，这个矢量转动前和转动后在同一个坐标系轴向分量之间的变换关系。

固定矢量的坐标变换

一个矢量 r ，写成载体坐标系轴向分量形式：

$$\underline{r} = X_b \underline{i}_b + Y_b \underline{j}_b + Z_b \underline{k}_b = r^{bT} \underline{b} \quad r^b = \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix}$$

b :载体坐标系
 n :地理坐标系

同一个矢量 r ，如果写成地理坐标系轴向分量形式：

$$\underline{r} = X_n \underline{i}_n + Y_n \underline{j}_n + Z_n \underline{k}_n = r^{nT} \underline{n} \quad r^n = \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} i_n \\ j_n \\ k_n \end{bmatrix}$$

由于 r 是同一个矢量，故

$$\underline{r}^{bT} \underline{b} = r^{nT} \underline{n} \quad \underline{b} = C_n^b \underline{n}$$

$$r^b = C_n^b r^n$$

由于正交阵，故

$$(C_n^b)^T = (C_n^b)^{-1} = C_b^n$$

$$\underline{r}^{bT} \underline{b} = r^{bT} C_n^b \underline{n} = r^{nT} \underline{n}$$



两边求转置

$$\underline{r}^{bT} C_n^b = r^{nT} \xrightarrow{\hspace{2cm}} (C_n^b)^T (r^{bT})^T = (r^{nT})^T$$

$$r^n = C_b^n r^b$$

旋转矢量的坐标变换

r —— 转动前的矢量

r' —— 转动后的矢量

$$r^b = C_n^b r^n$$

假定有一个动坐标系和矢量固连，在矢量转动前，取动坐标系 b 和参考坐标系 n 重合，则：

$$r = r^{nT} n$$

$$r' = r^{bT} b$$

由于动坐标系随同矢量转动，故 $r^{bT} = r^{nT}$

互逆

$$b = C_n^b n$$

$$r' = r^{nT} C_n^b n$$

如果用 r' 表示转动后的矢量在参考坐标系轴向的分量构成的矩阵，则

$$r' = r'^{nT} n = r^{nT} C_n^b n$$

$$r'^{nT} = r^{nT} C_n^b$$

$$r'^n = C_b^n r^n$$

由于坐标系不动而是矢量转动，它相应于矢量固定时坐标系方向转动

方向余弦矩阵微分方程

由矢量相对导数和绝对导数的关系式

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_n = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r}$$

假定地理坐标系为参考坐标系，作为参考坐标系认为它在空间是不动的，即

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_n = 0$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_b = -\mathbf{W}_{nb} \times r$$

$$\mathbf{r}_b = -[\mathbf{W}_{nb}^b \times] r_b = -\mathbf{W}_{nb}^{bk} r_b$$

$$[\mathbf{W}_{nb}^b \times] = \mathbf{W}_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -W_{nbz} & W_{nby} \\ W_{nbz} & 0 & -W_{nbx} \\ -W_{nby} & W_{nbx} & 0 \end{bmatrix}$$

载体坐标系相对地理坐标系的转动角速度在b系轴向分量的反对称矩阵 (Skew symmetric matrix)



方向余弦矩阵微分方程

另外，从固定矢量的坐标变换关系式有

$$r^b = C_n^b r^n$$



两边求导 $\dot{r}^b = \dot{C}_n^b r^n + C_n^b \dot{r}^n$

考虑 $\dot{r}^n = 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}^b &= \dot{C}_n^b r^n = \dot{C}_n^b C_b^n r^b \\ \dot{r}_b &= -[W_{nb}^b \times] r_b = -W_{nb}^{bk} r_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -W_{nb}^{bk} = \dot{C}_n^b C_b^n$$

两边同右乘 C_n^b

$$\dot{C}_n^b = -W_{nb}^{bk} C_n^b$$

$$\dot{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$



$$(W_{nb}^{bk})^{-1} = (W_{nb}^{bk})^T = -W_{nb}^{bk}$$





方向余弦矩阵微分方程的几种表示形式

$$\dot{C}_n^b = -W_{nb}^{bk} C_n^b$$

$$\dot{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

式中的角速度都是用载体坐标系内的分量表示的，如果角速度在地理坐标系轴向的分量表示时，则可用角速度反对称矩阵的相似变换来得到。

$$W_{nb}^{bk} = C_n^b W_{nb}^{nk} C_b^n$$

← 左式可以用展开的方式推导

$$W_{nb}^{nk} = C_b^n W_{nb}^{bk} C_n^b$$

$$\dot{C}_n^b = -C_n^b W_{nb}^{nk}$$

$$\dot{C}_b^n = W_{nb}^{nk} C_b^n$$

常用的姿态矩阵微分方程的4种形式。

在捷联惯导系统中，由于陀螺是固联于载体上的，所以直接测量的角速度是载体坐标系轴向的分量。

那么计算时哪个公式最方便？





方向余弦矩阵微分方程

$$\dot{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

陀螺仪测量的是载体相对于惯性空间的角速度 W_{ib}^b
而式中需要的则是 W_{nb}^{bk} 两者的关系为：

$$W_{nb}^{bk} = W_{ib}^{bk} - W_{in}^{bk} = W_{ib}^{bk} - C_n^b W_{ib}^{nk} C_b^n$$

$$\dot{C}_b^n = C_b^n (W_{ib}^{bk} - W_{in}^{bk}) = C_b^n W_{ib}^{bk} - W_{in}^{nk} C_b^n$$

在实时计算上式时，第一项需要用较高的速度计算，用迭代算法时，迭代频率要高，而第二项则可用较低迭代频率计算。可以看作是对第一项的修正。

包括载体的姿态和航向的变换角速度，数值较大（如飞机可达400°/s）

则是地球角速度和载体的位移运动相对地心形成的角速度，这个角速度比较小，一般为每小时几十度。

3.2.2.4 矩阵微分方程的解

$$\mathcal{C}_b^n = C_b^n w_{nb}^{bk}$$

下面是解方程的推导过程。

变系数的齐次微分方程



可用毕卡(Peano-Baker)逼近法求解，积分上式则有

$$C_b^n(t) = C(0) + \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt \quad \text{把等式右边的表达式逐次代入积分号内}$$

第1次代入得 $C_b^n(t) = C(0) + \int_0^t [C(0) + \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt] w_{nb}^{bk} dt$

第2次代入得 $= C(0) + C(0) \int_0^t w_{nb}^{bk} dt + \int_0^t \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt$

$$C_b^n(t) = C(0) + C(0) \int_0^t w_{nb}^{bk} dt + C(0) \int_0^t \int_0^t w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt + \int_0^t \int_0^t \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt$$

这样不断的进行代入，便得到

$$C_b^n(t) = C(0) [I + \int_0^t w_{nb}^{bk} dt + \int_0^t \int_0^t w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt + \int_0^t \int_0^t \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt + \dots]$$

$$\int_0^t \int_0^t w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt = \int_0^t [\int_0^t w_{nb}^{bk} dt] d[\int_0^t w_{nb}^{bk} dt] = \frac{1}{2} (\int_0^t w_{nb}^{bk} dt)^2$$

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t C_b^n(t) w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt w_{nb}^{bk} dt = \frac{1}{6} (\int_0^t w_{nb}^{bk} dt)^3$$

故

$$C_b^n(t) = C(0) [I + \int_0^t w_{nb}^{bk} dt + \frac{1}{2} [\int_0^t w_{nb}^{bk} dt]^2 + \frac{1}{6} [\int_0^t w_{nb}^{bk} dt]^3 + \dots]$$

2010-03-19

$$C_b^n(t) = C(0) e^{\int_0^t w_{nb}^{bk} dt}$$

矩阵微分方程的解

$$C_b^n(t) = C(0)e^{\int_0^t w_{nb}^{bk} dt} \xrightarrow{Dt=t_{n+1}-t_n}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} w_{nb}^{bk} dt = \Delta q_{nb}^{bk} \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

$$C_b^n(t + \Delta t) = C(t)e^{\int_{t_n}^{t_{n+1}} w_{nb}^{bk} dt}$$

$$C_b^n(t + \Delta t) = C(t)e^{\Delta q_{nb}^{bk}}$$

$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = K_1 I + K_2 \Delta q_{nb}^{bk} + K_3 (\Delta q_{nb}^{bk})^2$$

$$\Delta q_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nby}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nby}^b & \Delta q_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix}$$



I—单位阵;**K₁, K₂, K₃**—系数。

如果知道了**K₁, K₂, K₃**三个系数, 则**矩阵指数函数**就可以表示成一个矩阵二次方程。

下面来求三个系数。由矩阵的特征方程 Δq_{nb}^{bk} 来求它的特征值。

$$\det(I I - \Delta q_{nb}^{bk}) = \begin{vmatrix} I & \Delta q_{nbz}^b & -\Delta q_{nby}^b \\ -\Delta q_{nbz}^b & I & \Delta q_{nbx}^b \\ \Delta q_{nby}^b & -\Delta q_{nbx}^b & I \end{vmatrix} \xrightarrow{\hspace{2cm}} I^3 + (\Delta q_{nbx}^b)^2 I + (\Delta q_{nby}^b)^2 I + (\Delta q_{nbz}^b)^2 I = 0$$

$$\text{令 } (\Delta q_{nbx}^b)^2 + (\Delta q_{nby}^b)^2 + (\Delta q_{nbz}^b)^2 = \Delta q_0^2 \xrightarrow{\hspace{2cm}} I^3 + \Delta q_0^2 I = 0 \xrightarrow{\hspace{2cm}} l_1=0 \quad l_{2,3}=\pm j\Delta q_0$$

将矩阵的特征值代入方程 $e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = K_1 I + K_2 \Delta q_{nb}^{bk} + K_3 (\Delta q_{nb}^{bk})^2$

$$l=0, \quad K_1=1$$



矩阵微分方程的解

$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = K_1 I + K_2 \Delta q_{nb}^{bk} + K_3 (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \quad l=0, \quad K_1=1$$

$$l=jDq_0 \quad \rightarrow \quad e^{j\Delta q_0} = K_1 + K_2 j\Delta q_0 + K_3 (j\Delta q_0)^2$$

$$l=-jDq_0 \quad \rightarrow \quad e^{-j\Delta q_0} = K_1 - K_2 j\Delta q_0 + K_3 (-j\Delta q_0)^2 \quad \neq$$

$$e^{j\Delta q_0} + e^{-j\Delta q_0} = 2K_1 - 2K_3 (\Delta q_0)^2 \quad \rightarrow \quad K_3 = \frac{1 - \cos \Delta q_0}{(\Delta q_0)^2}$$

$$e^{j\Delta q_0} - e^{-j\Delta q_0} = 2K_2 \Delta q_0 \quad \rightarrow \quad K_2 = \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0}$$

$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2$$

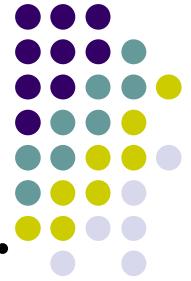
$$\mathcal{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t) \left[I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \right] \quad \text{矩阵微分方程的精确解}$$

这个精确解的前提条件是 $\int_{t_n}^{t_{n+1}} w_{nb}^{bk} dt = \Delta q_{nb}^{bk}$

这个式子只有在 $Dt=t_{n+1}-t_n$ 内角速度矢量 w_{nb} 方向不变的条件下才有意义，由于转动的不可交换性，当 w_{nb} 方向随时间变化时，角速度的积分是无意义的。

用方向余弦法求解姿态矩阵避免了欧拉角法方程退化的现象，可以全姿态工作，但是，由于方向余弦矩阵具有九个元素，所有，解算矩阵微分方程时，实际上是结算九个联立微分方程，一般说来，计算工作量比较大，为了减小计算工作量，可以采用四参数法。



3.2.3 四元数法

四元数理论是数学中的一个古老的分支，1843年由威廉·哈密顿(William Hamilton)首先提出，目的是研究空间几何，一种类似平面问题中使用复数那样的方法。但是，这个理论建立以后，长期没有得到实际应用，直到空间技术出现以后，特别是捷联式制导技术出现以后，这一古老的数学分支，又重新受到人们的重视，得到了实际的应用。

四元数的基本概念

四元数是由1个实数单位1和3个虚数单位*i,j,k*组成的含有4个元的数，其形式为

$$Q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \mathbf{q}$$

标量 矢量



3.2.3 四元数法

- | **3.2.3.1** [四元数的基本概念](#)
- | **3.2.3.2** [四元数理论](#)
- | **3.2.3.3** [矢量坐标变换的四元数描述](#)
- | **3.2.3.4** [四元数和方向余弦矩阵的关系](#)
- | **3.2.3.5** [四元数微分方程](#)

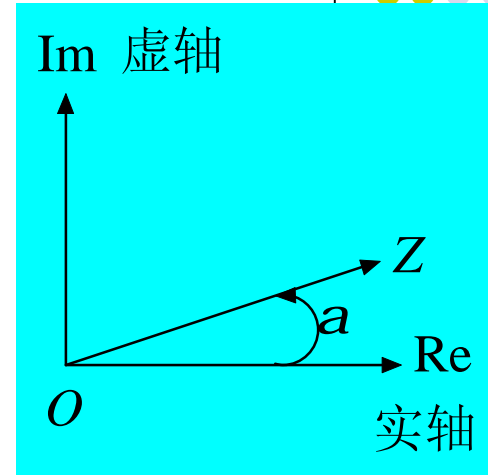
3.2.3.1 四元数的基本概念

在平面问题中，一个复数 $Z=z_1+jz_2$ 可以表示二维空间中的一个矢量。

$$\begin{aligned} Z &= z_1 + jz_2 \\ &= |z|e^{ja} \\ &= |z|\cos a + j|z|\sin a \end{aligned}$$

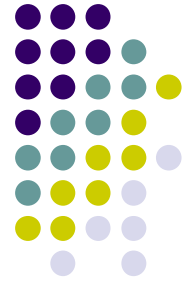
$$j = \sqrt{-1} \implies u = u_x i + u_y j + u_z k$$

$$|u| = 1$$



$$Z = \underbrace{|Z|\cos a}_{q_0} + \underbrace{u_x|Z|\sin a}_{q_1}i + \underbrace{u_y|Z|\sin a}_{q_2}j + \underbrace{u_z|Z|\sin a}_{q_3}k$$

四元数的基本概念



$$= |Z| [\cos a + u_x \sin a \quad i + u_y \sin a \quad j + u_z \sin a \quad k]$$

$Q = Z$ (Quaternions)

$$|Z| \cos a = q_0$$

$$|Z| u_x \sin a = q_1$$

$$|Z| u_y \sin a = q_2$$

$$|Z| u_z \sin a = q_3$$

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$= |Q| e^{ua}$$

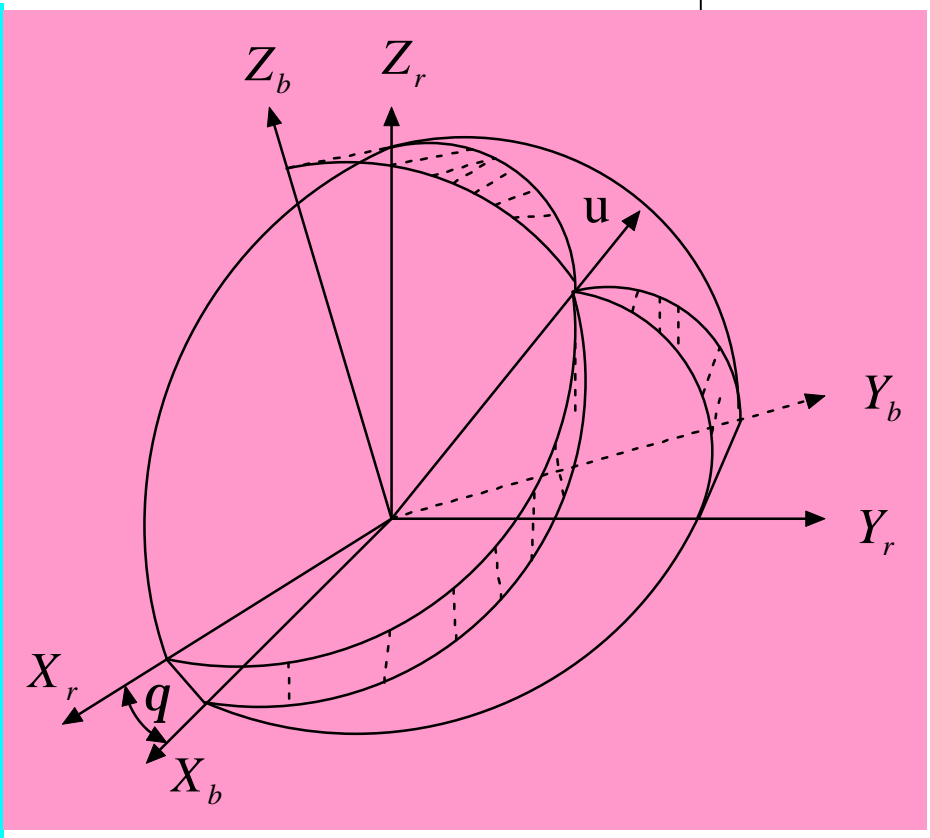
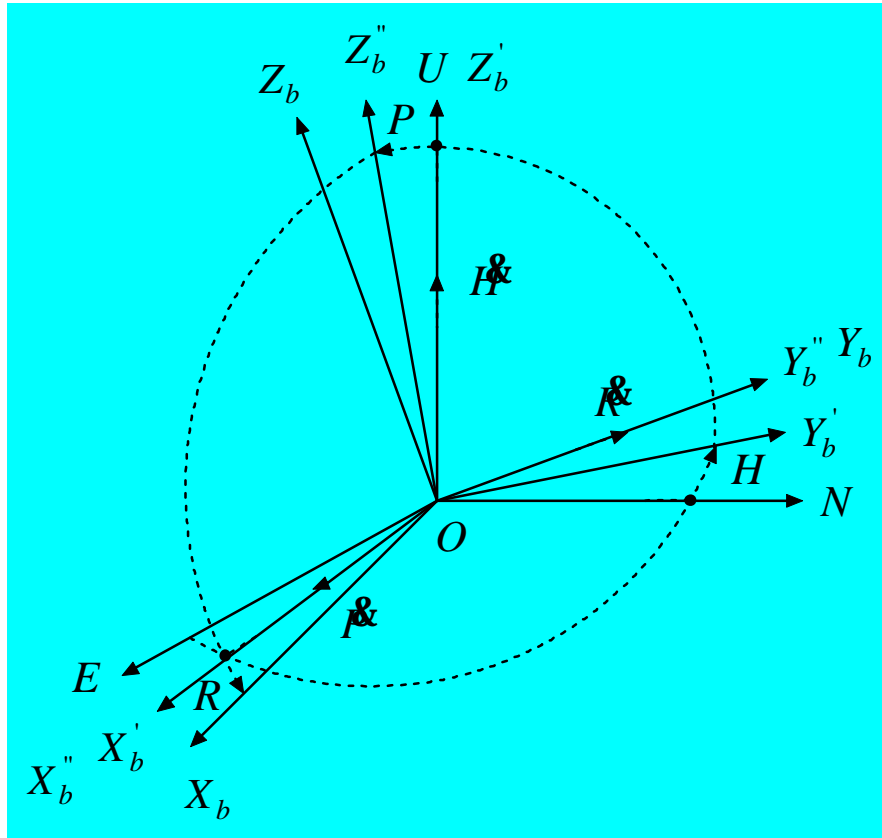
$$= |Q| [\cos \alpha + \mathbf{u} \sin a]$$

——四元数的3种表示形式

由于它具有和复数类似的形式，可看作是复数的推广，因此，也有“超复数”之称。



坐标系的等效转动





四元数的基本概念

如果用 \mathbf{u} 表示欧拉轴向的单位矢量，则动坐标系的方位，完全可由 \mathbf{u} 和 q 两个参数来确定。用 u 和 q 两个参数，可以构造一个四元数，

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{q}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{q}{2} = e^{\frac{1}{2}uq}$$

如果把 \mathbf{u} 写成分量的形式则：

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \cos \frac{q}{2} + u_x \sin \frac{q}{2} i + u_y \sin \frac{q}{2} j + u_z \sin \frac{q}{2} k \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\end{aligned}$$

$$q_0 = \cos \frac{q}{2} \quad q_1 = u_x \sin \frac{q}{2} \quad q_2 = u_y \sin \frac{q}{2} \quad q_3 = u_z \sin \frac{q}{2}$$

四元数是张量为1的四元数，即 $|\mathbf{Q}| = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1$

这样的四元数称作“规范化”的四元数，而用来描述刚体定点转动的四元数就称作变换四元数。





3.2.3.2 四元数理论

- 四元数相等

如果两个四元数对应的元素相等，则两个四元数相等。

- **k** 四元数相加

$$\mathbf{\Lambda} = l_0 + l_1 i + l_2 j + l_3 k$$

$$\mathbf{M} = m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k$$

则 $\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} = l_0 + m_0 + (l_1 + m_1)i + (l_2 + m_2)j + (l_3 + m_3)k$

——对应元素相加

四元数相加，服从一般加法的交换律和结合律，即

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} \quad (\text{交换律})$$

$$(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M}) + \mathbf{N} = \mathbf{\Lambda} + (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \quad (\text{结合律})$$

四元数理论



f 四元数与标量相乘

$$a\Lambda = a l_0 + a l_1 i + a l_2 j + a l_3 k$$

式中 a —— 标量 —— 各个元素分别乘以标量

$$(ab)\Lambda = \Lambda(ba) \quad (\text{交换律})$$

$$a\Lambda = \Lambda a$$

$$(a+b)\Lambda = a\Lambda + b\Lambda \quad (\text{结合律})$$

$$a(\Lambda + \mathbf{M}) = a\Lambda + a\mathbf{M} \quad (\text{分配律})$$

四元数理论

“ 四元数与四元数相乘

$$\Lambda = l_0 + l_1 i + l_2 j + l_3 k$$

$$\mathbf{M} = m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = (l_0 + l_1 i + l_2 j + l_3 k) \circ (m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k)$$

$$= l_0 m_0 - l_1 m_1 - l_2 m_2 - l_3 m_3 + l_0 (m_1 i + m_2 j + m_3 k)$$

$$+ m_0 (l_1 i + l_2 j + l_3 k) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = l_0 m_0 + l_0 \mathbf{m} + m_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{m}$$

——乘积的矢量形式



四元数理论



$$\Lambda \bullet \mathbf{M} = l_0 m_0 - l_1 m_1 - l_2 m_2 - l_3 m_3 + i(l_0 m_1 + l_1 m_0 + l_2 m_3 - l_3 m_2) \\ + j(l_0 m_2 + l_2 m_0 + l_3 m_1 - l_1 m_3) + k(l_0 m_3 + l_3 m_0 + l_1 m_2 - l_2 m_1)$$

——乘积的四元数形式

$$\begin{cases} n_0 = l_0 m_0 - l_1 m_1 - l_2 m_2 - l_3 m_3 \\ n_1 = l_0 m_1 + l_1 m_0 + l_2 m_3 - l_3 m_2 \\ n_2 = l_0 m_2 + l_2 m_0 + l_3 m_1 - l_1 m_3 \\ n_3 = l_0 m_3 + l_3 m_0 + l_1 m_2 - l_2 m_1 \end{cases} \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ l_1 & l_0 & -l_3 & l_2 \\ l_2 & l_3 & l_0 & -l_1 \\ l_3 & -l_2 & l_1 & l_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}(n) = M(l)\mathbf{Q}(m)$ -----矩阵四元数

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(n) &= [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T \\ \mathbf{Q}(l) &= [l_0 \quad l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T \\ \mathbf{Q}(m) &= [m_0 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3]^T \end{aligned} \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & m_3 & -m_2 \\ m_2 & -m_3 & m_0 & m_1 \\ m_3 & m_2 & -m_1 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

四元数理论

$M(l)$ 和 $M^*(m)$ 除元素不同外，其核互为转置。
这种四元数乘积的矩阵形式，也可推广到三个
以上的四元数乘积。如：

$$\begin{aligned} Q(\Lambda \circ M \circ P) &= M(l)Q(M \circ P) = M(l)M^*(P)Q(m) \\ &= M^*(P)Q(\Lambda \circ M) = M^*(P)M(l)Q(m) \\ &M(l)M^*(P) = M^*(P)M(l) \end{aligned}$$

说明 M^* 和 M 具有可交换性。而一般的矩阵相乘，则是不可交换的。

$$\begin{aligned} Q(\Lambda \circ M \circ P) &= M(l)Q(M \circ P) = M(l)M(m)Q(P) \\ &= M(\Lambda \circ M)Q(P) \\ M(\Lambda \circ M) &= M(l)M(m) \end{aligned}$$

——顺序相乘

$$\begin{aligned} Q(\Lambda \circ M \circ P) &= M^*(P)Q(\Lambda \circ M) = M^*(P)M^*(m)Q(l) \\ &= M^*(M \circ P)Q(l) \\ M^*(M \circ P) &= M^*(P)M^*(m) \end{aligned}$$

——逆序相乘

类似正交阵的乘积的转置或方阵乘积的求逆，也是逆序

四元数理论



$$\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$$

$$(\Lambda \circ M) \circ P = \Lambda \circ (M \circ P) \quad \text{——结合律}$$

$$\Lambda \circ (M + P) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ P \quad \text{——分配律}$$

n四元数的共轭

如果一个四元数为 $L = I + I_1$

则定义其共轭四元数为 $L^* = I - I_1$

推理1 $(L + M)^* = L^* + M^*$ ——四元数之和的共轭等于共轭之和

推理2 $(L \circ M)^* = M^* \circ L^*$ ——两个四元数之积的共轭等于共轭四元数等于两个四元数共轭之积取相反的顺序。

o四元数的范数

四元数的范数定义为 $\|\Lambda\| \equiv I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$

四元数理论

$$\|\Lambda\| \equiv I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$$

$$=L \circ L^* = L^* \circ L$$

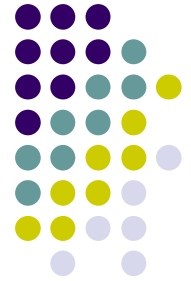
$\|L\|=1$ 的四元数称为规范化的四元数。

$$\|L \circ M\| = \|L\| \|M\| = \|M\| \|L\|$$

‡ 四元数的逆

$$\Lambda^{-1} = \frac{\Lambda^*}{\|\Lambda\|}$$

$$\text{则 } L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1}$$





3.2.3.3 矢量坐标变换的四元数描述

一个矢量 \mathbf{r} 在参考坐标系（这里用地理坐标系作参考系）轴向的分量形式为

$$\mathbf{r} = x_n \mathbf{i}_n + y_n \mathbf{j}_n + z_n \mathbf{k}_n$$

式中 x_n, y_n, z_n 为 \mathbf{r} 在地理坐标系轴向的分量。
 $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ 为地理坐标系轴向的单位矢量。

用 x_n, y_n, z_n 把 \mathbf{r} 写成四元数形式即：

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{0} + x_n \mathbf{i} + y_n \mathbf{j} + z_n \mathbf{k} = \mathbf{0} + \mathbf{r}$$

\mathbf{R}_n 就叫做矢量 \mathbf{r} 在地理坐标系上的四元数影像。
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是四元数的虚数单位，而 \mathbf{r} 则是四元数的矢量部分。

显然，如果认为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 和 $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ 重合，则四元数的矢量部分就是三维空间的矢量 \mathbf{r} 本身。

旋转矢量的坐标变换



[定义] 假设矢量 \mathbf{r} 绕通过定点“O”的某一轴转动了一个角度 q ，则和矢量固联的动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为：

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{q}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{q}{2}$$

式中 \mathbf{u} 为转轴方向的单位矢量。这个四元数的范数为

$$\|\mathbf{Q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad \text{称作“规范化”的四元数.}$$

转动前的矢量用 \mathbf{r} 表示，转动后的矢量用 \mathbf{r}' 表示。

则 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 的关系可由四元数来描述，即 $\mathbf{r}' = \mathbf{Q} \mathbf{r} \mathbf{Q}^*$

$$\mathbf{Q}^* = \cos \frac{q}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{q}{2} \quad \text{四元数的共轭四元数} \quad \mathbf{r} = \mathbf{Q}^* \mathbf{r}' \mathbf{Q}$$

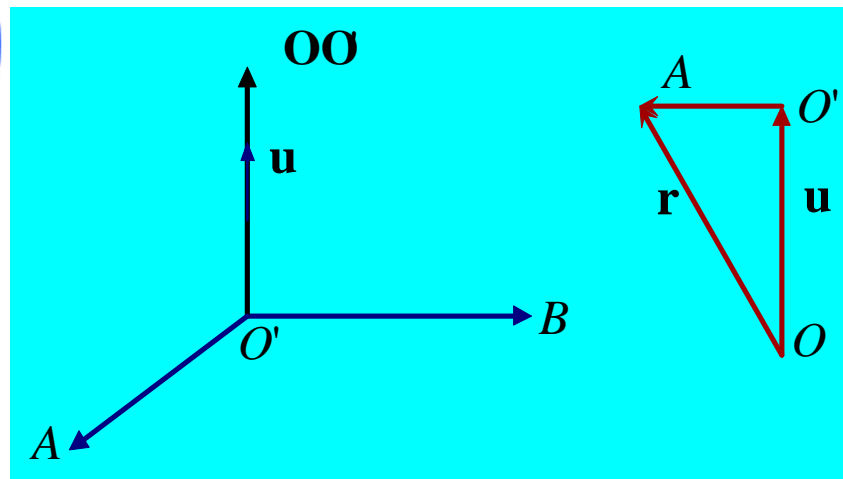
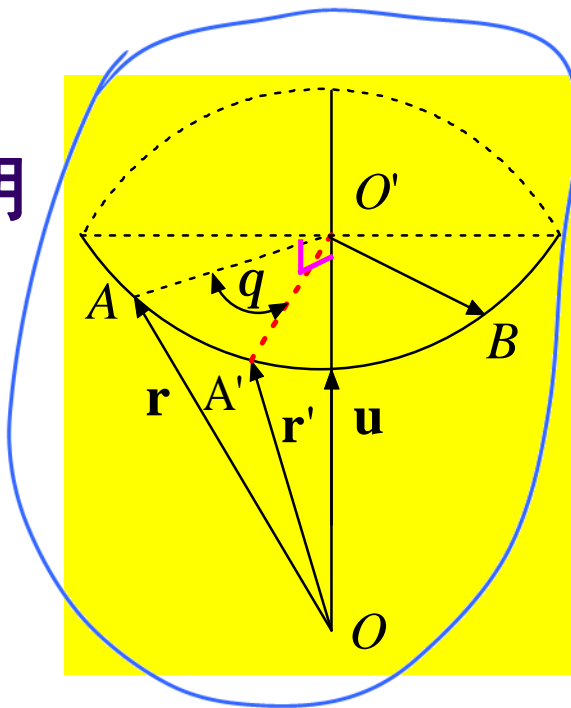
黄式两边同时左乘 \mathbf{Q}^* 右乘 \mathbf{Q} 得 $\mathbf{Q}^* \mathbf{r}' \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^* \mathbf{Q} \mathbf{r} \mathbf{Q}^* \mathbf{Q}$

因为

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* = 1$$

$$\left(\cos \frac{q}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{q}{2} \right) \mathbf{Q} \left(\cos \frac{q}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{q}{2} \right) = \cos^2 \frac{q}{2} + \sin^2 \frac{q}{2} = 1$$

证明



当矢量 r 绕 OO' 旋转时，矢端 A 在空间的轨迹是一个圆，这个圆平面和转轴垂直，圆心为 O' 在旋转轴上。在圆上取一点 B ，使 $\angle AOB=90^\circ$ ，则按矢量关系有下列关系式：

$$OO' = (r \cdot u)u \quad OO' + O'A = r \quad \text{因为} \quad a \cdot b = |a||b|\cos\alpha$$

$$O'A = r - OO' = r - (r \cdot u)u$$

$$OB = u' \cdot O'A = u' \cdot (r - (r \cdot u)u) = u' \cdot r - (r \cdot u)u' \cdot u = u' \cdot r$$

$$OB = u' \cdot r$$

$$L_0 M = l_0 m_0 + l_0 m + m_0 l - l \times m + l' m$$

$$O'A = O'A \cos q + O'B \sin q = \cos q (r - (r \times u)u) + u' r \sin q$$

$$r' = O'O + O'A$$

$$= (r \times u)u + \cos q r - \cos q (r \times u)u + \sin q (u' r)$$

$$= (1 - \cos q)(r \times u)u + \cos q r + \sin q (u' r)$$

如果 $Q = q_0 + q$, $R = r_0 + r$ 则利用式可以写成矢量形式为:

$$Q \circ R = q_0 r_0 + q_0 r + q r_0 - q \times r + q' r$$

利用上式将 $Q \circ r \circ Q^*$ 展开

$$r = R = r_0 + r \quad r_0 = 0$$

$$Q = \cos \frac{q}{2} + u \sin \frac{q}{2}$$

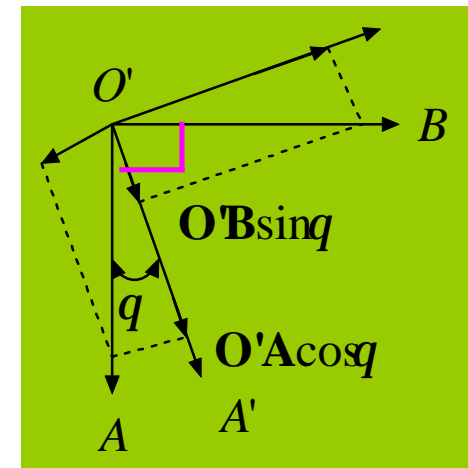
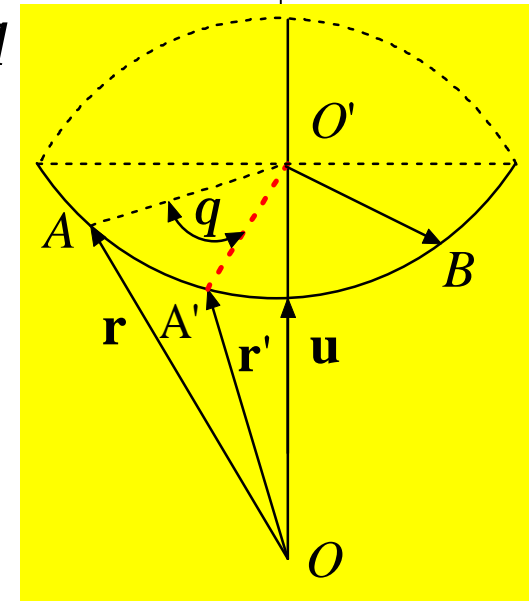
$$Q \circ r = \cos \frac{q}{2} r - u \sin \frac{q}{2} \cdot r + (u \times r) \sin \frac{q}{2}$$

$$= -\sin \frac{q}{2} (u \cdot r) + \cos \frac{q}{2} r + (u \times r) \sin \frac{q}{2}$$

$$O'A = r - (r \times u)u$$

$$O'B = u' r$$

证明



$$\mathbf{Q}\mathbf{o}\mathbf{R} = q_0 r_0 + q_0 \mathbf{r} + \mathbf{q} r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}$$

推导

$$\mathbf{Q}\mathbf{o}\mathbf{r}\mathbf{o}\mathbf{Q}^* = (-\sin \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \cos \frac{q}{2} \mathbf{r} + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \sin \frac{q}{2}) \mathbf{o} (\cos \frac{q}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{q}{2})$$

$$= -\sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} + \cos \frac{q}{2} (\cos \frac{q}{2} \mathbf{r} + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \sin \frac{q}{2})$$

$$- (\cos \frac{q}{2} \mathbf{r} + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \sin \frac{q}{2}) \cdot (-\mathbf{u} \sin \frac{q}{2}) + (\cos \frac{q}{2} \mathbf{r} + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \sin \frac{q}{2}) \times (-\mathbf{u} \sin \frac{q}{2})$$

$$= -\sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} + \cos^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} + \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) + \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$$

$$+ \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u} - \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) - \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u}$$

第一项与第五项相消，第六项为零第四项与第七项合并

$$= \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} + \cos^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) - \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u}$$

证明

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{Q}^* = \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} + \cos^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) - \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u}$$

利用 $(\mathbf{u}' \mathbf{r})' \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \mathbf{r} - (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{Q}^* &= \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} + \cos^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) - \sin^2 \frac{q}{2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{r} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}] \\ &= \cos^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} - \sin^2 \frac{q}{2} \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) + 2 \sin^2 \frac{q}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} \\ &= \cos q \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) + (1 - \cos q) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{Q}^*$$

$$= (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} + \cos q \mathbf{r} - \cos q (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} + \sin q (\mathbf{u}' \mathbf{r})$$

$$= (1 - \cos q) (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} + \cos q \mathbf{r} + \sin q (\mathbf{u}' \mathbf{r})$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{Q}^*$$

固定矢量的坐标变换

如果矢量固定不动，而**动**坐标系相对**参考**坐标系转动了一个角度，则以四元数描述的矢量在两个坐标系上的分量的变换关系为

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{Q} \circ \mathbf{R}_b \circ \mathbf{Q}^* \quad \mathbf{R}_b = \mathbf{Q}^* \circ \mathbf{R}_r \circ \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{Q}^*$$

3.2.3.4 四元数和方向余弦矩阵的关系

如果将四元数 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{M}$ 的四个元写成列矢量，即表示成

$$\mathbf{Q}(q) = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}(r) = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}(m) = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

将固定矢量的坐标变换式， $\mathbf{R}_b = \mathbf{Q}^* \circ \mathbf{R}_r \circ \mathbf{Q}$ 写成矩阵形式，并以地理坐标系为参考坐标系，则有

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{Q}^* \circ \mathbf{R}_r \circ \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\mathbf{R}_b) = \mathbf{M}(\mathbf{Q}^*) \mathbf{M}^*(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}(\mathbf{R}_r)$$

3.2.3.4 四元数和方向余弦矩阵的关系



$$\mathbf{Q}(\mathbf{R}_b) = M(\mathbf{Q}^*)M^*(\mathbf{Q})\mathbf{Q}(\mathbf{R}_n)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{R}_b) = [0 \quad x_b \quad y_b \quad z_b]^T$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{R}_n) = [0 \quad x_n \quad y_n \quad z_n]^T$$

$$M(\mathbf{Q}^*) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$M^*(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

四元数与姿态矩阵的关系



$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 0 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 0 & 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$C_n^b = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

由四元数计算姿态矩阵

由 $\mathbf{b} = C_n^b \mathbf{n}$ 可知上式可写为

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

两个变换矩阵相等，即对应元素相等，如果知道了变换四元数的四个元，则可以求出姿态矩阵的九个元素，并构成姿态矩阵。

反之，如果知道了姿态矩阵的九个元素也可以求出相应的变换四元数的四个元。

$$T_{11} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

$$T_{12} = 2(q_1q_2 + q_0q_3)$$

$$T_{13} = 2(q_1q_3 - q_0q_2)$$

$$T_{21} = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$$

$$T_{22} = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2$$

$$T_{23} = 2(q_2q_3 + q_0q_1)$$

$$T_{31} = 2(q_1q_3 + q_0q_2)$$

$$T_{32} = 2(q_2q_3 - q_0q_1)$$

$$T_{33} = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$$



由姿态矩阵元素计算四元数

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_0^2 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 4q_0^2 - 1$$

$$q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + T_{11} + T_{22} + T_{33})$$

$$q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} + T_{22} + T_{33}}$$

$$T_{22} + T_{33} = 2q_0^2 - 2q_1^2$$

$$4q_1^2 = 4q_0^2 - 2(T_{22} + T_{33}) = 1 + T_{11} + T_{22} + T_{33} - 2(T_{22} + T_{33}) = 1 + T_{11} - T_{22} - T_{33}$$

$$q_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} - T_{22} - T_{33}}$$

$$T_{11} + T_{33} = 2q_0^2 - 2q_2^2$$

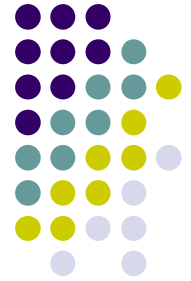
$$4q_2^2 = 4q_0^2 - 2(T_{11} + T_{33}) = 1 + T_{11} + T_{22} + T_{33} - 2(T_{11} + T_{33}) = 1 - T_{11} + T_{22} - T_{33}$$

$$q_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} + T_{22} - T_{33}}$$

$$T_{11} + T_{22} = 2q_0^2 - 2q_3^2$$

$$4q_3^2 = 4q_0^2 - 2(T_{11} + T_{22}) = 1 + T_{11} + T_{22} + T_{33} - 2(T_{11} + T_{22}) = 1 - T_{11} - T_{22} + T_{33}$$

$$q_3 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} - T_{22} + T_{33}}$$



由姿态矩阵元素计算四元数

$$q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + T_{11} + T_{22} + T_{33})}$$

$$q_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + T_{11} - T_{22} - T_{33})}$$

$$q_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - T_{11} + T_{22} - T_{33})}$$

$$q_3 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - T_{11} - T_{22} + T_{33})}$$

符号可用如下方法确定，考虑相对应的对角线对称的诸元素之差，则有

先决定 q_0 的符号，即可

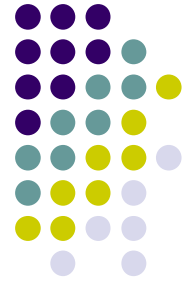
$$\text{sign}(q_0) = +$$

$$\text{sign}(q_1) = \text{sign}(T_{23} - T_{32})$$

$$\text{sign}(q_2) = \text{sign}(T_{31} - T_{13})$$

$$\text{sign}(q_3) = \text{sign}(T_{12} - T_{21})$$

$$\begin{cases} 4q_0q_1 = T_{23} - T_{32} \\ 4q_0q_2 = T_{31} - T_{13} \\ 4q_0q_3 = T_{12} - T_{21} \end{cases}$$



四元数与欧拉角的关系

定系 $Ox_n y_n z_n$ 和动系 $Ox_b y_b z_b$ 的转动角位置可以用一个四元数 Q 表示，也可以用一组欧拉角 (P,R,H) 来表示

利用矢量 r （坐标系相当于矢量）绕 OO_c 轴旋转 q 角变为 r_c ，用 u 表示转轴向的单位矢量，则 $r_c = Q \circ r \circ Q^*$ ，

$$Q = \cos \frac{q}{2} + u \sin \frac{q}{2}$$

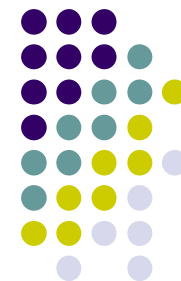
[定理] 如果坐标系 b 经由 Q 确定的转动变为坐标系 b_c ，则 Q 在 b 和 b_c 上的“映像”称为变换的特征四元数，用 Q^c 表示。

如果经过三次转动，则等效四元数由其三个特征四元数的乘积决定，顺序与转动顺序相同。

四元数与欧拉角的关系

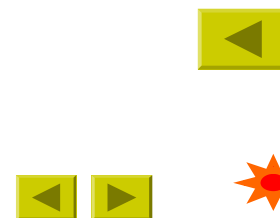
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^c \circ \mathbf{Q}_2^c \circ \mathbf{Q}_3^c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1^c = \cos \frac{H}{2} + k_n \sin \frac{H}{2} \\ \mathbf{Q}_2^c = \cos \frac{P}{2} + i_n \sin \frac{P}{2} \\ \mathbf{Q}_3^c = \cos \frac{R}{2} + j_n \sin \frac{R}{2} \end{array} \right.$$

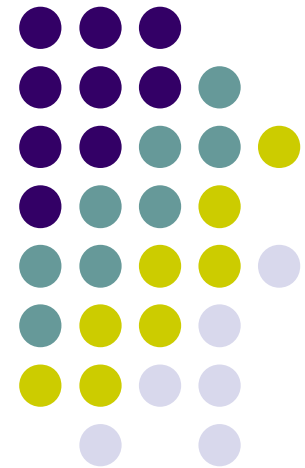


$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \left(\cos \frac{H}{2} + k_n \sin \frac{H}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{P}{2} + i_n \sin \frac{P}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{R}{2} + j_n \sin \frac{R}{2} \right) \\ &= \left(\cos \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} - \sin \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \right) + \left(\cos \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} - \sin \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \right) i_n \\ &= \left(\cos \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} + \sin \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} \right) j_n + \left(\sin \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} + \cos \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \right) k_n \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \cos \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} - \sin \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \\ q_1 = \cos \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} - \sin \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \\ q_2 = \cos \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} + \sin \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} \\ q_3 = \sin \frac{H}{2} \cos \frac{P}{2} \cos \frac{R}{2} + \cos \frac{H}{2} \sin \frac{P}{2} \sin \frac{R}{2} \end{array} \right.$$



谢谢！

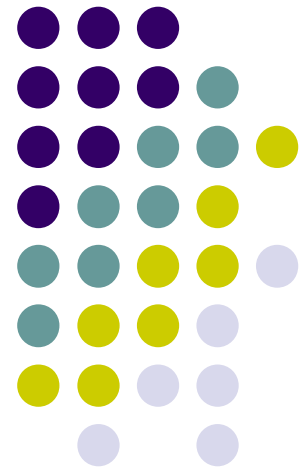


惯性导航系统原理

3 捷联式惯导系统

程向红

2010.04.02





3 捷联式惯导系统

- | 3.1 捷联式惯导算法概述
- | 3.2 姿态矩阵的计算
- | 3.3 姿态矩阵计算机执行算法



3.2 姿态矩阵的计算

- | **3.2.1** 欧拉角法
- | **3.2.2** 方向余弦法
- | **3.2.3** 四元数法
- | **3.2.4** 等效转动矢量法



3.2.3 四元数法

- | 3.2.3.1 四元数的基本概念
- | 3.2.3.2 四元数理论
- | 3.2.3.3 矢量坐标变换的四元数描述
- | 3.2.3.4 四元数和方向余弦矩阵的关系
- | 3.2.3.5 四元数微分方程
o o o o

3.2.3.5 四元数微分方程

由 $Q = \cos\frac{q}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{q}{2}$ $\implies \frac{dQ}{dt} = -\sin\frac{q}{2}\frac{1}{2}\dot{q} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cos\frac{q}{2}\dot{q} + \sin\frac{q}{2}\frac{d\mathbf{u}}{dt}$

因为 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \dot{q}\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = -1$

$\dot{Q} = \frac{1}{2}\dot{q}\mathbf{u} \circ (\cos\frac{q}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{q}{2})$

$\dot{Q} = \boldsymbol{\omega}_n$ $\boldsymbol{\omega}_n$ 是 $\boldsymbol{\omega}_{nb}^n$ 的四元数形式。故四元数微分方程可以写成

$\dot{Q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_n \circ Q$

如果将角速度表示在载体坐标系上，则由坐标变换得

$\boldsymbol{\omega}_n = Q \circ \boldsymbol{\omega}_b \circ Q^*$

$\dot{Q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_n \circ Q = \frac{1}{2}Q \circ \boldsymbol{\omega}_b \circ Q^* \circ Q$

$\dot{Q} = Q \circ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_b$

$\boldsymbol{\omega}_b$ 是 $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$ 的四元数形式。





写成矩阵形式

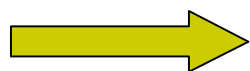
四元数微分方程

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \omega_n \circ \mathbf{Q}$$



$$\mathbf{Q}(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2} M(\omega_n) \mathbf{Q}(q)$$

$$\mathcal{Q} = \mathbf{Q} \circ \frac{1}{2} \omega_b$$



$$\mathbf{Q}(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2} M^*(\omega_b) \mathbf{Q}(q)$$

四元数微分方程的解，类似矩阵微分方程，
可用（**Peano-Baker**）逼近法求解。解为

$$\mathbf{Q}(q) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} M^*(w_b) dt} \mathbf{Q}(q)|_{t=0} \quad \text{简写为} \quad q(t) = e^{\frac{1}{2} [\Delta q]} q(0)$$

式中

$$[\Delta q] = \int_{t_1}^{t_2} M^*(w_b) dt = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{\frac{1}{2} [\Delta q]} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^3 + \mathbf{L} + \frac{1}{n!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^n + \mathbf{L}$$



$$e^{\frac{1}{2}[\Delta q]} = I + \frac{1}{1!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^3 + \mathbf{L} + \frac{1}{n!} \left(\frac{[\Delta q]}{2}\right)^n + \mathbf{L}$$

返回3.2

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta q]^2 = -[\Delta q_x^2 + \Delta q_y^2 + \Delta q_z^2] I \quad \text{令} \quad \Delta q_0^2 = \Delta q_x^2 + \Delta q_y^2 + \Delta q_z^2$$

$$\Delta q^2 = -\Delta q_0^2 I$$

$$[\Delta q]^3 = -\Delta q_0^2 [\Delta q]$$

$$[\Delta q]^4 = \Delta q_0^4 I$$

$$[\Delta q]^5 = \Delta q_0^4 [\Delta q]$$

M

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}[\Delta q]} &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^6 + \mathbf{L} \right] I \\ &+ \frac{[\Delta q]}{\Delta q_0} \left[\frac{1}{1!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta q_0}{2}\right)^5 - \mathbf{L} \right] \\ &= \cos \frac{\Delta q_0}{2} I + \frac{[\Delta q]}{\Delta q_0} \sin \frac{\Delta q_0}{2} \end{aligned}$$

$$q(t) = \left\{ \cos \frac{\Delta q_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0} [\Delta q] \right\} q(0)$$

四元数微分方程的解析解



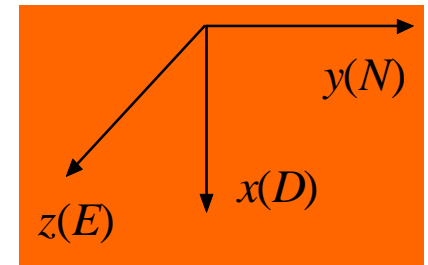
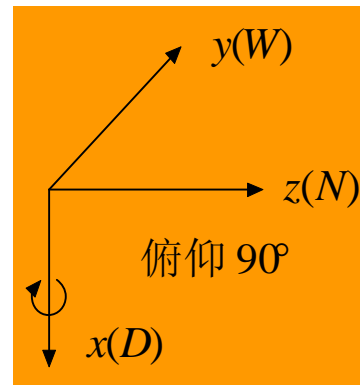
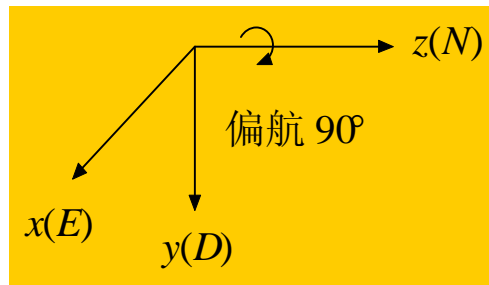
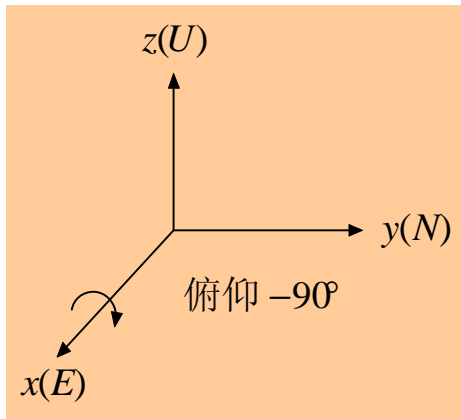
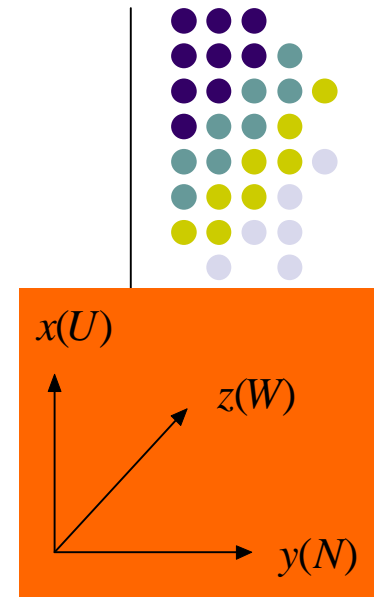
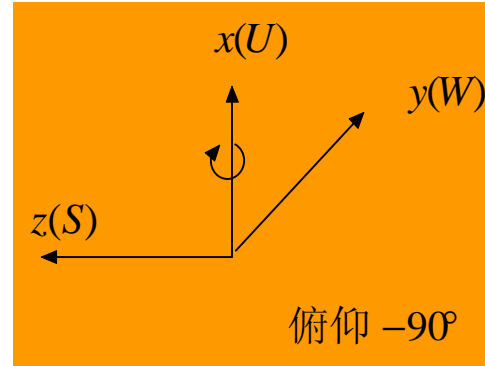
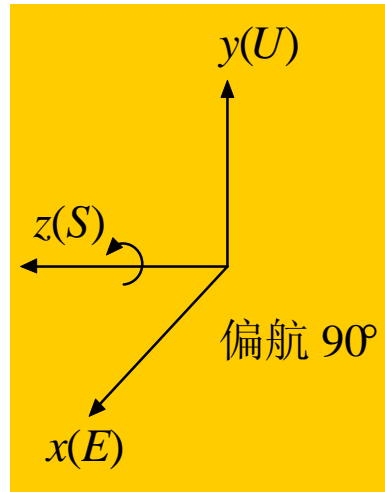
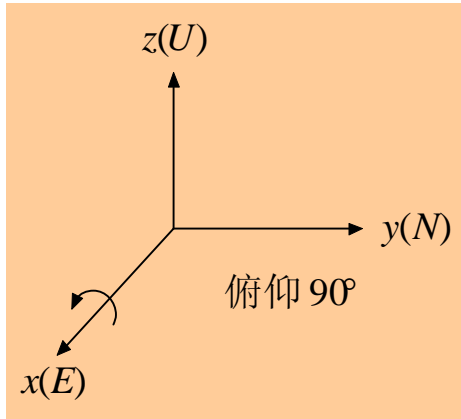


3.2.4 等效转动矢量法

- | 3.2.4.1 转动的不可交换性
- | 3.2.4.2 等效转动矢量微分方程



3.2.4.1转动的不可交换性



在力学中，刚体的有限转动是不可交换的。



转动的不可交换性



转动的不可交换性决定了转动不是矢量，也就是两次以上的不同轴的转动不能相加。

对一个在空间方向随时间变化的角速度矢量进行积分，则是无意义的。

角速度的积分是不能成立的，只能在很小的时间区间内积分，把 ω 近似看作方向不变时，积分才能成立。

转动的不可交换性也反映在变换矩阵的合成上，如果坐标系 $oxyz$ 绕 x 轴转动 q_x 角，变成 $ox_1y_1z_1$ ，再绕 y_1 轴转动 q_y 角，变成 $ox_2y_2z_2$ 。则

$$oxyz \xrightarrow{q_x} ox_1y_1z_1 \quad C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_x & \sin q_x \\ 0 & -\sin q_x & \cos q_x \end{bmatrix}$$
$$ox_1y_1z_1 \xrightarrow{q_y} ox_2y_2z_2 \quad C_y = \begin{bmatrix} \cos q_y & 0 & -\sin q_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_y & 0 & \cos q_y \end{bmatrix}$$



转动的不可交换性



故 $C = C_y C_x = \begin{bmatrix} \cos q_y & \sin q_x \sin q_y & -\cos q_x \sin q_y \\ 0 & \cos q_x & \sin q_x \\ \sin q_y & -\sin q_x \cos q_y & \cos q_x \cos q_y \end{bmatrix}$

如转动的顺序相反，则

$$C' = C_x C_y = \begin{bmatrix} \cos q_y & 0 & -\sin q_y \\ \sin q_x \sin q_y & \cos q_x & \sin q_x \cos q_y \\ \cos q_x \sin q_y & -\sin q_x & \cos q_x \cos q_y \end{bmatrix}$$

很显然 $C_x C_y \neq C_y C_x$

但对小角度，可以看作是矢量，如将 q_x, q_y 都看作一阶小量的小角度，则 $\cos q \gg 1$ ， $\sin q \gg q$ ，在忽略二阶小量的情况下

$$C_x C_y = C_y C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -q_y \\ 0 & 1 & q_x \\ q_y & -q_x & 1 \end{bmatrix}$$



小角度的转动是可以交换的=小角度可以看作是矢量，能按矢量相加



在对方向余弦矩阵微分方程和四元数微分方程求解时，都用了角速度矢量的积分，即

$$\Delta q = \int_t^{t+\Delta t} w dt$$

显然，积分区间及采样周期必须很小，否则，计算结果中会有很大的不可交换性误差，而采样周期太小，使计算机实时计算工作量增大。为了消除不可交换性误差，可采用等效转动矢量算法。



3.2.4.2 等效转动矢量微分方程



动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{q}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{q}{2}$$

式中 \mathbf{u} 为等效转轴方向的单位矢量， q 为动坐标系绕 \mathbf{u} 轴转动的角度

利用 \mathbf{u} 和 q 定义一个等效转动矢量

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} q$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \circ \frac{1}{2} \dot{\omega}_b \longrightarrow \dot{\omega}_b = 2\mathbf{Q}^*(t) \circ \dot{\mathbf{Q}}(t)$$

按四元数相乘的规则展开得

$$\dot{\omega}_b = 2(q_0 \dot{\mathbf{q}} + q_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0 q + q \dot{\mathbf{q}}_0 - q \times \dot{\mathbf{q}})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 + \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{q}_0 + \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{Q}^* &= q_0 - \mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = I_0 m_0 + I_0 \mathbf{m} + m_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{m}$$



等效转动矢量微分方程



$$\mathbf{Q}^* = \cos \frac{q}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{q}{2} = q_0 - q$$

$$q_0 = \cos \frac{q}{2} \quad q = \mathbf{u} \sin \frac{q}{2}$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{\dot{q}}{2} \sin \frac{q}{2} \quad \dot{q} = \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{q}{2} + \frac{\dot{q}}{2} \mathbf{u} \cos \frac{q}{2}$$

$$\omega_b = 2(q_0 \dot{q}_0 + q_0 \dot{q} - \dot{q}_0 q + q \dot{q} - q \times \dot{q})$$

代入并稍作整理

$$\omega_b = \dot{q} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \sin q + \mathbf{u} \times \mathbf{u} (1 - \cos q)$$

• , f

$$q = \mathbf{u} q \Rightarrow \dot{q} = \dot{q} \mathbf{u} + q \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow \dot{q} \mathbf{u} = \dot{q} - q \dot{\mathbf{u}}$$

$$\text{两边点乘 } \mathbf{u} \text{ 得 } \Rightarrow \dot{q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \dot{q} \cdot \mathbf{u} - q \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \\ \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \text{ 故 } \Rightarrow \dot{q} = \dot{q} \cdot \mathbf{u}$$



$$u = \frac{\theta}{q} \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\theta \mathbf{q} - \theta \mathbf{q}}{q^2} = \frac{\theta \mathbf{q} - \theta(\theta \cdot \mathbf{q} / q)}{q^2} = \frac{\theta}{q} - \frac{\theta(\theta \cdot \mathbf{q})}{q^3}$$

$$= \frac{\theta q^2 - \theta(\theta \cdot \mathbf{q})}{q^3}$$

推导

$$q = uq$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot u$$

由 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 得 $\theta \times (\theta \times \mathbf{q}) = \theta(\theta \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{q}(\theta \cdot \theta)$

$$\theta(\theta \cdot \mathbf{q}) = \theta \times (\theta \times \mathbf{q}) + \mathbf{q}(\theta^2)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\theta q^2 - \theta(\theta \cdot \mathbf{q})}{q^3} = \frac{\theta q^2 - [\theta \times (\theta \times \mathbf{q}) + \mathbf{q}(\theta^2)]}{q^3} \Rightarrow \mathbf{u} = -\frac{\theta \times (\theta \times \mathbf{q})}{q^3}$$

$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - q \mathbf{u}$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} + \frac{\theta \times (\theta \times \mathbf{q})}{q^2}$$

同乘 $\sin \theta$

$$\mathbf{u} \sin q = -\frac{\theta \times (\theta \times \mathbf{q})}{q^3} \sin q$$

$$\mathbf{f} \mathbf{u} \times \mathbf{u} (1 - \cos q) = \left(\frac{\theta \mathbf{q} - \theta \mathbf{q}}{q^2} \right) \times \frac{\theta}{q} (1 - \cos q) = \frac{\theta \times \theta}{q^2} (1 - \cos q)$$





推导

$$\omega_b = q\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}\sin q + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}(1 - \cos q)$$

$$q\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{\theta}} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}})}{q^2}$$

$$\dot{\mathbf{u}}\sin q = -\frac{\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}})}{q^3} \sin q$$

$$\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}(1 - \cos q) = \frac{\dot{\mathbf{\theta}} \times \boldsymbol{\theta}}{q^2} (1 - \cos q)$$

$$\omega_b = \dot{\mathbf{\theta}} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}})}{q^2} - \frac{\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}})}{q^3} \sin q + \frac{\dot{\mathbf{\theta}} \times \boldsymbol{\theta}}{q^2} (1 - \cos q)$$

$$\dot{\mathbf{\theta}} = \omega_b + (1 - \cos q) \frac{\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}}}{q^2} - \left(1 - \frac{\sin q}{q}\right) \frac{\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}})}{q^2}$$

$$\dot{\mathbf{\theta}} = \omega_b + B(q)\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}} - C(q)\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{\theta}}) \quad \text{等效转动矢量微分方程}$$

$$B(q) = \frac{1 - \cos q}{q^2}$$

$$C(q) = \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{\sin q}{q}\right)$$



$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_b + B(q)\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} - C(q)\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad \sigma = B(q)\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} - C(q)\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad \text{推导}$$

则 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\sigma}$ 等效转动矢量的导数等于 $\boldsymbol{\omega}_b$ 再加一个修正量 $\boldsymbol{\sigma}$ ，使

$$\boldsymbol{\theta} = \int (\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\sigma}) dt \quad \text{成立}$$

如果将 $B(q)$ 和 $C(q)$ 展开成级数并只取第一项

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_b + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

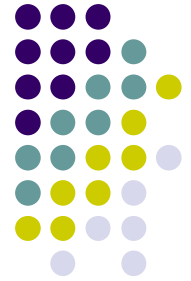
还可推导出等效转动矢量的另外形式为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_b + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_b + A(q)\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_b) \quad A(q) = \frac{1}{q^2} \left[1 - \frac{q \sin q}{2(1 - \cos q)} \right]$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\theta} \times \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\omega}_b + \frac{1}{6}\dot{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

思考题





等效转动矢量微分方程

实际计算时可用三式中任何一式。根据 w_b 计算等效转动矢量，用等效转动矢量代替方向余弦矩阵微分方程或四元数微分方程中的 Dq ，则可以消除计算的方向余弦矩阵或四元数中的不可交换性误差。等效转动矢量可以用预信息处理机来计算，然后用 q 再计算四元数或方向余弦矩阵。

以上介绍的4种方法，都可以用来确定一个动坐标系相对参考坐标系的方位关系。在捷联惯导中，既可以用来计算姿态矩阵，也可以用来计算位置矩阵，在实际的捷联式惯导系统中，由于姿态矩阵的实时计算速度要快，所以，比较多的是采用四元数法。而位置矩阵的实时速度可以较慢，一般采用方向余弦法。





3.3 姿态矩阵计算机执行算法

3.3.1 增量算法

3.3.1.1 定时增量算法

3.3.1.2 固定增量算法

3.3.2 数值积分法

3.3.2.1 一阶龙格-库塔 (Runge-Kutta) 法

3.3.2.2 二阶龙格-库塔法

3.3.2.3 四阶龙格-库塔法

$$W_{nb}^b = W_{ib}^b - W_{in}^b$$



3.3.1 增量算法

捷联式陀螺仪，不管是挠性陀螺仪还是光学陀螺仪，表头输出是模拟量还是数字量，最终都要转换成数字量，所以陀螺的输出是脉冲串，每个脉冲代表一个角增量，在一个采样周期内，用陀螺输出的脉冲数乘以标度因子即变成角增量，相应于：

$$\Delta q = \int_t^{t+\Delta t} w_{ib} dt$$

如果利用这个角增量直接计算姿态矩阵或姿态四元数，则叫做增量算法。**固定增量**，陀螺的输出只要达到规定的增量值即输入计算机进行计算。**定时增量**，在规定的采用区间对陀螺输出进行采样，而不管角增量的大小。

{ 定时增量算法
固定增量算法



3.3.1.1 定时增量算法

$$\mathcal{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$



定时增量法是在每个采用周期T内，对陀螺的输出采样1次。如果对3个陀螺的采样角增量分别为 Dq_x, Dq_y, Dq_z ，则

$$C_b^n(t + \Delta t) = C(t) \left[I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \right]$$

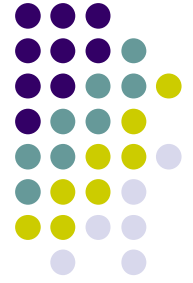
$$S = \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \quad C = \frac{1 - \cos \Delta q_0}{(\Delta q_0)^2}$$

$$\Delta q_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nbx}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nbx}^b & \Delta q_{nbz}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nbx}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nbx}^b & \Delta q_{nbz}^b & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = \begin{bmatrix} 1 - (\Delta q_y^2 + \Delta q_z^2)C & \Delta q_x \Delta q_y C - \Delta q_z S & \Delta q_x \Delta q_z C + \Delta q_y S \\ \Delta q_x \Delta q_y C + \Delta q_z S & 1 - (\Delta q_z^2 + \Delta q_x^2)C & \Delta q_y \Delta q_z C - \Delta q_x S \\ \Delta q_x \Delta q_z C - \Delta q_y S & \Delta q_y \Delta q_z C + \Delta q_x S & 1 - (\Delta q_x^2 + \Delta q_y^2)C \end{bmatrix}$$



3.3.1.1 定时增量算法



$$C_b^n(n+1) = C(n) \left[I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \right]$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - (\Delta q_y^2 + \Delta q_z^2)C & \Delta q_x \Delta q_y C - \Delta q_z S & \Delta q_x \Delta q_z C + \Delta q_y S \\ \Delta q_x \Delta q_y C + \Delta q_z S & 1 - (\Delta q_z^2 + \Delta q_x^2)C & \Delta q_y \Delta q_z C - \Delta q_x S \\ \Delta q_x \Delta q_z C - \Delta q_y S & \Delta q_y \Delta q_z C + \Delta q_x S & 1 - (\Delta q_x^2 + \Delta q_y^2)C \end{bmatrix}$$

$$T_{11}(n+1) = T_{11}(n)(1 - \Delta q_y^2 C - \Delta q_z^2 C) + T_{21}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C + \Delta q_z S) + T_{31}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C - \Delta q_y S)$$

$$T_{21}(n+1) = T_{11}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C - \Delta q_z S) + T_{21}(n)(1 - \Delta q_z^2 C - \Delta q_x^2 C) + T_{31}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C + \Delta q_x S)$$

$$T_{31}(n+1) = T_{11}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C + \Delta q_y S) + T_{21}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C - \Delta q_x S) + T_{31}(n)(1 - \Delta q_c^2 C - \Delta q_y^2 C)$$

$$T_{12}(n+1) = T_{12}(n)(1 - \Delta q_y^2 C - \Delta q_z^2 C) + T_{22}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C + \Delta q_z S) + T_{32}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C - \Delta q_y S)$$

$$T_{22}(n+1) = T_{12}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C - \Delta q_z S) + T_{22}(n)(1 - \Delta q_z^2 C - \Delta q_x^2 C) + T_{32}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C + \Delta q_x S)$$

$$T_{32}(n+1) = T_{12}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C + \Delta q_y S) + T_{22}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C - \Delta q_x S) + T_{32}(n)(1 - \Delta q_c^2 C - \Delta q_y^2 C)$$

$$T_{13}(n+1) = T_{13}(n)(1 - \Delta q_y^2 C - \Delta q_z^2 C) + T_{23}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C + \Delta q_z S) + T_{33}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C - \Delta q_y S)$$

$$T_{23}(n+1) = T_{13}(n)(\Delta q_x \Delta q_y C - \Delta q_z S) + T_{23}(n)(1 - \Delta q_z^2 C - \Delta q_x^2 C) + T_{33}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C + \Delta q_x S)$$

$$T_{33}(n+1) = T_{13}(n)(\Delta q_x \Delta q_z C + \Delta q_y S) + T_{23}(n)(\Delta q_y \Delta q_z C - \Delta q_x S) + T_{33}(n)(1 - \Delta q_c^2 C - \Delta q_y^2 C)$$



3.3.1.1 定时增量算法

$$q(t) = \left\{ \cos \frac{\Delta q_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0} [\Delta q] \right\} q(0)$$

$$q(n+1) = \left\{ \underbrace{\cos \frac{\Delta q_0}{2}}_C I + \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0} [\Delta q] \right\} q(n)$$

$$\begin{bmatrix} C & -S\Delta q_x & -S\Delta q_y & -S\Delta q_z \\ S\Delta q_x & C & S\Delta q_z & -S\Delta q_y \\ S\Delta q_y & -S\Delta q_z & C & S\Delta q_x \\ S\Delta q_z & S\Delta q_y & -S\Delta q_x & C \end{bmatrix}$$

$$q_0(n+1) = Cq_0(n) - S\Delta q_x q_1(n) - S\Delta q_y q_2(n) - S\Delta q_z q_3(n)$$

$$q_1(n+1) = S\Delta q_x q_0(n) + Cq_1(n) + S\Delta q_z q_2(n) - S\Delta q_y q_3(n)$$

$$q_2(n+1) = S\Delta q_y q_0(n) - S\Delta q_z q_1(n) + Cq_2(n) + S\Delta q_x q_3(n)$$

$$q_3(n+1) = S\Delta q_z q_0(n) + S\Delta q_y q_1(n) - S\Delta q_x q_2(n) + Cq_3(n)$$

3.3.1.2 固定增量算法

固定增量算法是对陀螺仪输出按一定的增量大小进行采样，每个陀螺的输出达到**规定增量时**即被送入计算机。增量大小的选取按实时计算的要求和计算机的运算速度来确定，用 **Dq** 表示这个固定增量，当x陀螺的输出 **$Dq_x=Dq$** 时，按下式



$$Dq_y=Dq_z=0,$$

$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \Delta q_0^2 = \Delta q_x^2 + \Delta q_y^2 + \Delta q_z^2 \quad Dq_0=Dq_x=Dq$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nby}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nby}^b & \Delta q_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q \\ 0 & \Delta q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q \\ 0 & \Delta q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta q^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q^2 \end{bmatrix}$$

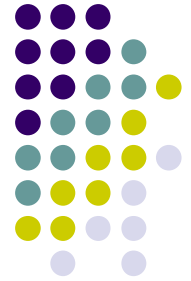
$$DC_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin \Delta q}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q \\ 0 & \Delta q & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos \Delta q}{\Delta q^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta q^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q^2 \end{bmatrix}$$

$$DC_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta q & -\sin \Delta q \\ 0 & \sin \Delta q & \cos \Delta q \end{bmatrix}$$



3.3.1.2 固定增量算法

当y陀螺的输出 $Dq_y=Dq$ 时 $Dq_x=Dq_z=0$,



$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \Delta q_0^2 = \Delta q_x^2 + \Delta q_y^2 + \Delta q_z^2 \quad Dq_0 = Dq_y = Dq$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nby}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nby}^b & \Delta q_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta q \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta q \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta q & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q^2 \end{bmatrix}$$

$$DC_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin \Delta q}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta q \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta q & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos \Delta q}{\Delta q^2} \begin{bmatrix} -\Delta q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta q^2 \end{bmatrix}$$

$$DC_y = \begin{bmatrix} \cos \Delta q & 0 & \sin \Delta q \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta q & 0 & \cos \Delta q \end{bmatrix}$$



3.3.1.2 固定增量算法

当z陀螺的输出 $Dq_z=Dq$ 时 $Dq_x=Dq_y=0$,



$$e^{\Delta q_{nb}^{bk}} = I + \frac{\sin \Delta q_0}{\Delta q_0} \Delta q_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta q_0}{\Delta q_0^2} (\Delta q_{nb}^{bk})^2 \Delta q_0^2 = \Delta q_x^2 + \Delta q_y^2 + \Delta q_z^2 \quad Dq_0 = Dq_z = Dq$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_{nbz}^b & \Delta q_{nby}^b \\ \Delta q_{nbz}^b & 0 & -\Delta q_{nbx}^b \\ -\Delta q_{nby}^b & \Delta q_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q & 0 \\ \Delta q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q & 0 \\ \Delta q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta q^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DC_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin \Delta q}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q & 0 \\ \Delta q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos \Delta q}{\Delta q^2} \begin{bmatrix} -\Delta q^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DC_y = \begin{bmatrix} \cos \Delta q & -\sin \Delta q & 0 \\ \sin \Delta q & \cos \Delta q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3.3.1.2 固定增量算法

$$Dq_x=Dq, Dq_y=Dq, Dq_z=Dq$$

如果接收到陀螺输出的顺序为 x, y, z

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t) \Delta C_x \Delta C_y \Delta C_z$$

式中 $\Delta C_x, \Delta C_y, \Delta C_z$,为在 Δt 区间中顺序接收到 $Dq_x=Dq, Dq_y=Dq, Dq_z=Dq$ 所构成的变换矩阵。如果接收陀螺增量的顺序改变,则矩阵相乘的顺序也改变。

对 C_b^n 是依次**后乘** 在实际计算时,是把 $\sin Dq$ 和 $\cos Dq$ 展成级数,取一阶到四阶近似。也可直接写成**sin或cos函数**,
 C_n^b 是依次**前乘** 但在计算机中,还是按照一定精度取阶数。

在计算过程中,如果同时接收到两个或三个陀螺的输出,考虑到 Dq 是小量,对应的矩阵相乘的顺序可以任意选取。

课后请推导出一阶、二阶、三阶和四阶算法。



3.3.1.2 固定增量算法

$$Dq_x = Dq, Dq_y = Dq, Dq_z = Dq$$



对四元数同样可以采用固定增量算法。

当x陀螺的输出 $Dq_x = Dq$ 时，按下式

$$\cos \frac{\Delta q_0}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0} [\Delta \mathbf{q}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^*(q_x) = \cos \frac{\Delta q}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{\Delta q}{2}}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q & 0 & 0 \\ \Delta q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta q \\ 0 & 0 & -\Delta q & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^*(q_y) = \cos \frac{\Delta q}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{\Delta q}{2}}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta q \\ \Delta q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta q & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果接收到陀螺输出的顺序为 x, y, z



四元数的固定增量算法

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix}$$



$$M^*(q_z) = \cos \frac{\Delta q}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{\Delta q}{2}}{\Delta q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta q \\ 0 & 0 & \Delta q \\ 0 & -\Delta q & 0 \\ \Delta q & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q(n+1) = M^*(q_z)M^*(q_y)M^*(q_x)q(n)$$

相乘的顺序为接收到增量的顺序依次前乘。类似方向余弦法的情况，把 $\sin(Dq/2)$ 和 $\cos(Dq/2)$ 展开成级数，取各阶近似，则可以得到四元数固定增量算法的各阶近似算法。





3.3.2 数值积分法

用数字计算机求解微分方程的数值积分法有很多，这些方法都可以用来求解方向余弦微分方程和四元数微分方程，可以根据计算的精度要求和计算机的字长和运算速度选用不同的方法。

3.3.2.1 一阶龙格-库塔（Runge-Kutta）法

3.3.2.2 二阶龙格-库塔（Runge-Kutta）法

3.3.2.3 四阶龙格-库塔（Runge-Kutta）法



3.3.2.1 一阶龙格-库塔 (Runge-Kutta) 法

如果 $\dot{X}(t) = f[X(t), w(t)]$

→ $X(t+T) = X(t) + Tf[X(t), w(t)]$



对姿态矩阵微分方程 $\dot{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$ → $C_b^n(t+T) = C_b^n(t) + TC_b^n(t)W_{nb}^{bk}$

$$[W_{nb}^b \times] = W_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -W_{nbz} & W_{nby} \\ W_{nbz} & 0 & -W_{nbx} \\ -W_{nby} & W_{nbx} & 0 \end{bmatrix} \quad W_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -W_z & W_y \\ W_z & 0 & -W_x \\ -W_y & W_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} T_{11}(t+T) &= T_{11}(t) + T [T_{21}(t)W_z(t) - T_{31}(t)W_y(t)] \\ T_{21}(t+T) &= T_{21}(t) + T [T_{31}(t)W_x(t) - T_{11}(t)W_z(t)] \\ T_{31}(t+T) &= T_{31}(t) + T [T_{11}(t)W_y(t) - T_{21}(t)W_x(t)] \\ T_{12}(t+T) &= T_{12}(t) + T [T_{22}(t)W_z(t) - T_{32}(t)W_y(t)] \\ T_{22}(t+T) &= T_{22}(t) + T [T_{32}(t)W_x(t) - T_{12}(t)W_z(t)] \\ T_{32}(t+T) &= T_{32}(t) + T [T_{12}(t)W_y(t) - T_{22}(t)W_x(t)] \\ T_{13}(t+T) &= T_{13}(t) + T [T_{23}(t)W_z(t) - T_{33}(t)W_y(t)] \\ T_{23}(t+T) &= T_{23}(t) + T [T_{33}(t)W_x(t) - T_{13}(t)W_z(t)] \\ T_{33}(t+T) &= T_{33}(t) + T [T_{13}(t)W_y(t) - T_{23}(t)W_x(t)] \end{aligned}$$



姿态矩阵微分方程的一阶龙格-库塔算法的矩阵形式为

$$C_b^n(t+T) = C_b^n(t) + TC_b^n(t)W_{nb}^{bk}(t) = C_b^n(t)[I + W_{nb}^{bk}(t)T]$$

$$W_{nb}^{bk}(t)T = \Delta q_{nb}^{bk} \quad \longrightarrow \quad C_b^n(t+T) = C_b^n(t)[I + \Delta q_{nb}^{bk}]$$

$$C_b^n(n+1) = C_b^n(n)[I + \Delta q_{nb}^{bk}]$$

可见，一阶龙格-库塔算法，和一阶增量算法完全相同。

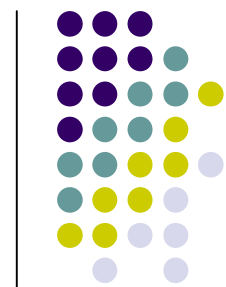


3.3.2.1 一阶龙格-库塔 (Runge-Kutta) 法

如果 $\dot{X}(t) = f[X(t), w(t)]$

$$\longrightarrow X(t+T) = X(t) + Tf[X(t), w(t)]$$

对四元数微分方程 $\dot{Q}(q) = \frac{1}{2} M^*(\omega_b) Q(q) \longrightarrow q(t+T) = q(t) + \frac{T}{2} [w_b(t)] q(t)$



考虑 $[Dq] @ T[w_b]$

$$q(t+T) = \left\{ I + \frac{1}{2} [\Delta q] \right\} q(t)$$

$$= \left\{ I + \frac{T}{2} [w_b(t)] \right\} q(t)$$

可将，四元数一阶龙格-库塔算法，和增量法的一阶算法也完全一样。将上式写成元素的形式为

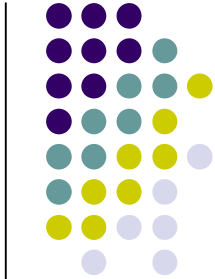
$$[\Delta q] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta q_x & -\Delta q_y & -\Delta q_z \\ \Delta q_x & 0 & \Delta q_z & -\Delta q_y \\ \Delta q_y & -\Delta q_z & 0 & \Delta q_x \\ \Delta q_z & \Delta q_y & -\Delta q_x & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} [\Delta q] = \frac{T}{2} [w_b] = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & w_z & -w_y \\ w_y & -w_z & 0 & w_x \\ w_z & w_y & -w_x & 0 \end{bmatrix}$$



3.3.2.1 一阶龙格-库塔 (Runge-Kutta) 法

$$q(t+T) = \{I + \frac{1}{2}[\Delta q]\}q(t)$$

$$q(t+T) = \begin{bmatrix} q_0(t+T) \\ q_1(t+T) \\ q_2(t+T) \\ q_3(t+T) \end{bmatrix} \frac{1}{2}[\Delta q] = \frac{T}{2}[W_b] = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & w_z & -w_y \\ w_y & -w_z & 0 & w_x \\ w_z & w_y & -w_x & 0 \end{bmatrix}$$



$$q(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_0(t+T) \\ q_1(t+T) \\ q_2(t+T) \\ q_3(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & w_z & -w_y \\ w_y & -w_z & 0 & w_x \\ w_z & w_y & -w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_0(t+T) &= q_0(t) + T/2[-w_x(t)q_1(t) - w_y(t)q_2(t) - w_z(t)q_3(t)] \\ q_1(t+T) &= q_1(t) + T/2[w_x(t)q_0(t) + w_z(t)q_2(t) - w_y(t)q_3(t)] \\ q_2(t+T) &= q_2(t) + T/2[w_y(t)q_0(t) - w_z(t)q_1(t) - w_x(t)q_3(t)] \\ q_3(t+T) &= q_3(t) + T/2[w_z(t)q_0(t) + w_y(t)q_1(t) - w_x(t)q_2(t)] \end{aligned}$$



3.3.2.2 二阶龙格-库塔法

$$Y = X(t) + Tf[X(t), w(t)]$$

$$X(t+T) = X(t) + T/2 \{ f[X(t), w(t)] + f[Y, w(t+T)] \}$$

对姿态矩阵微分方程

$$Y = C_b^n(t) + TC_b^n(t)w_{nb}^{bk}(t)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad C_b^n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

则
$$C_b^n(t+T) = C_b^n(t) + \frac{T}{2} [C_b^n(t)w_{nb}^{bk}(t) + Yw_{nb}^{bk}(t+T)]$$

$$Y = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = T_{11}(t) + T [T_{21}(t)w_z(t) - T_{31}(t)w_y(t)]$$

$$Y_{21} = T_{21}(t) + T [T_{31}(t)w_x(t) - T_{11}(t)w_z(t)]$$

$$Y_{31} = T_{31}(t) + T [T_{11}(t)w_y(t) - T_{21}(t)w_x(t)]$$

$$Y_{12} = T_{12}(t) + T [T_{22}(t)w_z(t) - T_{32}(t)w_y(t)]$$

$$Y_{22} = T_{22}(t) + T [T_{32}(t)w_x(t) - T_{12}(t)w_z(t)]$$

$$Y_{32} = T_{32}(t) + T [T_{12}(t)w_y(t) - T_{22}(t)w_x(t)]$$

$$Y_{13} = T_{13}(t) + T [T_{23}(t)w_z(t) - T_{33}(t)w_y(t)]$$

$$Y_{23} = T_{23}(t) + T [T_{33}(t)w_x(t) - T_{13}(t)w_z(t)]$$

$$Y_{33} = T_{33}(t) + T [T_{13}(t)w_y(t) - T_{23}(t)w_x(t)]$$

$$C_b^n(t) = C_b^n(t)w_{nb}^{bk}(t)$$



3.3.2.2 二阶龙格-库塔法

$$Y = X(t) + Tf[X(t), w(t)]$$

$$X(t+T) = X(t) + T/2 \{ f[X(t), w(t)] + f[Y, w(t+T)] \}$$

对姿态矩阵微分方程

$$Y = C_b^n(t) + TC_b^n(t)W_{nb}^{bk}(t)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad C_b^n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

则
$$C_b^n(t+T) = C_b^n(t) + \frac{T}{2} [C_b^n(t)W_{nb}^{bk}(t) + YW_{nb}^{bk}(t+T)]$$

$$\begin{aligned} T_{11}(t+T) &= T_{11}(t) + T/2 [T_{21}(t)w_z(t) - T_{31}(t)w_y(t) + Y_{21}w_z(t+T) - Y_{31}w_y(t+T)] \\ T_{21}(t+T) &= T_{21}(t) + T/2 [T_{31}(t)w_x(t) - T_{11}(t)w_z(t) + Y_{31}w_x(t+T) - Y_{11}w_z(t+T)] \\ T_{31}(t+T) &= T_{31}(t) + T/2 [T_{11}(t)w_y(t) - T_{21}(t)w_x(t) + Y_{11}w_y(t+T) - Y_{21}w_x(t+T)] \\ T_{12}(t+T) &= T_{12}(t) + T/2 [T_{22}(t)w_z(t) - T_{32}(t)w_y(t) + Y_{22}w_z(t+T) - Y_{32}w_y(t+T)] \\ T_{22}(t+T) &= T_{22}(t) + T/2 [T_{32}(t)w_x(t) - T_{12}(t)w_z(t) + Y_{32}w_x(t+T) - Y_{12}w_z(t+T)] \\ T_{32}(t+T) &= T_{32}(t) + T/2 [T_{12}(t)w_y(t) - T_{22}(t)w_x(t) + Y_{12}w_y(t+T) - Y_{22}w_x(t+T)] \\ T_{13}(t+T) &= T_{13}(t) + T/2 [T_{23}(t)w_z(t) - T_{33}(t)w_y(t) + Y_{23}w_z(t+T) - Y_{33}w_y(t+T)] \\ T_{23}(t+T) &= T_{23}(t) + T/2 [T_{33}(t)w_x(t) - T_{13}(t)w_z(t) + Y_{33}w_x(t+T) - Y_{13}w_z(t+T)] \\ T_{33}(t+T) &= T_{33}(t) + T/2 [T_{13}(t)w_y(t) - T_{23}(t)w_x(t) + Y_{13}w_y(t+T) - Y_{23}w_x(t+T)] \end{aligned}$$

$$C_b^n(t) = C_b^n(t)W_{nb}^{bk}(t)$$



3.3.2.3 二阶龙格-库塔法

先计算 Y_{ji} ,然后计算 $T_{ji}(t+T)$,二阶龙格-库塔法不仅需要 t 时刻的角速度,而且需要 $t+T$ 时刻的角速度。

二阶龙格-库塔法也可以写出下列形式:

$$Y = X(t) + Tf[X(t), w(t)]$$

$$X(t+T) = X(t) + T/2\{f[X(t), w(t)] + f[Y, w(t+T)]\}$$

$$K = Tf[X(t), w(t)]$$

$$Y = X(t) + K$$

$$P = Tf[Y, w(t+T)]$$

$$X(t+T) = X(t) + 1/2(K+P)$$





作业

1. 写出四元数乘积的三种表达形式。并推导其矢量表达式。
2. 推导等效转动矢量的另外表达形式

$$\mathfrak{Q} = \omega_b + \frac{1}{2} \theta \times \omega_b + A(q) \theta \times (\theta \times \omega_b) \quad A(q) = \frac{1}{q^2} \left[1 - \frac{q \sin q}{2(1 - \cos q)} \right]$$

$$\mathfrak{Q} = \omega_b + \theta \times \left(\frac{1}{3} \omega_b + \frac{1}{6} \mathfrak{Q} \right)$$

3. 查阅最新文献资料，说明捷联惯导系统中姿态算法的发展动向和现状（至少列出15篇文献，其中近5年文献至少1/3，外文至少1/3，参考文献格式按照硕士论文中要求的格式）。



丨 谢谢！

捷联式惯导系统

——捷联式惯导系统的误差分析

程向红

2010.04.09



捷联式惯导系统的误差分析

捷联式惯导系统 数学平台

平台式惯导系统 实体的物理平台

误差分析和规律有很多相似之处。



3.8 捷联式惯导系统的误差分析

- ❖ 3.8.1 惯性仪表的安装误差和标度误差
- ❖ 3.8.2 计算误差
- ❖ 3.8.3 基本误差特性
- ❖ 3.8.4 仿真技术



捷联式惯导系统的主要误差源

- Initial alignment errors; 3
- Inertial sensor errors; 1,2,5
- Computational errors. 4

- 1、惯性仪表的**安装误差**和**标度因子误差**。
- 2、陀螺的漂移和加速度计的零位误差。
- 3、**初始条件**误差，包括导航参数和姿态航向的初始误差。
- 4、**计算误差**，主要考虑姿态航向系统的计算误差，也就是数学平台的计算误差。
- 5、载体的角运动所引起的动态误差。



3.8.1 惯性仪表的安装误差和标度误差

❖ 3.8.1.1 非正交变换

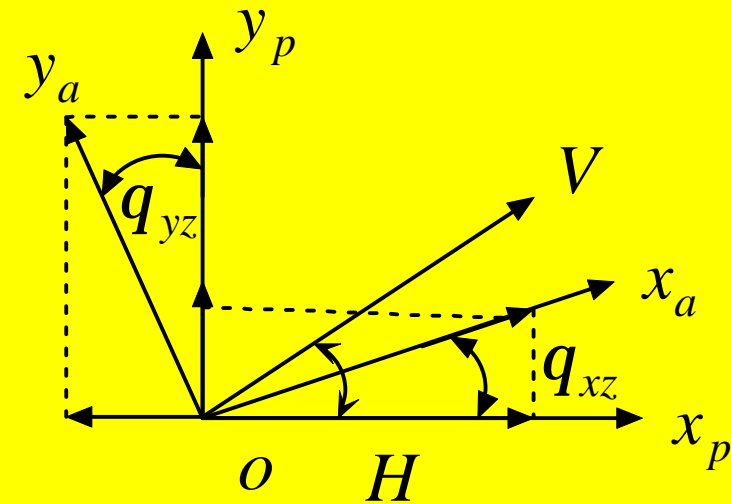
❖ 3.8.1.2 标度误差



3.8.1.1 非正交变换

考虑平面内一个正交坐标系 $ox_p y_p$ 和一个非正交坐标系 $ox_a y_a$

x_p 和 x_a 之间的夹角为 q_{xz} , y_p 和 y_a 之间的夹角为 q_{yz} , 且 $q_{xz} \neq q_{yz}$. 设一固定矢量 V , V 和 x_p 之间的夹角为 H .



V 在 x_p, y_p 上的投影为

$$\begin{cases} V_{xp} = V \cos H \\ V_{yp} = V \sin H \end{cases}$$

[返回](#)

V 在 x_a, y_a 上的投影为

$$\begin{cases} V_{xa} = V \cos(H - q_{xz}) = V \cos H \cos q_{xz} + V \sin H \sin q_{xz} & @V \cos H + V q_{xz} \sin H \\ V_{ya} = V \sin(H - q_{yz}) = V \sin H \cos q_{yz} - V \cos H \sin q_{yz} & @V \sin H - V q_{yz} \cos H \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{xa} @V \cos H + V q_{xz} \sin H \\ V_{ya} @V \sin H - V q_{yz} \cos H \end{cases}$$

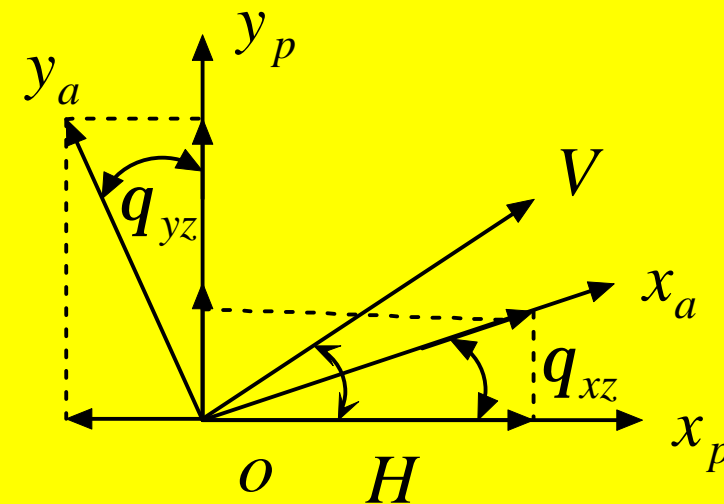
[返回](#)



p 系和 a 系之间的变换矩阵为:

$$\begin{cases} x_p = x_a \cos q_{xz} - y_a \sin q_{yz} \\ y_p = x_a \sin q_{xz} + y_a \cos q_{yz} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_{xz} & -\sin q_{yz} \\ \sin q_{xz} & \cos q_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$



$$C_a^p = \begin{bmatrix} \cos q_{xz} & -\sin q_{yz} \\ \sin q_{xz} & \cos q_{yz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -q_{yz} \\ q_{xz} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_p^a = (C_a^p)^T$$

按固定矢量的坐标变换关系有

$$V^a = (C_a^p)^T V^p \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_{xz} \\ -q_{yz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_{xa} = V_{xp} + q_{xz} V_{yp} \\ V_{ya} = -q_{yz} V_{xp} + V_{yp} \end{cases}$$



3.8.1.1 非正交变换

$$\begin{cases} V_{xa} = V_{xp} + q_{xz} V_{yp} \\ V_{ya} = -q_{yz} V_{xp} + V_{yp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{xp} = V \cos H \\ V_{yp} = V \sin H \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{xa} \approx V \cos H + V \sin H q_{xz} \\ V_{ya} \approx V \sin H - V \cos H q_{yz} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_{xz} \\ -q_{yz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \end{bmatrix}$$

说明黄式的变换是正确的

从正交坐标系变换到非正交坐标系的变换是成立的

正交坐标系 \Rightarrow 非正交坐标系 成立!

$$\begin{cases} V_{xa} \approx V \cos H + V \sin H q_{xz} \\ V_{ya} \approx V \sin H - V \cos H q_{yz} \end{cases}$$



3.8.1.1 非正交变换

如果把 V^a 变换成 V^p (从非正交系到正交系的变换), 即

$$V^p = C_a^p V^a \quad (\text{先假设成立})$$

$$\begin{bmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_{yz} \\ q_{xz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_{yz} \\ q_{xz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos H + V \sin H q_{xz} \\ V \sin H - V \cos H q_{yz} \end{bmatrix}$$

展开并略掉二阶微量得

$$\begin{cases} V_{xp} \approx V \cos H + V \sin H q_{xz} - V \sin H q_{yz} \\ V_{yp} \approx V \sin H - V \cos H q_{yz} + V \cos H q_{xz} \end{cases} \quad 1$$

$$\begin{cases} V_{xp} = V \cos H \\ V_{yp} = V \sin H \end{cases}$$

回看

$$\Rightarrow V^p \neq C_a^p V^a$$

从非正交坐标系变换到正交坐标系的变换是**不成立**。

非正交坐标系  正交坐标系

这是因为一个矢量分解到正交坐标系是按**投影**关系, 而分解到非正交坐标系则**不是按投影**关系。

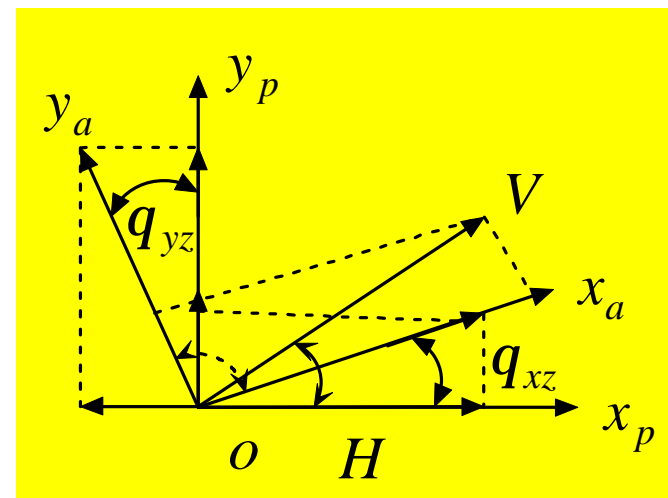


3.8.1.1 非正交变换

q_{xz} , q_{yz} 分别表示x轴和y轴绕z轴的转动小角度

$$\begin{aligned} V^2 &= V_{xa}^2 + V_{ya}^2 - 2V_{xa}V_{ya} \cos(180^\circ - (90^\circ - q_{xz} + q_{yz})) \\ &= V_{xa}^2 + V_{ya}^2 + 2V_{xa}V_{ya} \sin(q_{xz} - q_{yz}) \end{aligned}$$

√如果 $q_{xz} - q_{yz} = 0$, 即满足投影关系 (在实际系统中这常常是不相等的), 从数学上讲, 从上述分析可知, 一个非正交变换阵与其转置的乘积不等于单位阵。



$$V^a = (C_a^p)^T V^p$$

等式两边乘以 C_a^p

$$C_a^p V^a = C_a^p (C_a^p)^T V^p$$

$$C_a^p (C_a^p)^T \neq I$$

C_a^p 写成 $C_a^p = I + \Delta C_a^p$

$$\Delta C_a^p = \begin{bmatrix} 0 & -q_{yz} \\ q_{xz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_a^p (C_a^p)^T = (I + \Delta C_a^p)(I + \Delta C_a^p)^T = I + \Delta C_a^p + (\Delta C_a^p)^T$$

(展开时忽略二阶小量)



安装误差的表示

$$\begin{aligned} C_a^p V^a &= C_a^p (C_a^p)^T V^p \quad \Longrightarrow \quad V^p = [C_a^p (C_a^p)^T]^{-1} C_a^p V^a \\ &= [I + \Delta C_a^p + (\Delta C_a^p)^T]^{-1} [I + \Delta C_a^p] V^a \\ &= [I - \Delta C_a^p - (\Delta C_a^p)^T] [I + \Delta C_a^p] V^a \\ &= [I - (\Delta C_a^p)^T - (\Delta C_a^p)^T \Delta C_a^p] V^a \\ &= [I - (\Delta C_a^p)^T] V^a \end{aligned}$$

$$\text{令 } \tilde{C}_a^p \equiv I - (\Delta C_a^p)^T$$

所以，用 \tilde{C}_a^p 代替 C_a^p

而使非正交坐标变换也具有正交变换类似的形式，即

$$V^p = \tilde{C}_a^p V^a$$

\tilde{C}_a^p 从非正交坐标系变换到正交坐标系是成立的。

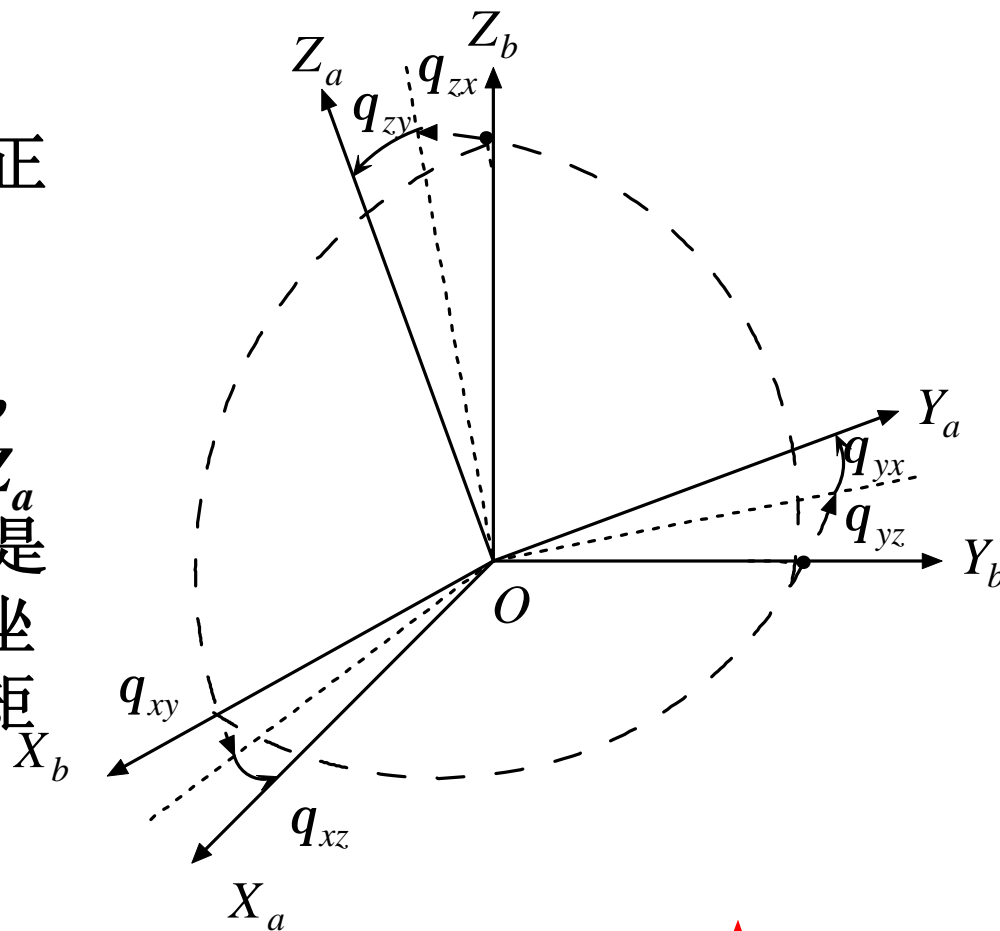


安装误差的表示

将平面（两轴）的情况推广到立体（三轴）的情况，如三个陀螺仪的三个输入轴应该与载体坐标系的三个轴重合，但由于安装或工艺等有误差，总存在误差。每个加速度计或陀螺仪输入轴的安装误差可用两个参数来描述。

$OX_bY_bZ_b$ 是正交系， $OX_aY_aZ_a$ 是非正交系，两组坐标系之间，可由 q_{xz} ， q_{yz} ， q_{yx} ， q_{zx} ， q_{xy} ， q_{zy} 6个参数表示。也即从 X_b 到 X_a 由 q_{xz} ， q_{xy} 决定，从 Y_b 到 Y_a 由 q_{yx} ， q_{yz} 决定，从 Z_b 到 Z_a 由 q_{zx} ， q_{zy} 决定。由于安装误差都是小量，所以非正交坐标系与载体坐标系（正交坐标系）之间的变换矩阵，按上面的推导可以写成：

$$C_a^b = I + \Delta C_a^b$$



式中 ΔC_a^b 可以写成:

$$\Delta C_a^b = \begin{bmatrix} 0 & -q_{yz} & q_{zy} \\ q_{xz} & 0 & -q_{zx} \\ -q_{xy} & q_{yx} & 0 \end{bmatrix}$$

安装误差的表示

$$\tilde{C}_a^b \equiv I - (\Delta C_a^b)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & q_{xz} & -q_{xy} \\ -q_{yz} & 0 & q_{yx} \\ q_{zy} & -q_{zx} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_{xz} & q_{xy} \\ q_{yz} & 1 & -q_{yx} \\ -q_{zy} & q_{zx} & 1 \end{bmatrix}$$

如将加速度计测量的比力 \tilde{S}_f^a 正确地变换到载体坐标系 S_f^b

其变换关系应为

$$S_f^b = \tilde{C}_a^b \tilde{S}_f^a = [I - (\Delta C_a^b)^T] \tilde{S}_f^a$$

$$\begin{bmatrix} S_{fx}^b \\ S_{fy}^b \\ S_{fz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_{xz} & q_{xy} \\ q_{yz} & 1 & -q_{yx} \\ -q_{zy} & q_{zx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{fx}^a \\ S_{fy}^a \\ S_{fz}^a \end{bmatrix}$$

同样, 如果欲将陀螺测量的角速度 w_{ib}^g 正确地变换到载体坐标系 w_{ib}^b

其变换关系为

$$w_{ib}^b = \tilde{C}_g^b \tilde{w}_{ib}^g = [I - (\Delta C_g^b)^T] \tilde{w}_{ib}^g$$



两边同乘

$$[I - (\Delta C_a^b)^T]^{-1} S_f^b = \tilde{C}_a^b \tilde{S}_f^a = [I - (\Delta C_a^b)^T] \tilde{S}_f^a$$

$$[I - (\Delta C_a^b)^T][I + (\Delta C_a^b)^T] \approx I$$

$$\tilde{S}_f^a = [I - (\Delta C_a^b)^T]^{-1} S_f^b \approx [I + (\Delta C_a^b)^T] S_f^b$$

$$w_{ib}^b = \tilde{C}_g^b \tilde{w}_{ib}^g = [I - (\Delta C_g^b)^T] \tilde{w}_{ib}^g \Rightarrow \tilde{w}_{ib}^g = [I + (\Delta C_g^b)^T] w_{ib}^b$$

如果加速度计的安装误差角为3'，载体的运动加速度为0.1g，则安装误差相当于10⁻⁴g的加速度零位误差。对陀螺仪，如果有1'的安装误差角。则在静基座上工作时，大约产生0.004°/h等效漂移。



3.8.1.2 标度误差

Scale-factor errors

速度增量(加速度) q_a 加速度计的标度因子 $\text{m/s}^2/\text{脉冲}$



角速率 q_g 陀螺仪的标度因子 rad/s/V

q_{ac} } 存放在计算机内的标度因子 q_a 与 q_g 是通过测试确定的, 并存在计算机内
 q_{gc} }

采样得到的脉冲数



得到所要的增量

$$q_a \cdot q_{ac}$$

parts per million(ppm)

- Scale-factor error (uncompensated temperature effects) up to 400ppm/°C
- Scale-factor error non-linearity (at high rotation rates) 0.01-0.1%

3.8.1.2 标度误差

$$\begin{cases} q_{ac} = q_a (I + K_a) \\ q_{gc} = q_g (I + K_g) \end{cases}$$

式中： K_a ——由3个加速度计的标度因子误差量组成的对角阵，无量纲

$$K_a = \begin{bmatrix} K_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & K_{az} \end{bmatrix} \quad K_g = \begin{bmatrix} K_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{gz} \end{bmatrix}$$

K_g ——由3个陀螺仪的标度因子误差量形成的对角阵，无量纲

当x轴向陀螺输出角速度为 W_{ibx}^g 时，则相应的电压输出量(或脉冲数)为

$$n = \frac{W_{ibx}^g}{q_{gx}}, \text{在计算机内乘以标度因子 } q_{gcx}, \text{则在计算机内得到增量为}$$

$$q_{gcx} \times \frac{W_{ibx}^g}{q_{gx}}$$

对y轴和z轴完全相同，分别为

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ibx}^g &= (1 + K_{gx}) W_{ibx}^g \\ \tilde{W}_{iby}^g &= (1 + K_{gy}) W_{iby}^g \\ \tilde{W}_{ibz}^g &= (1 + K_{gz}) W_{ibz}^g \end{aligned}$$



3.8.1.2 标度误差

由标度因子误差所引起的角速度误差为

$$\Delta W_{ib}^g = \tilde{W}_{ib}^g - W_{ib}^g = K_g W_{ib}^g$$

比力误差为
$$\Delta S_f^a = \tilde{S}_f^a - S_f^a = K_a S_f^a$$

习惯上称为陀螺仪和加速度计的标度误差。

假设陀螺仪的标度因子误差为**0.001**，那么，在静基座上，由其产生的等效陀螺仪漂移大约为**0.001' 15°/h**。如果沿载体某一轴向的加速度为**0.1g**，当标度因子误差为**0.001**时，则等效的加速度零位误差**100mg**。

由此可见,为了保证惯性导航系统的精度，对标度因子误差的要求是严格的，对捷联式陀螺,标度因子误差通常在**5~50ppm**，加速度计的标度因子误差最大不超过**200ppm(ppm=parts per million)**。



3.8.1.2 标度误差

如果同时考虑安装误差和标度误差，并考虑陀螺仪本身的标度误差和加速度的零位误差则有

$$\begin{cases} \tilde{S}_f^b = (I + K_a)[I + (\Delta C_a^b)^T]S_f^b + \nabla \\ \tilde{w}_{ib}^b = (I + K_g)[I + (\Delta C_g^b)^T]w_{ib}^b + e \end{cases}$$

式中： \tilde{N} ——加速度计的零位误差，mg；

e ——陀螺仪的漂移误差，°/h。

将上式展开，并略掉二阶微量得

$$\begin{cases} \tilde{S}_f^b = [(I + K_a + (\Delta C_a^b)^T)]f^b + \nabla \\ \tilde{w}_{ib}^b = [(I + K_g + (\Delta C_g^b)^T)]w_{ib}^b + e \end{cases}$$



3.8.2 计算误差

❁ 3.8.2.1 计算误差的产生

❁ 3.8.2.1.1 量化误差

❁ 3.8.2.1.2 不可交换性误差

❁ 3.8.2.1.3 截断误差

❁ 3.8.2.1.4 舍入误差

❁ 3.8.2.2 方向余弦法的计算误差分析

❁ 3.8.2.2.1 误差评价函数

❁ 3.8.2.2.2 计算误差分析

❁ 3.8.2.3 四元数法的误差分析



3.8.2.1 计算误差的产生

在捷联式惯导系统中，主要的计算问题是姿态矩阵和位置矩阵的计算，而其中又以**姿态矩阵**的计算工作量最大。

从对信号采样算起，计算误差包括：量化误差、不可交换误差、计算方法上的截断误差和计算机有限字长的舍入误差等。

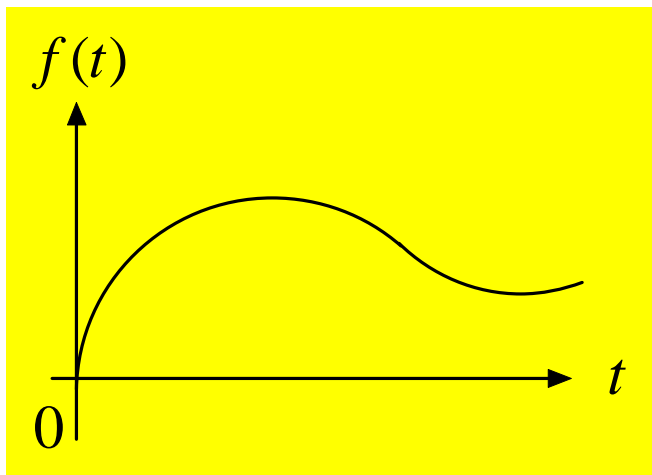


3.8.2.1.1 量化误差

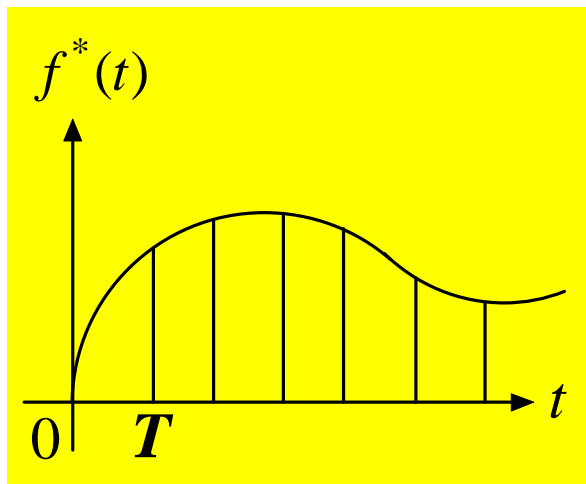
一个连续的模拟信号转化成计算机需要的离散数字信号，要经历2个断续过程

(1) 时间断续—采样过程。

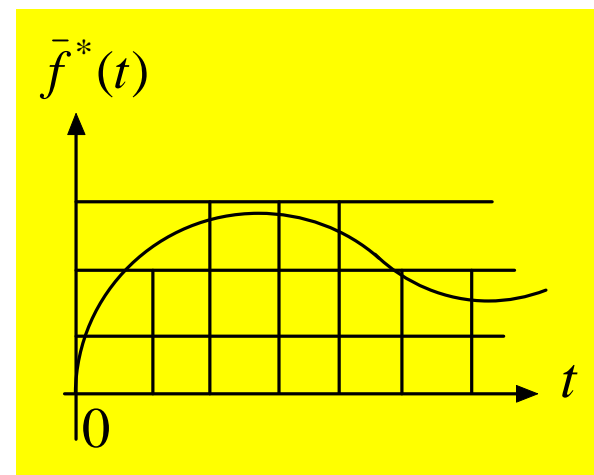
连续的模拟信号 $f(t)$ ，按一定时间间隔 T ，逐点的取其瞬时值，这个过程称为采样。连续的模拟信号 $f(t)$ 经过采样之后变为离散的模拟信号 $f^*(t)$ ，两个采样值之间的时间间隔，称为**采样周期**。



(a)连续的模拟信号



(b)离散的模拟信号



(c)离散的数字信号

(2) 数值断续—正量过程。

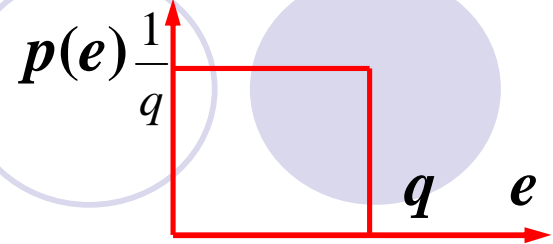
采样信号 $f^*(t)$ 在数值上表示成最小位二进制数的整倍数。这个过程称为正量。采样信号 $f^*(t)$ 经过正量后，变成离散的数字信号 $\bar{f}^*(t)$

正量过程造成的误差称为量化误差。量化误差可表示为： $e_1 = f^*(t) - \bar{f}^*(t)$



3.8.2.1.1 量化误差

在量化过程中,对剩余部分“ e ”,有两种处理方法:



- “只舍不入”的正量过程

这种正量过程,量化误差只有正值,它可以取 $0 \sim q_e$ (量化电平)之间的任意值,而且机会均等,因而是在 $(0, q_e)$ 上均匀分布的随机变量。误差的均值或误差的数学期望为

$$E(e_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e_1 p(e) de = \int_0^{q_e} \frac{1}{q_e} e de = \frac{q_e}{2} \quad p(e): \text{概率密度函数. 最大误差为 } e_{\max} = q_e$$
$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e - E(e))^2 p(e) de = \int_0^{q_e} \left(e - \frac{q_e}{2}\right)^2 \frac{1}{q_e} e de = \frac{q_e^2}{12}$$

, “有舍有入”的正量过程

这种正量过程,类似四舍五入的方法,即小于 $q/2$ 时舍去;大于 $q/2$

时,进入. 正量误差 $e_1 = f^*(t) - \bar{f}^*(t)$ 有正有负。它可以取 $-q/2 \sim q/2$ 之间的任意值,且机会均等,故在 $(-q/2, q/2)$ 上均匀分布的随机变量。

误差均值 $E[e]=0$



3.8.2.1.1 量化误差

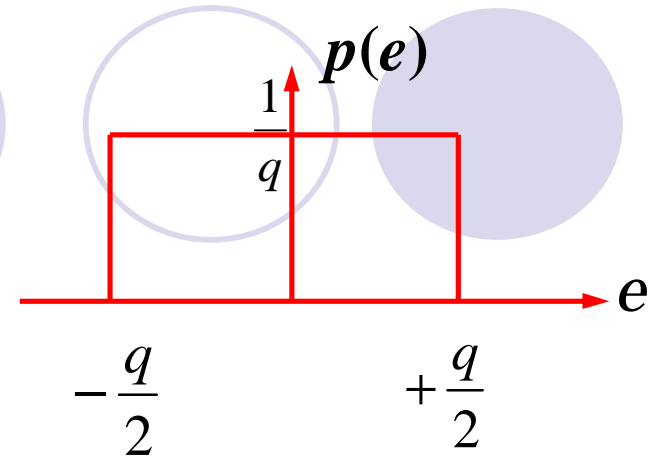
最大正量误差为 $|e_{\max}| = \frac{q_e}{2}$

误差的方差为

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e - E(e))^2 p(e) de = \int_{-\frac{q_e}{2}}^{\frac{q_e}{2}} (e)^2 \frac{1}{q_e} e de = \frac{q_e^2}{12}$$

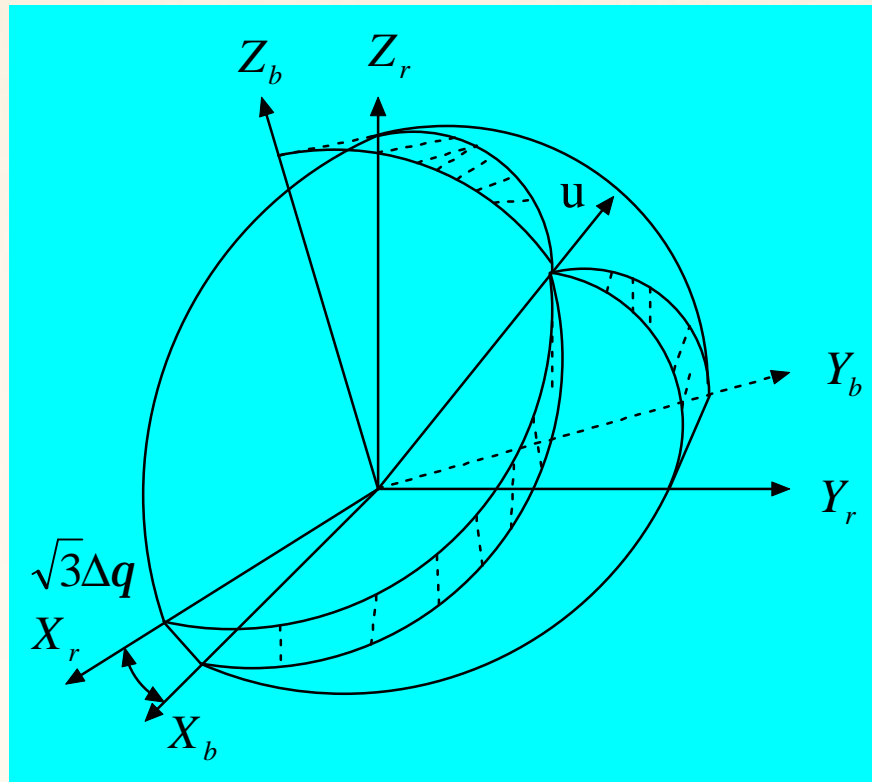
比较两种正量化的方法，当然是“有舍有入”的方法为好。

在实际的惯导系统中，为了有效地减小量化误差，还可以采取一些“抗量化措施”。例如，把量化的剩余量寄存起来，等到累计到一个量化值时即进入。



3.8.2.1.2 不可交换性误差

转动的不可交换性说明刚体的有限转动不是矢量。因此，不能按矢量合成或分解的方法来处理转动。



3.8.2.1.2 不可交换性误差

减小不可交换性误差的方法，除了选择适当的计算方法之外，从根本上来讲，只有减小陀螺采样的角增量，即增大采样频率，使 Dq 平方以上的各项小到可以忽略的程度。但是，采样频率的提高，增大了计算机的负担，在实际系统设计中，要将采用的算法阶次和采样频率统一考虑。高采样频率，可以用较低阶的算法。采样频率较低时，可以用较高阶的算法。



3.8.2.1.3 截断误差

在介绍的各种机上执行算法，本质上都采用有限项级数，而将高阶项截去，其截断的部分，就是截断误差。

显然，低阶算法截断误差大，高阶算法截断误差小。从降低截断误差考虑，采用高阶算法为好。但是高阶算法计算量大，增大计算机负担。为了减小计算机负担，就减小计算频率，这样，又降低了计算精度，在实际系统中，要将采用的算法和采样频率统一考虑。高采用频率，可以用较低阶的算法。采样频率低时，可以用较高阶的算法。



3.8.2.1.4 舍入误差

数字计算机的字长是有限的,但现在不成为瓶颈问题。



3.8.2.2 方向余弦法的计算误差分析

5.2.2.1 误差评价函数

用“C”表示理想的变换矩阵，用“ \hat{C} ”表示计算的变换矩阵

将矩阵的上下标省掉，则理想矩阵和计算矩阵的差值为：

$$DC = C - \hat{C}$$

取DC的范数为**评价函数**，则

$$\|\Delta C\| = \|C - \hat{C}\| = \left\{ \text{Tr} \left[(C - \hat{C})^T (C - \hat{C}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{C} = C(I + E)$$

Tr: 为矩阵的“迹”

$$\|C - \hat{C}\| = \left\{ \text{Tr} \left[(C - C(I + E))^T (C - C(I + E)) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\|C - \hat{C}\| = \left\{ \text{Tr} (E^T E) \right\}^{\frac{1}{2}}$$



$$\|C - \hat{C}\| = \left\{ \text{Tr}(E^T E) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3.8.2.2.1 误差评价函数

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

表明,用E可以表明计算的变换矩阵偏离其理想阵的程度。用 e_{ij} 表示E的元素,根据矩阵理论,一个任意矩阵,可以分解为一个**对称阵**和一个**反对称阵**的和。我们将E分解,可以写成

$$= \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{e_{12} + e_{21}}{2} & \frac{e_{13} + e_{31}}{2} \\ \frac{e_{21} + e_{12}}{2} & e_{22} & \frac{e_{23} + e_{32}}{2} \\ \frac{e_{13} + e_{31}}{2} & \frac{e_{32} + e_{23}}{2} & e_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{e_{12} - e_{21}}{2} & \frac{e_{13} - e_{31}}{2} \\ \frac{e_{21} - e_{12}}{2} & 0 & \frac{e_{23} - e_{32}}{2} \\ \frac{e_{31} - e_{13}}{2} & \frac{e_{32} - e_{23}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{11} & S_3 & S_2 \\ S_3 & e_{22} & S_1 \\ S_2 & S_1 & e_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_k = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) & i=1,2,3 \\ V_k = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) & j=1,2,3, k=1,2,3 \end{matrix}$$



3.8.2.2.1 误差评价函数

即E可以写作

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_D + \mathbf{V}_D$$

$$\|C - \hat{C}\| = \left\{ \text{Tr}(\mathbf{E}^T \mathbf{E}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & S_3 & S_2 \\ S_3 & e_{22} & S_1 \\ S_2 & S_1 & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & S_3 & S_2 \\ S_3 & e_{22} & S_1 \\ S_2 & S_1 & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$\|\Delta C\| = \|C - \hat{C}\| = \left[\text{Tr}(S_D^T S_D + V_D^T V_D) \right]^{\frac{1}{2}}$$

利用上面的两个式子可以用模拟仿真的方法定量的分析计算误差。



3.8.2.2.2 计算误差分析

两个正交坐标系之间的变换矩阵 C ，是正交阵，正交阵具有如下的性质： $C^T C = I$

表示

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

正交阵的正交条件

$$\left. \begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 &= 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 &= 1 \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} &= 0 \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} &= 0 \\ c_{13}c_{11} + c_{23}c_{21} + c_{33}c_{31} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

正交阵的列矢量（或行矢量）为单位矢量。一个坐标系轴向的三个单位矢量经过正交阵 C 变换到另一个坐标系时仍为单位矢量。即经过正交变换后矢量长度不变。

说明矩阵 C 的三个列矢量（或行矢量）是相互正交的，即沿一个正交坐标系轴向的三个正交单位矢量经过 C 变换后仍为一组正交矢量。



3.8.2.2.1 误差评价函数

考虑有计算误差的计算矩阵 \hat{C}

$$\hat{C} = C(I + E)$$

$$\hat{C}^T \hat{C} = (I + E^T) C^T C (I + E) \quad C^T C = I$$

将上式展开并将E看作小量，略掉二阶微量则有

$$\hat{C}^T \hat{C} = I + E + E^T$$

考虑到 $S_D^T = S_D \quad V_D^T = -V_D$

说明，计算的矩阵已不再是正交阵，其非正交误差为 $2S_D$ 。定义“ S_D ”为计算矩阵的非正交误差。

则有：

$$S_D = \frac{1}{2} (\hat{C}^T \hat{C} - I)$$



3.8.2.2.1 误差评价函数

$$S_D = \frac{1}{2}(\hat{C}^T \hat{C} - I)$$

$e_{11} = \frac{1}{2}(\hat{c}_{11}^2 + \hat{c}_{21}^2 + \hat{c}_{31}^2 - 1)$ 可以看出： e_{11}, e_{22}, e_{33} 为矢量长度改变的误差，即原来一组单位矢量，经过 \hat{C} 变换后，就不再是单位矢量了，这种误差称为 **刻度误差**。

$$e_{22} = \frac{1}{2}(\hat{c}_{12}^2 + \hat{c}_{22}^2 + \hat{c}_{32}^2 - 1)$$

$$e_{33} = \frac{1}{2}(\hat{c}_{13}^2 + \hat{c}_{23}^2 + \hat{c}_{33}^2 - 1)$$

$$S_1 = \hat{c}_{12}\hat{c}_{13} + \hat{c}_{22}\hat{c}_{23} + \hat{c}_{32}\hat{c}_{33}$$

$$S_2 = \hat{c}_{13}\hat{c}_{11} + \hat{c}_{23}\hat{c}_{21} + \hat{c}_{33}\hat{c}_{31}$$

$$S_3 = \hat{c}_{11}\hat{c}_{12} + \hat{c}_{21}\hat{c}_{22} + \hat{c}_{31}\hat{c}_{32}$$

如果 C 是正交阵，则 $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ ，因为 \hat{C} 不是正交阵。即一组正交的矢量，经 \hat{C} 变换后，就变成一组非正交矢量了， S_1, S_2, S_3 的值就是误差，这种误差称为 **扭斜误差**，或称不对称误差。



3.8.2.3 四元数法的误差分析

用“Q”表示理想的变换四元数

\hat{Q} 表示计算的四元数

Q可写作

$$Q = \cos \frac{\Delta q_0}{2} + \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0} \Delta \theta$$

$$C = \cos \frac{\Delta q_0}{2} \quad S = \frac{\sin \frac{\Delta q_0}{2}}{\Delta q_0}$$

$$Q = C_n + S_n Dq$$

$$= C_n + S_n \Delta q_x i + S_n \Delta q_y j + S_n \Delta q_z k$$

$$= \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i + \hat{q}_2 j + \hat{q}_3 k$$

阶次	C_n	S_n
1	1	$\frac{1}{2}$
2	$1 - \frac{\Delta q_0^2}{8}$	$\frac{1}{2}$
3	$1 - \frac{\Delta q_0^2}{8}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta q_0^2}{48}$
4	$1 - \frac{\Delta q_0^2}{8} + \frac{\Delta q_0^4}{384}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta q_0^2}{48}$



四元数法的误差分析续1

按四元数和方向余弦矩阵的关系，与 \hat{Q} 对应的方向余弦矩阵为

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3) & 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_2) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_1) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2) & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \end{bmatrix}$$

正交坐标系之间的变换矩阵

刻度误差与扭斜误差

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2}(\hat{c}_{11}^2 + \hat{c}_{21}^2 + \hat{c}_{31}^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}\{(\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2)^2 + (2(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3))^2 + (2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2))^2 - 1\} \end{aligned}$$



四元数法的误差分析续2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \{ \underbrace{(\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2)^2}_{\text{red}} + \underbrace{(2(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3))^2 + (2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2))^2}_{\text{blue}} - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \underbrace{(\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2)^2}_{\text{red}} - \underbrace{2(\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2)(\hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)}_{\text{green}} + \underbrace{(\hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)^2}_{\text{red}} + \underbrace{4(\hat{q}_1^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_2^2)}_{\text{blue}} - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \underbrace{\hat{q}_0^4 + \hat{q}_1^4 + 2\hat{q}_0^2\hat{q}_1^2}_{\text{magenta}} + \underbrace{\hat{q}_2^4 + \hat{q}_3^4 + 2\hat{q}_2^2\hat{q}_3^2}_{\text{orange}} - \underbrace{2(\hat{q}_0^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_3^2)}_{\text{green}} \\
 &\quad + \underbrace{4(\hat{q}_1^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_2^2)}_{\text{blue}} - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \hat{q}_0^4 + 2\hat{q}_0^2\hat{q}_1^2 + 2(\hat{q}_0^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_0^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_2^2 + \hat{q}_1^2\hat{q}_3^2) + 2\hat{q}_2^2\hat{q}_3^2 + \hat{q}_1^4 + \hat{q}_2^4 + \hat{q}_3^4 - 1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)^2 - 1 \}
 \end{aligned}$$



四元数法的误差分析-刻度误差

式中 $\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 = \|\hat{Q}\| \Rightarrow$ 是计算四元数的“范数”

精确的变换四元数应为规范化的四元数，即范数为1。而计算的四元数的刻度误差，就是其范数偏离1的数值。可见，由于计算误差的存在，使计算的四元数失去规范性。计算的四元数也可以周期地进行规范化处理，以消除刻度误差。

四元数的规范化问题



四元数法的误差分析-扭斜误差

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \hat{c}_{12}\hat{c}_{13} + \hat{c}_{22}\hat{c}_{23} + \hat{c}_{32}\hat{c}_{33} \\
 \hat{C} &= \begin{bmatrix} \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3) & 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_2) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_1) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2) & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \end{bmatrix} \\
 &= 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3)2(\hat{q}_1\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_2) + (\hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2)2(\hat{q}_2\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_1) \\
 &\quad + 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1)(\hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2) \\
 &= \underline{4\hat{q}_1^2\hat{q}_2\hat{q}_3} - \underline{4\hat{q}_0\hat{q}_1\hat{q}_2^2} + \underline{4\hat{q}_0\hat{q}_1\hat{q}_3^2} - \underline{4\hat{q}_0^2\hat{q}_2\hat{q}_3} + \underline{2\hat{q}_0^2\hat{q}_2\hat{q}_3} + \underline{2\hat{q}_0^3\hat{q}_1} - \underline{2\hat{q}_1^2\hat{q}_2\hat{q}_3} - \underline{2\hat{q}_0\hat{q}_1^3} \\
 &\quad + \underline{2\hat{q}_2^3\hat{q}_3} + \underline{2\hat{q}_2^2\hat{q}_0\hat{q}_1} - \underline{2\hat{q}_2\hat{q}_3^3} - \underline{2\hat{q}_0\hat{q}_1\hat{q}_3^2} + \underline{2\hat{q}_2\hat{q}_3\hat{q}_0^2} - \underline{2\hat{q}_2\hat{q}_3\hat{q}_1^2} - \underline{2\hat{q}_2^3\hat{q}_3} + \underline{2\hat{q}_2\hat{q}_3^3} \\
 &\quad - \underline{2\hat{q}_0^3\hat{q}_1} + \underline{2\hat{q}_0\hat{q}_1^3} + \underline{2\hat{q}_0\hat{q}_1\hat{q}_2^2} - \underline{2\hat{q}_0\hat{q}_1\hat{q}_3^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$S_i=0$$

计算的四元数没有扭斜误差



计算四元数的漂移误差

用 R^b 表示一个固定矢量在 b 坐标系轴向的分量构成的四元数，
用 R^n 表示一个矢量在 n 坐标系上分量构成的四元数，如果 Q 是坐
标系 b 和坐标系 n 之间的变换四元数，则有

$$R^n = Q \circ R^b \circ Q^* \quad \text{式中: } Q^* \text{ 为 } Q \text{ 共轭四元数}$$

考虑 Q 有误差，即计算的四元数 \hat{Q}

$$R^{n'} = \hat{Q} \circ R^b \circ \hat{Q}^* \quad R^b = \hat{Q}^* \circ R^{n'} \circ \hat{Q}$$

$$R^n = Q \circ \hat{Q}^* \circ R^{n'} \circ \hat{Q} \circ Q^*$$

$dQ \equiv Q \circ \hat{Q}^*$ 即 n 与 n' 之间的变换四元数为 dQ 。

$$R^n = dQ \circ R^{n'} \circ dQ^*$$

即 n' 相对 n 有一个等效转动，用 f 表示其转角，则有



计算四元数的漂移误差

n 相对 n 有一个等效转动，用 f 表示其转角，则有

$$dQ = \cos \frac{f}{2} + \sin \frac{f}{2} \frac{\mathbf{f}}{f} \quad \text{考虑到 } f \text{ 为小量} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{f}{2} \approx 1 \\ \sin \frac{f}{2} \approx \frac{f}{2} \end{array} \right.$$

$$dQ = 1 + \frac{\mathbf{f}}{2} \quad dQ \equiv Q \mathbf{o} \hat{Q}^*$$

$$\phi = 2(Q \mathbf{o} \hat{Q}^* - 1)$$

$$Q = C + S(\Delta q_x i + \Delta q_y j + \Delta q_z k)$$

$$\hat{Q} = C_n + S_n(\Delta q_x i + \Delta q_y j + \Delta q_z k)$$

$$f = 2\{[C + S(\Delta q_x i + \Delta q_y j + \Delta q_z k)] \mathbf{o} [C_n - S_n(\Delta q_x i + \Delta q_y j + \Delta q_z k)] - 1\}$$

$$f = 2[\underbrace{CC_n + SS_n \Delta q_0^2}_{=1} + (SC_n - CS_n)(\Delta q_x i + \Delta q_y j + \Delta q_z k) - 1]$$

$$f_i = 2(SC_n - CS_n)\Delta q_i \quad i=x, y, z$$



变换四元数的规范化



由于计算方法上的截断误差和计算机舍入误差，使计算的变换四元数的范数不等于1，变换四元数失去规范性，从而出现刻度误差。

$$\hat{Q} = \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i + \hat{q}_2 j + \hat{q}_3 k \quad \text{计算的四元数}$$

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad \text{规范化的四元数}$$

用最小二乘判据,求最优规范化的变换四元数

$$D^2 = \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - q_i)^2 \quad \text{考虑约束条件} \quad g = \sum_{i=0}^3 q_i^2 - 1 = 0$$

用拉格朗日乘数法,求在约束条件下的极值

$$f = D^2 + l g = \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - q_i)^2 + l \left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 - 1 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = -2(\hat{q}_i - q_i) + 2l q_i = 0$$



$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{1+l}$$

$$i = 0, 1, 2, 3$$

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\left(\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2}{(1+l)^2} = 1$$



$$\frac{1}{1+l} = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$



3.8.3 捷联式惯性导航系统的基本误差特性

- 3.8.3.1 数学平台的误差方程
- 3.8.3.2 速度误差方程
- 3.8.3.3 位置误差方程
- 3.8.3.4 系统误差方程
- 3.8.3.5 误差传播特性(静基座)



3.8.3.1 数学平台的误差方程

捷联式惯性导航系统和平台式惯导系统的主要区别，是前者用数学平台而后者用实体物理平台，从**基本原理**上看，**两种系统没有本质的区别**。

在静基座上或匀直运动时，捷联式系统的**基本特性**，包括**误差特性**，应与平台式惯导系统基本相同。

捷联式平台的计算误差，其性质类似陀螺的安装误差、刻度误差（标度误差）和漂移误差。所以，在分析误差特性时可以把计算误差归并到**惯性仪表误差**来考虑。

由于载体的角运动造成的惯性仪表的动态误差，对捷联式系统来说，是相当严重的，必须**采用专门的补偿措施**。



设备与模型



3.8.3.1 数学平台的误差方程

推导

$$\mathbf{\hat{x}} = -d\mathbf{\omega}_{ib}^n + d\mathbf{\omega}_{ie}^n + d\mathbf{\omega}_{en}^n - (\mathbf{\omega}_{ie}^n + \mathbf{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

$$\mathbf{\hat{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \mathbf{\omega}_{nb}^b \quad \mathbf{\omega}_{nb}^b = \mathbf{\omega}_{ib}^b - \mathbf{\omega}_{ie}^b - \mathbf{\omega}_{en}^b$$

$$\mathbf{\hat{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\mathbf{\omega}_{ib}^b - \mathbf{\omega}_{ie}^b - \mathbf{\omega}_{en}^b)$$

$$\mathbf{\hat{Q}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{\omega}_{ib}^b - \hat{\mathbf{\omega}}_{ie}^b - \hat{\mathbf{\omega}}_{en}^b)$$

$\mathbf{\omega}_{ib}^b$ 陀螺仪的实际输出

$\hat{\mathbf{\omega}}_{ie}^b$ 计算值

$\hat{\mathbf{\omega}}_{en}^b$ 计算值

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$d\mathbf{\hat{Q}} = \mathbf{\hat{Q}} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{Q} \circ \mathbf{\hat{Q}}^*$$

注意共轭

$$d\mathbf{\hat{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\mathbf{\omega}_{ib}^b - \mathbf{\omega}_{ie}^b - \mathbf{\omega}_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (-\mathbf{\omega}_{ib}^b + \hat{\mathbf{\omega}}_{ie}^b + \hat{\mathbf{\omega}}_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$



数学平台的误差方程

$$d\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\underline{\omega_{ib}^b} - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\underline{-\omega_{ib}^b + \hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b}) \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$\underline{\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b} = \mathbf{Q}^* \circ (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ \mathbf{Q}$$

$$\underline{\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b} = \hat{\mathbf{Q}}^* \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \circ \hat{\mathbf{Q}}$$

$$d\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ib}^b$$

$$\underline{d\omega_{ib}^b} = \mathbf{Q}^* \circ d\omega_{ib}^n \circ \mathbf{Q}$$

$$d\mathcal{Q} = -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\underline{\omega_{ib}^b} - \omega_{ib}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^* \circ \underline{d\omega_{ib}^n} \circ \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^* \circ (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \circ \hat{\mathbf{Q}} \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$= -\frac{1}{2} d\omega_{ib}^n \circ \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n)$$

$$= -\frac{1}{2} d\omega_{ib}^n \circ d\mathbf{Q} - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ d\mathbf{Q} + \frac{1}{2} d\mathbf{Q} \circ (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)$$



数学平台的误差方程

$$d\mathcal{Q} = -\frac{1}{2}d\omega_{ib}^n \circ d\mathbf{Q} - \frac{1}{2}(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ d\mathbf{Q} + \frac{1}{2}d\mathbf{Q} \circ (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)$$

$$d\mathbf{Q} = 1 + \frac{\mathbf{f}}{2} \quad d\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{F}}{2}$$

$$\mathcal{F} = -d\omega_{ib}^n \circ \left(1 + \frac{\mathbf{f}}{2}\right) - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ \left(1 + \frac{\mathbf{f}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\mathbf{f}}{2}\right) \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n)$$

$$d\hat{\omega}_{ie}^n = \hat{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n$$

$$d\hat{\omega}_{en}^n = \hat{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n$$

$$\mathcal{F} = -d\hat{\omega}_{ib}^n + d\hat{\omega}_{ie}^n + d\hat{\omega}_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{f}$$



数学平台的误差方程

$$\dot{\mathbf{f}} = -d\tilde{\omega}_{ib}^n + d\tilde{\omega}_{ie}^n + d\tilde{\omega}_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

即数学平台误差角方程的矢量形式，对平台式惯导系统同样也适用。 n 表示地理坐标系， n^c 表示计算的地理坐标系， n^c 与 n 之间有一误差，不可能完全重合。

f 表示 n^c 坐标系相对 n 坐标系转动的角度，也称失准角(misalignment)

$$d\tilde{\omega}_{ib}^n : \text{为陀螺误差, } d\tilde{\omega}_{ib}^n = [K_g + (\Delta C_g^b)^T] w_{ib}^n + e$$

在分析基本误差特性时，为了简单起见，只考虑陀螺漂移，则

$$-d\tilde{\omega}_{ib}^n = \begin{bmatrix} -e_E \\ -e_N \\ -e_U \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos j \\ w_{ie} \sin j \end{bmatrix} \quad d\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin j dj \\ w_{ie} \cos j dj \end{bmatrix}$$



数学平台的误差方程

$$\mathbf{f} = -d\omega_{ib}^n + d\omega_{ie}^n + d\omega_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad d\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L dL \\ w_{ie} \cos L dL \end{bmatrix} \quad \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_N}{R} \\ \frac{V_E}{R} \\ \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}$$

$$d\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{dV_N}{R} \\ \frac{dV_E}{R} \\ \frac{dV_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{V_E}{R} \sec^2 L dL \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_E \\ -e_N \\ -e_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L dL \\ w_{ie} \cos L dL \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{dV_N}{R} \\ \frac{dV_E}{R} \\ \frac{dV_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{V_E}{R} \sec^2 L dL \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & (w_{ie} + \mathbf{f}) \sin L & -(w_{ie} + \mathbf{f}) \cos L \\ -(w_{ie} + \mathbf{f}) \sin L & 0 & -\frac{V_N}{R} \\ (w_{ie} + \mathbf{f}) \cos L & \frac{V_N}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_U \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \frac{V_E}{R \cos L}$$



捷联式惯导系统

——捷联式惯导系统的误差分析

程向红

2010.04.16



3.8.3 捷联式惯性导航系统的基本误差特性

- 3.8.3.1 数学平台的误差方程
- 3.8.3.2 速度误差方程
- 3.8.3.3 位置误差方程
- 3.8.3.4 系统误差方程
- 3.8.3.5 误差传播特性(静基座)



3.8.3.1 数学平台的误差方程

捷联式惯性导航系统和平台式惯导系统的主要区别，是前者用数学平台而后者用实体物理平台，从**基本原理**上看，**两种系统没有本质的区别**。

在静基座上或匀直运动时，捷联式系统的**基本特性**，包括**误差特性**，应与平台式惯导系统基本相同。

捷联式平台的计算误差，其性质类似陀螺的安装误差、刻度误差（标度误差）和漂移误差。所以，在分析误差特性时可以把计算误差归并到**惯性仪表误差**来考虑。

由于载体的角运动造成的惯性仪表的动态误差，对捷联式系统来说，是相当严重的，必须**采用专门的补偿措施**。



设备与模型



3.8.3.1 数学平台的误差方程

推导

$$\mathbf{\dot{x}} = -d\omega_{ib}^n + d\omega_{ie}^n + d\omega_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

$$\mathbf{\dot{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \omega_{nb}^b \quad \omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b$$

$$\mathbf{\dot{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b)$$

$$\mathbf{\dot{Q}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}} \circ (\omega_{ib}^b - \hat{\omega}_{ie}^b - \hat{\omega}_{en}^b)$$

ω_{ib}^b 陀螺仪的实际输出

$\hat{\omega}_{ie}^b$ 计算值

$\hat{\omega}_{en}^b$ 计算值

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$d\mathbf{\dot{Q}} = \mathbf{\dot{Q}} \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{Q} \circ \mathbf{\dot{Q}}^*$$

注意共轭

$$d\mathbf{\dot{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (\omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ (-\omega_{ib}^b + \hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b) \circ \hat{\mathbf{Q}}^*$$



数学平台的误差方程

$$d\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}(\underline{\omega_{ib}^b} - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}(\underline{-\omega_{ib}^b} + \hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$\underline{\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b} = \mathbf{Q}^* \mathbf{o}(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \mathbf{o}\mathbf{Q}$$

$$\underline{\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b} = \hat{\mathbf{Q}}^* \mathbf{o}(\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}$$

$$d\underline{\omega_{ib}^b} = \underline{\omega_{ib}^b} - \omega_{ib}^b$$

$$\underline{d\omega_{ib}^b} = \mathbf{Q}^* \mathbf{o}d\omega_{ib}^n \mathbf{o}\mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{Q} &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}(\underline{\omega_{ib}^b} - \omega_{ib}^b) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}(\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}(\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{en}^b) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}\mathbf{Q}^* \mathbf{o}\underline{d\omega_{ib}^n} \mathbf{o}\mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}\mathbf{Q}^* \mathbf{o}(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \mathbf{o}\mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* \mathbf{o}(\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* \\ &= -\frac{1}{2} d\omega_{ib}^n \mathbf{o}\mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \mathbf{o}\mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{o}\hat{\mathbf{Q}}^* \mathbf{o}(\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \\ &= -\frac{1}{2} d\omega_{ib}^n \mathbf{o}d\mathbf{Q} - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \mathbf{o}d\mathbf{Q} + \frac{1}{2} d\mathbf{Q} \mathbf{o}(\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \end{aligned}$$



数学平台的误差方程

$$d\mathcal{Q} = -\frac{1}{2}d\omega_{ib}^n \circ dQ - \frac{1}{2}(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ dQ + \frac{1}{2}dQ \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n)$$

$$dQ = 1 + \frac{f}{2} \quad d\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{F}}{2}$$

$$\mathcal{F} = -d\omega_{ib}^n \circ \left(1 + \frac{f}{2}\right) - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \circ \left(1 + \frac{f}{2}\right) + \left(1 + \frac{f}{2}\right) \circ (\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n)$$

$$d\omega_{ie}^n = \hat{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n$$

$$d\omega_{en}^n = \hat{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n$$



$$\mathcal{F} = -d\omega_{ib}^n + d\omega_{ie}^n + d\omega_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times f$$



数学平台的误差方程

$$\dot{\mathbf{f}} = -d\tilde{\omega}_{ib}^n + d\tilde{\omega}_{ie}^n + d\tilde{\omega}_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

即数学平台误差角方程的矢量形式，对平台式惯导系统同样也适用。 n 表示地理坐标系， n^c 表示计算的地理坐标系， n^c 与 n 之间有一误差，不可能完全重合。

\mathbf{f} 表示 n^c 坐标系相对 n 坐标系转动的角度，也称失准角(misalignment)

$$d\tilde{\omega}_{ib}^n : \text{为陀螺误差, } d\tilde{\omega}_{ib}^n = [K_g + (\Delta C_g^b)^T] w_{ib}^n + e$$

在分析基本误差特性时，为了简单起见，只考虑陀螺漂移，则

$$-d\tilde{\omega}_{ib}^n = \begin{bmatrix} -e_E \\ -e_N \\ -e_U \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad d\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L dL \\ w_{ie} \cos L dL \end{bmatrix}$$



数学平台的误差方程

$$\delta \mathbf{f} = -d\boldsymbol{\omega}_{ib}^n + d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + d\boldsymbol{\omega}_{en}^n - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L dL \\ w_{ie} \cos L dL \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N}{R} \\ \frac{v_E}{R} \\ \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}$$

$$d\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{dv_N}{R} \\ \frac{dv_E}{R} \\ \frac{dv_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{v_E}{R} \sec^2 L dL \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta f_E \\ \delta f_N \\ \delta f_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_E \\ -e_N \\ -e_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L dL \\ w_{ie} \cos L dL \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{dv_N}{R} \\ \frac{dv_E}{R} \\ \frac{dv_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{v_E}{R} \sec^2 L dL \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & (w_{ie} + \delta f) \sin L & -(w_{ie} + \delta f) \cos L \\ -(w_{ie} + \delta f) \sin L & 0 & -\frac{v_N}{R} \\ (w_{ie} + \delta f) \cos L & \frac{v_N}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix}$$

$$\delta f = \frac{v_E}{R \cos L}$$



3.8.3.2 速度误差方程

$$\mathbf{\bar{a}}_{en}^n = \mathbf{f}^n - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n$$

利用速度方程，对其进行扰动可以推出速度误差方程：

$$d\mathbf{\bar{a}}^n = d\mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \times \mathbf{f} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times d\mathbf{v}^n - (2d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + d\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$$

式中 $d\mathbf{f}^n$ 为加速度计误差在 n 坐标系内的向量表示。

$$d\mathbf{f}^n = [K_a + (\Delta C_a^b)^T] \mathbf{f}^n + \nabla^n$$

推导 （坐标系是东北天）载体相对地球运动的加速度为

$$\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{f} - (2\mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{en}) \times \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad \odot$$

在捷联式惯导系统中，加速度计直接安装在载体上，故上式为

$$\mathbf{\bar{a}}^b = \mathbf{f}^b - (2\hat{\mathbf{w}}_{ie}^b + \hat{\mathbf{w}}_{en}^b) \times \hat{\mathbf{v}}^b + \hat{\mathbf{g}}^b$$



3.8.3.2 速度误差方程

推导 在捷联式惯导系统中，加速度计直接安装在载体上，故上式为

$$\hat{\mathbf{a}}^b = \mathbf{f}^b - (2\hat{\mathbf{w}}_{ie}^b + \hat{\mathbf{w}}_{en}^b) \times \hat{\mathbf{v}}^b + \hat{\mathbf{g}}^b$$

计算值=真值+误差

为加速度计测量的比力

为计算值

$$\hat{\mathbf{w}}_{ie}^b = \mathbf{w}_{ie}^b + d\mathbf{w}_{ie}^b$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{en}^b = \mathbf{w}_{en}^b + d\mathbf{w}_{en}^b$$

$$\hat{\mathbf{v}}^b = \mathbf{v}^b + d\mathbf{v}^b$$

$$\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g} = 0$$

定义加速度误差为 $d\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$

$$\text{则 } d\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{f}^b - \mathbf{f}^b - (2\hat{\mathbf{w}}_{ie}^b + \hat{\mathbf{w}}_{en}^b) \times \hat{\mathbf{v}}^b + (2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b + \hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}$$

$$\Rightarrow d\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{f}^b - \mathbf{f}^b - (2\mathbf{w}_{ie}^b + 2d\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b + d\mathbf{w}_{en}^b) \times (\mathbf{v}^b + d\mathbf{v}^b) + (2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b$$

上式展开并略掉二阶微量得

$$d\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{f}^b - \mathbf{f}^b - (2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b) \times d\mathbf{v}^b - (2d\mathbf{w}_{ie}^b + d\mathbf{w}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b$$

$d\hat{\mathbf{a}}$ 从 b 坐标系变换到 n 坐标系则有

$$d\hat{\mathbf{a}}^n = \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{0} \mathbf{f}^b \mathbf{0} \hat{\mathbf{Q}}^* - \mathbf{Q} \mathbf{0} \mathbf{f}^b \mathbf{0} \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q} \mathbf{0} [(2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b) \times d\mathbf{v}^b + (2d\mathbf{w}_{ie}^b + d\mathbf{w}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b] \mathbf{0} \mathbf{Q}^*$$



3.8.3.2 速度误差方程

推导 $d\mathbf{v}^b$ 从 b 坐标系变换到 n 坐标系则有

$$d\mathbf{v}^n = \hat{Q} \circ \mathbf{v}^b \circ \hat{Q}^* - \mathbf{Q} \circ \mathbf{f}^b \circ \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q} \circ [(2\mathbf{w}_{ie}^b + \mathbf{w}_{en}^b) \times d\mathbf{v}^b + (2d\mathbf{w}_{ie}^b + d\mathbf{w}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b] \circ \mathbf{Q}^*$$

考虑 $\mathbf{v}^b = \mathbf{f}^b + d\mathbf{f}^b$ \mathbf{f}^n

则 $\hat{Q} \circ \mathbf{v}^b \circ \hat{Q}^* = \hat{Q} \circ \mathbf{f}^b \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ d\mathbf{f}^b \circ \hat{Q}^*$

由 $\mathbf{f}^b = \mathbf{Q}^* \circ \mathbf{f}^n \circ \mathbf{Q}$
 $d\mathbf{f}^b = \mathbf{Q}^* \circ d\mathbf{f}^n \circ \mathbf{Q}$

$$d\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q} \circ \hat{Q}^*$$

$$d\mathbf{Q}^* \equiv \hat{Q} \circ \mathbf{Q}^*$$

则 $\hat{Q} \circ \mathbf{v}^b \circ \hat{Q}^* = \hat{Q} \circ \mathbf{Q}^* \circ \mathbf{f}^n \circ \mathbf{Q} \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ \mathbf{Q}^* \circ d\mathbf{f}^n \circ \mathbf{Q} \circ \hat{Q}^*$

$$= d\mathbf{Q}^* \circ \mathbf{f}^n \circ d\mathbf{Q} + d\mathbf{Q}^* \circ d\mathbf{f}^n \circ d\mathbf{Q}$$

由 $d\mathbf{Q} = 1 + \mathbf{f}/2 = 1 + 0.5\mathbf{f}$, $d\mathbf{Q}^* = 1 - 0.5\mathbf{f}$ 上式展开并略掉二阶微量得

$$= (1 - \mathbf{f}/2) \circ \mathbf{f}^n \circ (1 + \mathbf{f}/2) + (1 - \mathbf{f}/2) \circ d\mathbf{f}^n \circ (1 + \mathbf{f}/2)$$

$$= \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{f} + d\mathbf{f}^n + d\mathbf{f}^n \cdot \mathbf{f}$$

二阶微量

$$d\mathbf{v}^n = d\mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \times \mathbf{f} - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times d\mathbf{v}^n - (2d\mathbf{w}_{ie}^n + d\mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$$

利用 $L \circ M = l_0 m_0 + l_0 m + m_0 l - l \times m + l \cdot m$ ✦

速度误差方程

$$d\mathbf{f}^n = [K_a + (\Delta C_a^b)^T] \mathbf{f}^n + \nabla^n = \begin{bmatrix} \nabla_E \\ \nabla_N \\ \nabla_U \end{bmatrix}$$

在分析基本特性时，为了简单起见，只考虑加速度计的零位误差，即

$$\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} \quad d\mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} dv_E \\ dv_N \\ dv_U \end{bmatrix}$$

$$2d\omega_{ie}^n + d\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{dv_N}{R} \\ -2w_{ie} \sin L dL + \frac{dv_E}{R} \\ 2w_{ie} \cos L dL + \frac{dv_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{v_E}{R} \sec^2 L dL \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\&_E \\ d\&_N \\ d\&_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_E \\ \nabla_N \\ \nabla_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f_U & f_N \\ f_U & 0 & -f_E \\ -f_N & f_E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (2w_{ie} + I)\sin L & -(2w_{ie} + I)\cos L \\ -(2w_{ie} + I)\sin L & 0 & -\frac{v_N}{R} \\ (2w_{ie} + I)\cos L & \frac{v_N}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_E \\ dv_N \\ dv_U \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 2w_{ie} \cos L dL + \frac{dv_E}{R} \operatorname{tg} L + \frac{v_E}{R} \sec^2 L dL & 2w_{ie} \sin L dL - \frac{dv_E}{R} \\ -2w_{ie} \cos L dL - \frac{dv_E}{R} \operatorname{tg} L - \frac{v_E}{R} \sec^2 L dL & 0 & -\frac{dv_N}{R} \\ -2w_{ie} \sin L dL + \frac{dv_E}{R} & \frac{dv_N}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_E \\ v_N \\ v_U \end{bmatrix}$$



3.8.3.3 位置误差方程

$$L = \frac{v_N}{R} \quad \Rightarrow \quad dL = \frac{dv_N}{R}$$

$$l = \frac{v_E}{R \cos L} \quad \Rightarrow \quad dl = \frac{dv_E}{R \cos L} + \frac{v_E}{R \cos L} \operatorname{tg} L dL$$



3.8.3.4 系统误差方程

数学平台误差方程 $\dot{\mathbf{f}} = -d\boldsymbol{\omega}_{ib}^n + d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + d\boldsymbol{\omega}_{en}^n - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{f}$

速度误差方程 $d\dot{\mathbf{v}}^n = d\mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \times \mathbf{f} - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times d\mathbf{v}^n - (2d\mathbf{w}_{ie}^n + d\mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$

位置误差方程 $dL = \frac{dv_N}{R} \quad d\mathbf{f} = \frac{dv_E}{R \cos L} + \frac{v_E}{R \cos L} \text{tg}L dL$

→ 捷联式惯导系统的误差方程

由于惯导系统的垂直通道是发散的，通常不用。所以 $d\mathbf{f}_U$ 可以不考虑

取状态变量 $\mathbf{x}(t) = [dv_E \quad dv_N \quad f_E \quad f_N \quad f_U \quad dL \quad dl]^T$

$$\mathbf{B}(t) = [\nabla_E \quad \nabla_N \quad -\mathbf{e}_E \quad -\mathbf{e}_N \quad -\mathbf{e}_U \quad 0 \quad 0]^T$$

则系统误差方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)$$



3.8.3.4 系统误差方程

$$\mathbf{f}^n = -d\boldsymbol{\omega}_{ib}^n + d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + d\boldsymbol{\omega}_{en}^n - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{f}^n$$

$$d\mathbf{f}^n = d\mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \times \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{w}_{ie}^n + \boldsymbol{w}_{en}^n) \times d\mathbf{v}^n - (2d\boldsymbol{w}_{ie}^n + d\boldsymbol{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$$

$$dL = \frac{dv_N}{R}$$

$$dI = \frac{dv_E}{R \cos L} + \frac{v_E}{R \cos L} \operatorname{tg} L dL$$

在黑板上写系统误差方程！

可以看出，由于 $F_{i7}(i=1,2,1/4,7)=0$ ，所以 dI 是在系统回路之外，不影响系统动态特性，可以不考虑。

另外，为了简单起见，考虑系统在静基座的情况。



3.8.3.5 误差传播特性(静基座)

$$v_E=v_N=v_U=0, f_E=f_N=0, f_U=g \quad \text{零姿态}$$

$$\begin{bmatrix} d\delta_E \\ d\delta_N \\ \delta_E \\ \delta_N \\ \delta_U \\ dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2w_{ie} \sin L & 0 & -g & 0 & 0 \\ -2w_{ie} \cos L & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L & 0 \\ 1/R & 0 & -w_{ie} \sin L & 0 & 0 & -w_{ie} \sin L \\ tgL/R & 0 & w_{ie} \cos L & 0 & 0 & w_{ie} \cos L \\ 0 & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_E \\ dv_N \\ f_E \\ f_N \\ f_U \\ dL \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_E \\ \nabla_N \\ -e_E \\ -e_N \\ -e_U \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)$$



$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)$ 常值矩阵

取拉氏变换

$$sX(s) - x(0) = FX(s) + B(s)$$

$$X(s) = (sI - F)^{-1}[x(0) + B(s)] = \frac{N(s)}{\Delta(s)}[x(0) + B(s)]$$

$$\Delta(s) = |sI - F|$$

$$w_s^2 = \frac{g}{R}$$

Matlab仿真

$$(s^6 * R^2 + 5 * s^4 * R^2 * w_{ie}^2 * \sin L^2 + s^4 * R^2 * w_{ie}^2 * \cos L^2 + 2 * s^4 * R * g + 2 * w_{ie}^2 * \sin L^2 * g * s^2 * R + 2 * s^2 * R * g * w_{ie}^2 * \cos L^2 + 4 * s^2 * R^2 * w_{ie}^4 * \sin L^4 + 4 * s^2 * R^2 * w_{ie}^4 * \sin L^2 * \cos L^2 + g^2 * s^2 + g^2 * w_{ie}^2 * \cos L^2 + g^2 * w_{ie}^2 * \sin L^2)$$

$$s^6 + 5s^4 w_{ie}^2 \sin^2 L + s^4 w_{ie}^2 \cos^2 L + 2s^4 w_s^2 + 2s^2 w_{ie}^2 w_s^2 \sin^2 L + 2s^2 w_{ie}^2 w_s^2 \cos^2 L + 4s^2 w_{ie}^4 \sin^4 L + 4s^2 w_{ie}^4 \sin^2 L \cos^2 L + s^2 w_s^4 + w_{ie}^2 w_s^4 \cos^2 L + w_{ie}^2 w_s^4 \sin^2 L$$

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^4 (s^2 + w_{ie}^2) + 4w_{ie}^2 \sin^2 L s^2 (s^2 + w_{ie}^2) + 2w_s^2 s^2 (s^2 + w_{ie}^2) + w_s^4 (s^2 + w_{ie}^2) \\ &= (s^2 + w_{ie}^2) [s^4 + 2s^2 (w_s^2 + 2w_{ie}^2 \sin^2 L) + w_s^4] \end{aligned}$$



误差传播特性(静基座)

$$\Delta(s) = 0$$

$$(s^2 + w_{ie}^2)[s^4 + 2s^2(w_s^2 + 2w_{ie}^2 \sin^2 L) + w_s^4] = 0$$

$$\begin{cases} s^2 + w_{ie}^2 = 0 \\ s^4 + 2s^2(w_s^2 + 2w_{ie}^2 \sin^2 L) + w_s^4 = 0 \end{cases} \quad s_{1,2} = \pm i w_{ie} \quad \longrightarrow \quad T_e = \frac{2p}{w_{ie}} = 24h$$

$$w_s = \sqrt{\frac{9.8}{6.3 \times 10^6}} = 1.24 \times 10^{-3} / s \quad w_{ie} = 0.729 \times 10^{-4} / s \quad \Rightarrow \quad w_s \gg w_{ie}$$

可近似分解为

$$[s^2 + (w_s + w_{ie} \sin L)^2][s^2 + (w_s - w_{ie} \sin L)^2] = 0$$

$$\begin{cases} s_{3,4} = \pm i(w_s + w_{ie} \sin L) \\ s_{5,6} = \pm i(w_s - w_{ie} \sin L) \end{cases}$$

$$(w_s - w_{ie} \sin L)^2 (w_s + w_{ie} \sin L)^2 = (w_s^2 - w_{ie}^2 \sin^2 L)^2 \approx w_s^4$$



误差传播特性(静基座)

表示系统中还包含有角频率 $w_s + w_{ie} \sin L$ 和 $w_s - w_{ie} \sin L$ 的两种振荡运动, 由于 $w_s \gg w_{ie} \sin L$, 它们合在一起就产生差频, 如

$$a = a(0) \sin(w_s + w_{ie} \sin L)t + a(0) \sin(w_s - w_{ie} \sin L)t$$

$$= 2a(0) \cos(w_{ie} \sin L)t \sin w_s t$$

产生一个频率为 w_s 的振荡, 而其幅值为 $2a(0)\cos(w_{ie} \sin L)t$, 即振荡幅值是随 $\cos(w_{ie} \sin L)t$ 而变化的。因此, 合成的振荡具有调幅的性质。

$$w_s = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad T_s = \frac{2p}{w_s} = 84.4 \text{ min}$$

$$T_e = \frac{2p}{w_{ie}} = 24 \text{ h}$$

$$\text{当 } L=45^\circ \quad T_F = \frac{2p}{w_{ie} \sin L} = 34 \text{ h}$$

à è 舒拉振荡

à è 地球周期振荡

à è 傅科振荡

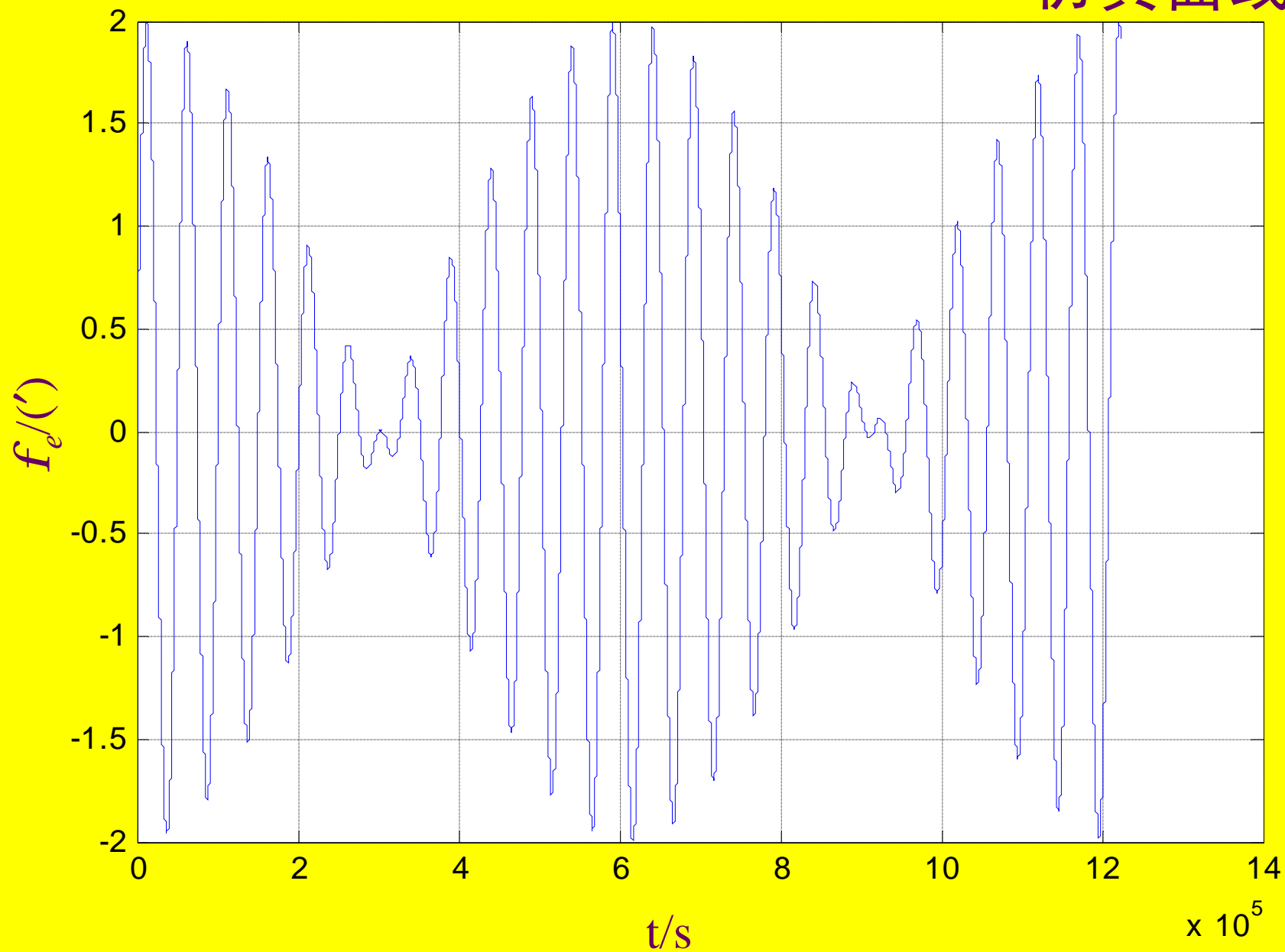
} 3
种
振
荡

这些基本特性, 捷联式惯导系统和平台式惯导系统是一样的

傅科振荡是速度误差中的 $2w_{ie} \sin L dv_N$, $2w_{ie} \sin L dv_E$, 两项引起的。

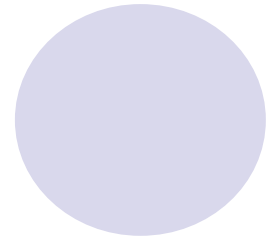
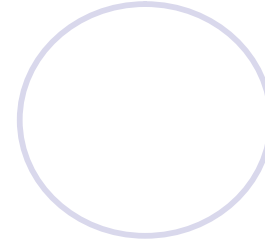
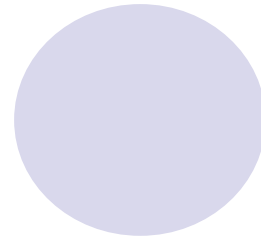
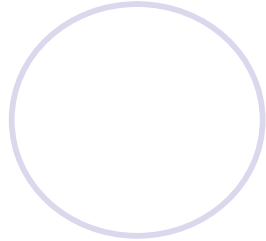
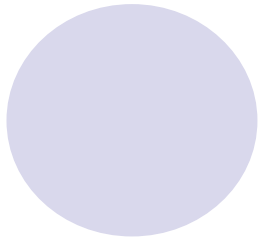


仿真曲线



思考题：请分别研究

1. 陀螺漂移引起的系统误差
2. 加速度计的零位误差引起的导航误差
3. 初始对准对系统误差的影响



3.8.4 仿真技术

- | 3.8.4.1 系统模型与仿真
- | 3.8.4.2 系统仿真的类型
- | 3.8.4.3 系统仿真的一般步骤
- | 3.8.4.4 仿真技术在捷联惯导系统中的应用



3.8.4.1 系统模型与仿真

G.戈登在其所著的《系统仿真》一书中说：系统这个术语已经在各个领域用得如此广泛，以致**很难**给它下一个定义。

古希腊原子论创始人**德谟克利特**（公元前460-公元前370）的著作《世界大系统》一书。系统：任何事物都是在**联系**中显现出来的，都是在系统中存在的，系统联系规定每一事物，而每一联系又能反映系统联系的总貌。

戈登：按照某些规律结合起来，互相作用、互相依存的所有实体的集合或总和。

定义一个系统时，首先要确定系统的**边界**。尽管世界上的事物是相互联系的，但当我们研究某一对象时，总是要将**对象与环境**区别开来。**边界**确定了系统的范围，边界以外对系统的作用称为**系统的输入**，系统对边界以外的环境的作用称为**系统的输出**。



描述系统“三要素”

实体 实体确定了系统的构成，也就是系统的边界。

属性 属性也称为描述变量，描述每一实体的特征。

活动 活动定义了系统内部实体之间的相互作用，从而确定了系统内部发生变化的过程。



模型

为了研究、分析、设计和实现一个系统，需要进行**试验**。

两大类试验的方法

1. 直接在**真实系统**上进行。
2. 先**构造模型**，通过对模型的试验来代替或部分代替对真实系统的试验。

传统上主要采用第一种方法，随着科学技术的发展，尽管第一种方法在**某些情况下仍然是必不可少的**，但第二种方法日益成为人们**更为常用**的方法，主要原因在于：



第二种方法日益成为**更为常用**的方法的主要原因

- 系统还处于设计阶段，**真实的系统尚未建立**，人们需要更准确地了解未来系统的性能，只能通过对模型的试验来了解；
- 在真实系统上进行试验可能会**引起系统破坏或发生故障**，例如，对一个处于运行状态的化工厂系统或电力系统进行没有把握的试验将会冒巨大的风险；
- 需要进行多次试验时，难以保证每次试验的条件相同，因而无法准确判断试验结果的优劣；
- 试验**时间太长**或**费用昂贵**。



在模型上进行试验日益为人们青睐，建模技术也随之发展起来

两大类
模型为

物理模型

采用一定的比例尺按照真实系统的“样子”制作。

沙盘模型就是物理模型的典型例子

数学模型

用数学表达式来描述系统的内在规律。

在实际建模时，要求不同，模型描述的详细程度也不尽相同，也称为表示的水平不同，具体地有：



模型描述的详细程度不尽相同，即表示的水平不同

行为水平

亦称为**输入输出**水平

该水平的模型将系统视为一个“**黑盒**”，在输入信号作用下，只对输出进行测量。

分解结构水平

将系统看成**若干个“黑盒”**连接起来，定义每个“黑盒”的输入与输出，以及它们相互之间的连接关系。

状态结构水平

不仅定义了系统的输入与输出，**而且**还定义了系统内部的**状态及状态转移函数**。



“仿真”的技术定义

1961年，G.W.Morgenthater首次对“仿真”进行了技术定义：“仿真意指在实际系统尚不存在的情况下对于系统或活动本质的实现”。

Korn在1978年的著作《连续系统仿真》中将仿真定义为“用能代表所研究的系统的模型作实验”。

1982年，Spriet进一步将仿真的内涵加以扩充，定义为“所有支持模型建立与模型分析的活动即为仿真活动”。

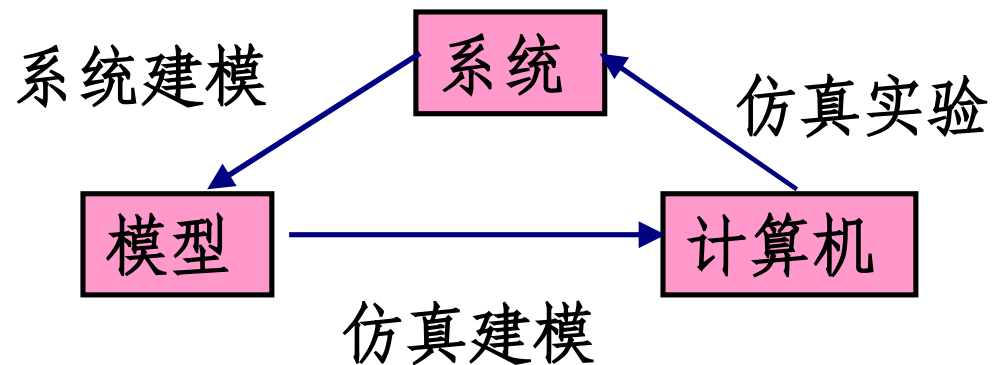
Oren在1984年在给出了仿真的基本概念框架“建模——实验——分析”的基础上，提出了“仿真是一种基于模型的活动”的定义，被认为是现代仿真技术的一个重要概念。



无论哪种定义, 仿真基于**模型**这一基本观点是共同的

综上, “系统、模型、仿真”三者之间有着密切的关系。系统是研究的**对象**, **模型**是系统的**抽象**, **仿真**是通过对模型的**实验**达到研究系统的目的。

现代仿真技术均是在**计算机支持下**进行的, 因此, 系统仿真也称**计算机仿真**。系统仿真有三个基本的活动, 即**系统建模**, **仿真建模**和**仿真实验**, 联系这三个活动的是**系统仿真的三要素**, 即系统、模型、计算机 (包括硬件和软件)。



现代仿真技术

传统上，“**系统建模**”这一活动属于系统辨识技术范畴，仿真技术则侧重在“**仿真建模**”，即针对不同形式的系统模型研究其求解算法，使其在计算机上得以实现。至于“仿真实验”这一活动，也往往只注重“仿真程序”的检验

（**Verification**），至于如何将仿真实验的结果与实际系统的行为进行比较这一根本性问题（**Validation**）缺乏从方法学的高度进行研究。

现代仿真技术的一个重要进展是将仿真活动扩展到上述三个方面，并将其统一到同一个环境中。在系统建模方面，除了传统的基于物理学、化学、生物学、社会学等基本定律及系统辨识方法外，现代仿真技术提出了**用仿真方法确定实际系统的模型**。基于模型库的结构化建模，采用面向对象建模（**object-oriented modeling**）方法，在类库的基础上实现模型拼合与重用。



在仿真建模方面

采用模型与实验分离技术，即模型数据驱动（data driven）

将模型又分为参数模型和参数值两部分，参数值属于实验框架的内容之一

模型参数与相对应的参数模型分离开来

仿真实验时，只需对参数模型赋予具体参数值，就形成了一个特定的模型，大大提高了仿真的灵活性和运行效率。

在仿真实验方面

将实验框架与仿真运行控制区分开来

一个实验框架定义一组条件，包括：模型参数、输入变量、观测变量、初始条件、终止条件、输出说明。

将输出函数的定义也与仿真模型分离开来

这样，当需要不同形式的输出时，不必重新修改仿真模型，甚至不必重新仿真运行。



现代仿真的概念框架

仿真建模



仿真问题描述

特定模型:
参数模型
参数值

实验:
实验框架
仿真运行控制

仿真实验



行为产生

输出处理



模型行为及处理

模型行为仿真数据

轨迹行为

结构行为

行为处理分析显示



3.8.4.2 系统仿真的类型

根据模型的种类分类

物理仿真
数学仿真
半实物仿真

根据仿真所采用的计算机类型分类

模拟计算机仿真
数字计算机仿真
数字模拟混合仿真

根据仿真时钟与实时时钟的比例关系分类

实时仿真
亚实时仿真
超实时仿真

根据系统模型的特性分类

连续系统仿真
离散事件系统仿真



根据模型的种类分类

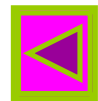
按照**真实系统**的物理性质构造系统得物理模型，并在物理模型上进行实验的过程称为**物理仿真**。物理仿真的优点是直观、形象。在计算机问世以前，基本上是物理仿真，也称为“模拟”。物理仿真的缺点是：模型改变困难，实验限制多，投资大。

对实际系统进行抽象，并将其特性用数学关系加以描述而得到系统的数学模型，对数学模型进行实验的过程称为**数学仿真**。计算机技术的发展为数学仿真创造了环境，使得数学仿真变得方便、灵活、经济，因而**数学仿真亦称为计算机仿真**。数学仿真的缺点是受限于系统建模技术，即系统的数学模型不易建立。



根据模型的种类分类

第三类称为**半实物仿真**，即数学模型与物理模型甚至实物联合起来进行实验。对系统中比较简单的部分或对其比较清楚的部分建立数学模型，并在计算机上加以实现；而**对比较复杂的部分或对规律尚不清楚的系统**，其数学模型的建立比较困难，则采用物理模型或实物。仿真时将两者连接起来完成整个系统的实验。



根据仿真所采用的计算机类型分类

仿真技术是伴随着计算机技术的发展而发展的。在计算机问世前，基于物理模型的实验一般称为“模拟”，它一般附属于其他相关学科。自从计算机特别是数字计算机出现以后，其高速计算能力和巨大的存储能力使得复杂的数值计算成可能，数字仿真技术得到蓬勃的发展，从而使仿真形成一门专门学科——系统仿真学科。

按所使用的仿真计算机类型也可将仿真分为三类：模拟计算机仿真、数字计算机仿真和数字模拟混合仿真。

模拟计算机本质上是一种通用的电气装置，这是20世纪50~60年代普遍采用的仿真设备。将系统数学模型在模拟机上加以实现并进行试验称为模拟机仿真。

数字计算机仿真将系统数学模型用计算机程序加以实现，通过运行程序来得到数学模型的解，从而达到系统仿真的目的。



根据仿真时钟与实时时钟的比例关系分类

实际动态系统的时基称为**实际时钟**，而系统仿真时模型所采用的时钟称为**仿真时钟**。

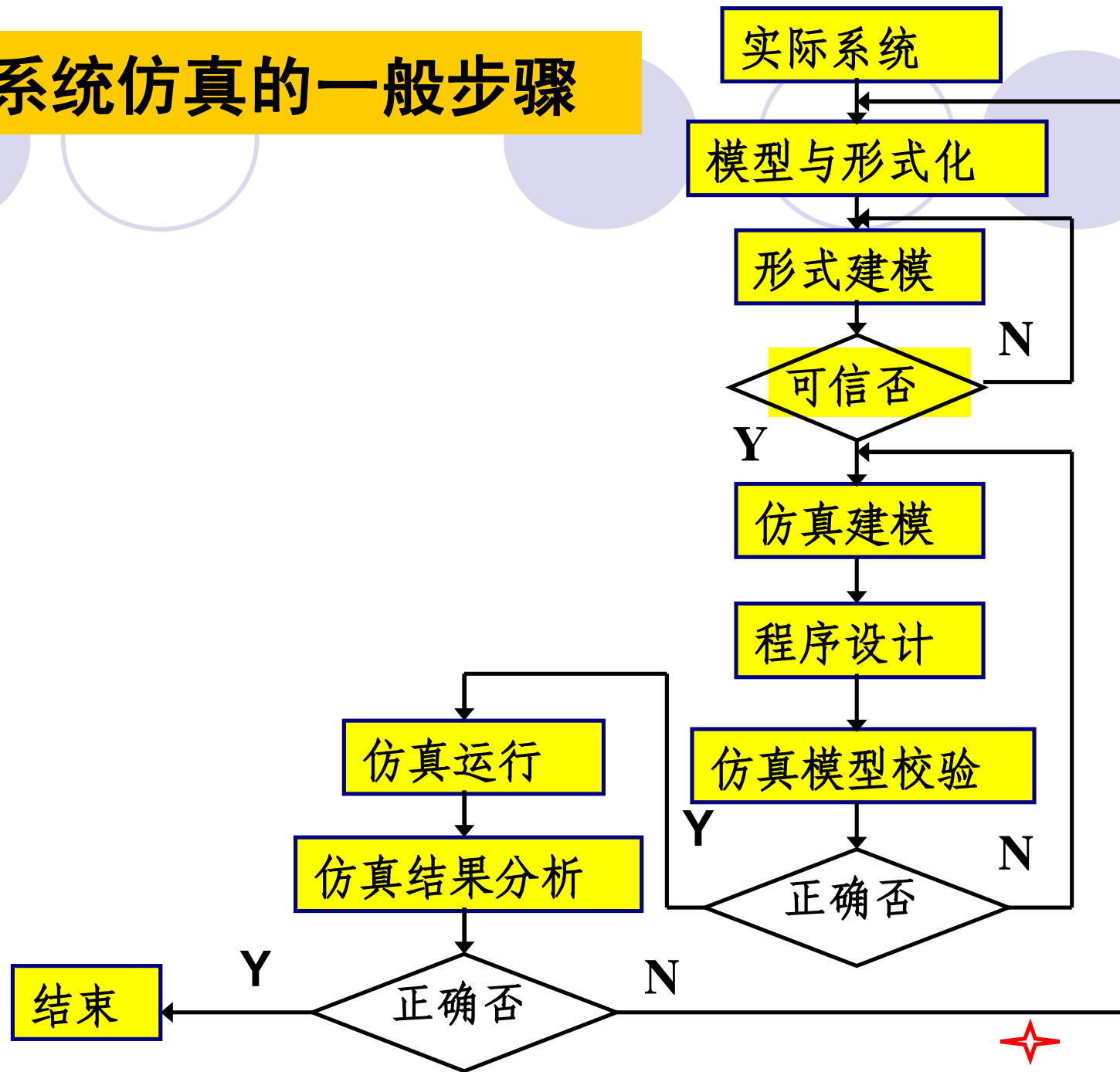
1.实时仿真，即仿真时钟与**实际时钟完全一致**，也就是模型仿真速度与实际系统运行的速度相同。当被仿真的系统中存在物理模型或实物时，必须进行实时仿真，例如各种训练仿真器就是这样，有时也称**在线仿真**。

2.亚实时仿真，即仿真时钟**慢于**实际时钟，也就是模型仿真的速度慢于实际系统运行的速度。当仿真速度要求不苛刻的情况下均是亚实时仿真，例如大多数系统离线研究与分析，有时也称为**离线仿真**。

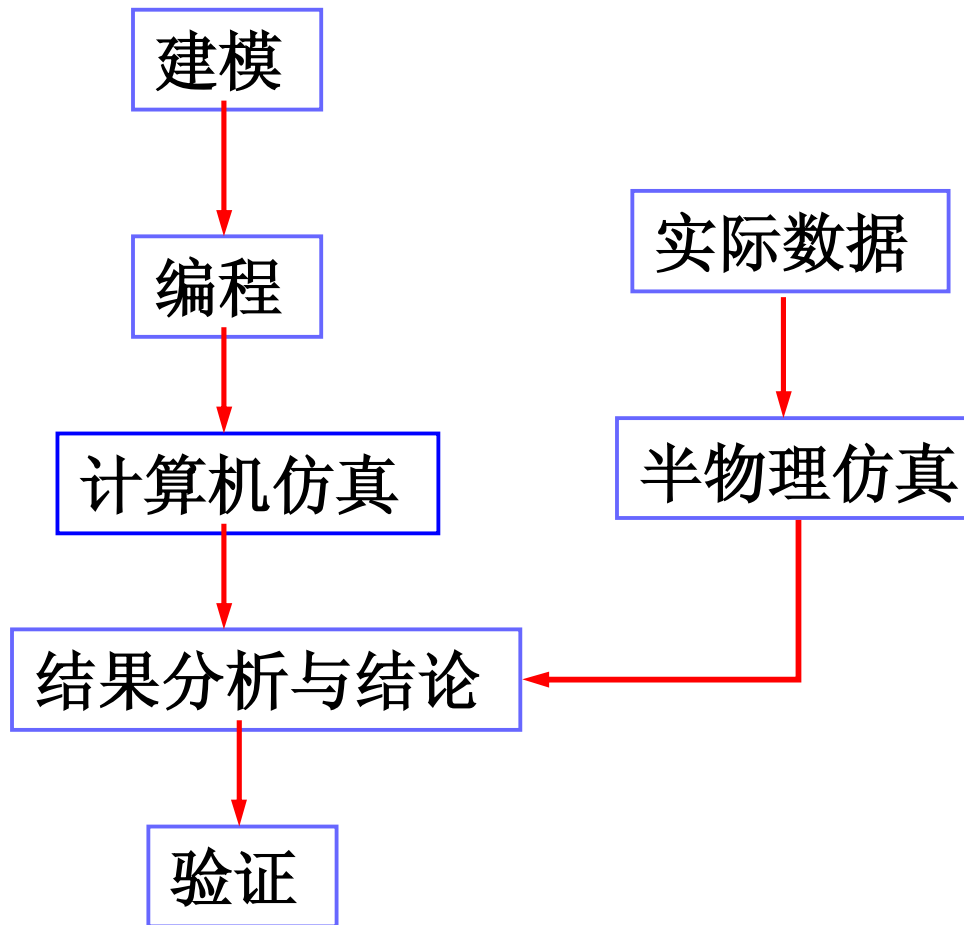
3.超实时仿真，即仿真时钟**快于**实际时钟，也就是模型运行速度快于实际系统运行的速度。例如大气环流的仿真、交通系统的仿真等等。



3.8.4.3 系统仿真的一般步骤



3.8.4.4 仿真技术在捷联惯导系统中的应用



思考题

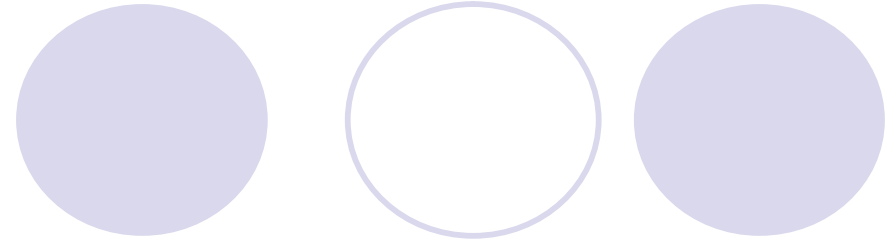
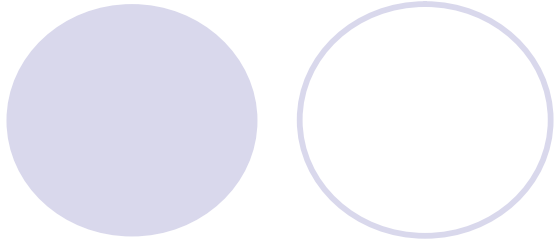
1. 推导数学平台误差角方程式

$$\dot{\mathbf{f}} = -d\boldsymbol{\omega}_{ib}^n + d\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + d\boldsymbol{\omega}_{en}^n - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{f}$$

2. 推导并说明速度误差方程式

$$d\mathbf{v}^n = d\mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n \times \mathbf{f} - (2\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times d\mathbf{v}^n - (2d\mathbf{w}_{ie}^n + d\mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$$

各项的物理概念。

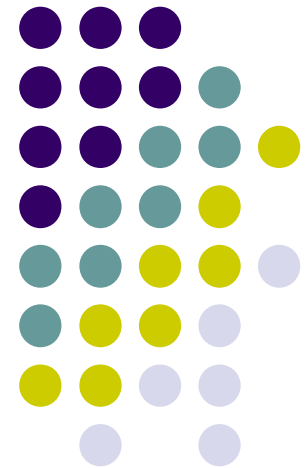


■ 谢谢!

捷联式惯导系统

初始对准

程向红





内容提要

- 6 捷联惯导系统的初始对准
- 6.1 惯导对准的一般要求和原理
- 6.2 粗对准原理
- ┆ 6.3 精对准原理
- ┆ 6.4 卡尔曼滤波在初始对准中的应用





6 捷联惯导系统的初始对准

- 📌 6.1 惯导对准的一般要求和原理
- 📌 6.2 粗对准原理
- 📌 6.3 精对准原理
- 📌 6.4 卡尔曼滤波在初始对准中的应用



6.1 惯导对准的一般要求和原理



😊 1. 为何要对准?

惯导家族成员均是由加速度计测得的加速度经**两次积分**而求得。要进行积分必须要知道**初始条件**: 初始速度, 初始位置, 初始姿态。而捷联惯导系统中初始对准的另一个关键问题是要在较短的时间内以一定的精度确定出从载体坐标系到地理坐标系的初始变换矩阵。

2. 对准的要求

$$C_b^n$$

精确、快速。传感器精度高, 同时对陀螺、加速度计进行补偿



3.对准的方法和过程

过程：分两步即粗对准和精对准

自主对准，不依赖外信息，受控式（依赖外信息）

方法：光的方法，天文的方法

粗对准：利用重力和地球自转角速率，直接估算初始姿态矩阵。

精对准：精确校正计算参考坐标系 n_c 与真实参考坐标系 n 之间的小失准角 f 。

如果采用状态反馈控制时，可将Kalman滤波技术应用于对准。

有些状态是不能直接测量的，因此必须采用**状态估计器**，估计出状态。当把系统考虑为**确定性系统**时，则状态估计器是**状态观测器**，当将系统考虑为随机系统时，则状态估计器是**Kalman滤波器**。



6.2 粗对准原理



- | 6.2.1 解析式粗对准
- | 6.2.1.1 对准方法描述
- | 6.2.1.2 误差分析
- | 6.2.2 一次修正粗对准
- | 6.2.2.1 对准方法描述
- | 6.2.2.2 误差分析



6.2.1解析式粗对准

对准方法描述



取导航坐标系为地理坐标系（ n 系ENU）。初始对准时，载体处于**静止状态**，加速度计测量的是重力加速度矢量在载体坐标系中的分量，陀螺仪测量的是地球速率矢量在载体坐标系 b 中的分量。这两个分量在导航坐标系 n 中的分量是已知的，并且是常值。变换矩阵 C_b^n

可由 w_{ie} 及 g 在 b 和 n 坐标系中的估值计算出来。重力矢量

$$\mathbf{g}^b = C_n^b \mathbf{g}^n \implies (\mathbf{g}^b)^T = (\mathbf{g}^n)^T (C_n^b)^T \implies C_b^n = [(\mathbf{g}^n)^T]^{-1} (\mathbf{g}^b)^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = C_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \implies C_b^n = [(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T]^{-1} (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_{ie} \quad \mathbf{v}^b = C_n^b \mathbf{v}^n \implies C_b^n = [(\mathbf{v}^n)^T]^{-1} (\mathbf{v}^b)^T$$
$$C_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

如定义

$$C_b^n = (C_n^b)^{-1} = (C_n^b)^T$$



对准方法描述



$$(\mathbf{g}^n)^T = [0 \quad 0 \quad -g]$$

$$(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T = [0 \quad w_{ie} \cos L \quad w_{ie} \sin L]$$

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{g}^n \times \mathbf{W}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gw_{ie} \cos L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{v}^n)^T = [gw_{ie} \cos L \quad 0 \quad 0]$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & w_{ie} \cos L & w_{ie} \sin L \\ gw_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{g^2 w_{ie}^2 \cos^2 L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & gw_{ie} \cos L \\ gw_{ie}^2 \sin L \cos L & g^2 w_{ie} \cos L & 0 \\ -gw_{ie}^2 \cos^2 L & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{gw_{ie} \cos L} \\ \frac{\tan L}{g} & \frac{1}{w_{ie} \cos L} & 0 \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



对准方法描述



在静基座上准时，解析对准法比现有的光学对准法要好。然而实际情况下，由于受干扰振动及干扰加速度的影响，其性能将要下降。这种影响是双重的，首先，这些干扰使 g^b 与 ω_{ie}^b 的测量有误差，因为被测量是

$$\omega_{ie}^b = C_n^b \omega_{ie}^n$$

$$\mathcal{C}_n^b = -\omega_{nb}^{bk} C_n^b$$

$$f = g + f_d \quad g^b \text{ 与 } \omega_{ie}^b$$

$$W_{ib} = W_{ie} + W_d$$

$$\mathcal{C}_n^b = \frac{C_n^b \mathcal{C}_n^n + \mathcal{C}_n^b \omega_{ie}^n}{=0} = -\omega_{nb}^{bk} C_n^b \omega_{ie}^n = -\omega_{nb}^{bk} \omega_{ie}^b \quad \mathcal{C}_{ie}^n = 0$$

由 w_d 的分量确定

需要引入某种滤波作用，以减小振动的影响。可采用简单的低通滤波器，以得到被测量的平均值。这样便能给出平均对准矩阵。显然，与载体的运动有关，载体坐标系的瞬时位置相对于其平均值位置可能有相当大的变化。结果是，如果仅达到平均对准，当系统转入导航状态时，会有比较大的初始失准角。



对准方法描述



若能得到载体振动的统计特性，则可构造一个更完善的最佳滤波方案，然而，要想依靠线性滤波把 g^b 和 ω_{ie}^b 的变动从干扰 w_d 和 f_d 中区分开来是相当困难的。因为很可能这些分量包含有相同的频率。此外，滤波器还会引入附加的时间延迟。因此，解析对准主要是作为一种平均对准，它是**迅速**求得变换矩阵初始估值 $C_b^{n'}$ 的一种方法。

坐标系 n_c 可称为捷联平台坐标系，它与真实参考系 n 之间的关系可用**3**个小失准角描述。变换矩阵 $C_n^{n'}$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

在精对准阶段，将利用计算参考系 n_c 与真实参考系 n 间的失准角估值 \hat{f} **精校变换矩阵的元素。**



误差分析

$$C_b^n = M Q_T \quad M = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \quad Q_T = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \times \mathbf{w}$$



$$d\mathbf{v} = \mathbf{g} \times d\mathbf{w} + d\mathbf{g} \times \mathbf{w}$$

$$d\mathbf{v} = \mathbf{g} \times d\mathbf{w} + d\mathbf{f} \times \mathbf{w}$$

$$C_b^{n'} = M(Q_T + dQ_T) \quad dQ_T = \begin{bmatrix} d\mathbf{f}^T \\ d\mathbf{w}^T \\ d\mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_x & df_y & df_z \\ dw_x & dw_y & dw_z \\ dv_x & dv_y & dv_z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} dv_x &= g_y \times dw_z - g_z \times dw_y + df_y \times w_z - df_z \times w_y \\ dv_y &= g_z \times dw_x - g_x \times dw_z + df_z \times w_x - df_x \times w_z \\ dv_z &= g_x \times dw_y - g_y \times dw_x + df_x \times w_y - df_y \times w_x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}^T$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$



误差分析



$$C_b^{n'} = MQ_T + MdQ_T = (I + MdQ_T C_n^b) C_b^n$$

$$MdQ_T C_n^b = \begin{bmatrix} 0 & f_u & -f_n \\ -f_u & 0 & f_e \\ f_n & -f_e & 0 \end{bmatrix} = -E^n$$

$$(C_b^{n'})_0 = C_b^{n'} [(C_b^{n'})^T (C_b^{n'})]^{-1/2}$$

$$(C_b^{n'})_0 = (I + MdQ_T C_n^b) C_b^n \underline{(I + dQ_T^T M^T C_b^n + C_n^b MdQ_T)^{-1/2}}$$

$$= C_b^n - \frac{1}{2} C_b^n dQ_T^T M^T C_b^n - \frac{1}{2} C_b^n C_n^b MdQ_T + MdQ_T - \frac{1}{2} MdQ_T dQ_T^T M^T C_b^n$$

$$- \frac{1}{2} MdQ_T C_n^b MdQ_T$$

$$(C_b^{n'})_0 = [I + \frac{1}{2} (MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T)] C_b^n$$

$$(C_b^{n'})^T (C_b^{n'})$$

$$= (C_b^n + MdQ_T)^T (C_b^n + MdQ_T)$$

$$= (C_b^n + dQ_T^T M^T) (C_b^n + MdQ_T)$$

$$= I + dQ_T^T M^T C_b^n + C_n^b MdQ_T$$

$$(I + X)^{-1/2} \approx I - \frac{1}{2} X$$

Matlab辅助推导



6.2.1.2 误差分析

$$(C_b^{n'})_0 = [I + \frac{1}{2}(MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T)] C_b^n$$

$$\frac{1}{2}(MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T) \quad \frac{1}{2}(MdQ_T \quad - \quad dQ_T^T M^T)$$

小括号内的项为一个矩阵和其转置矩阵的差值，是反对称矩阵。当载体坐标系***b***相对于地理坐标系***n***处于任意方位时，还不容易导出失准角 f_e ， f_n ， f_u 与仪表误差的简单解析函数式。为了便于分析，考虑一种特殊情况，假设***b***系沿着***n***系对准，即

$$C_b^n = I \quad , \quad \text{此时,}$$

$$(C_b^{n'})_0 = \left[I - \begin{bmatrix} 0 & -(f_u)_0 & (f_n)_0 \\ (f_u)_0 & 0 & -(f_e)_0 \\ -(f_n)_0 & (f_e)_0 & 0 \end{bmatrix} \right] C_b^n$$

误差分析

$$\frac{1}{2} (M dQ_T - dQ_T^T M^T)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L} & -\frac{df_x}{g} \\ -\frac{df_x}{g} \tan L + \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L} & 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right) \\ \frac{df_x}{g} & \frac{1}{2} \left(\frac{df_y}{g} + \frac{df_z}{g} \tan L - \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f_e)_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right)$$

$$(f_n)_0 = \frac{df_x}{g}$$

$$(f_u)_0 = \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L}$$

$$(C_b^{n'})_0 = \left[I - \begin{bmatrix} 0 & -(f_u)_0 & (f_n)_0 \\ (f_u)_0 & 0 & -(f_e)_0 \\ -(f_n)_0 & (f_e)_0 & 0 \end{bmatrix} \right] C_b^n$$



误差分析

$$(f_e)_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right)$$

$$(f_n)_0 = \frac{df_x}{g}$$

$$(f_u)_0 = \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L}$$

	df_x	df_y	df_z	dw_x	dw_z
f_e		-1.7¢/1mg	-1.7¢tanL/1mg		1.7¢secL/meru
f_n	3.4¢/1mg				
f_u	3.4¢tanL/1mg			-3.4¢secL/meru	

6.2.2 一次修正粗对准

传递对准

假设载体的姿态及航向角已由其它导航仪表以几度的精度近似测出。被测出的加速度分量 \hat{f}^b 可通过已知数据构成的姿态四元数 \hat{Q} 进行分解。由此得到计算的加速度分量为

$$\hat{f}^n = \hat{Q} \circ \hat{f}^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ (f^b + df^b) \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ f^b \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ Q^* \circ f^n \circ Q \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= dQ^* \circ f^n \circ dQ + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$f^b = Q^* \circ f^n \circ Q$$

$$dQ = Q \circ \hat{Q}^*$$

$$dQ^* = \hat{Q} \circ Q^*$$

暂时不考虑测量误差，即 $df^b=0$ ，在载体没有加速度的情况下，矢量 f^n 为

$$f^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad dQ^* = 1 - \frac{1}{2}\phi^n$$

一次修正粗对准——方法描述

$$dQ^* = 1 - \frac{1}{2}f_e i - \frac{1}{2}f_n j - \frac{1}{2}f_u k$$

$$\hat{f}^n = dQ^* \mathbf{o} f^n \mathbf{o} dQ$$

$$dQ = 1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k$$

$$= (1 - \frac{1}{2}f_e i - \frac{1}{2}f_n j - \frac{1}{2}f_u k) \mathbf{o} (gk) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k)$$

$$= (\frac{1}{2}f_u g - \frac{1}{2}f_n g i + \frac{1}{2}f_e g j + gk) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k)$$

$$= \frac{1}{2}f_u g + \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_e - \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_n - g \frac{1}{2}f_u$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_e - \frac{1}{2}f_n g + \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_u - g \frac{1}{2}f_n) i$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_e g + \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_u + g \frac{1}{2}f_e) j$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_u + g - \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_n - \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_e) k$$

$$= -f_n g i + f_e g j + gk$$

有的是两个小量相乘被忽略了

$$\hat{f}^n = \begin{bmatrix} -f_n g \\ f_e g \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_e \\ \hat{f}_n \\ \hat{f}_u \end{bmatrix}$$

一次修正粗对准——方法描述

进行分解，可以写出

类似地，如将陀螺仪测出的角速率通过四元数 \hat{Q}
$$W^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_n \\ \Omega_u \end{bmatrix}$$

$$\hat{w}^n = \hat{Q} \mathbf{o} \hat{w}^b \mathbf{o} \hat{Q}^* = dQ^* \mathbf{o} w^n \mathbf{o} dQ + \hat{Q} \mathbf{o} d\hat{w}^b \mathbf{o} \hat{Q}^*$$

$$\hat{w}^n = dQ^* \mathbf{o} w^n \mathbf{o} dQ$$

$$= (1 - \frac{1}{2} f_e i - \frac{1}{2} f_n j - \frac{1}{2} f_u k) \mathbf{o} (\Omega_n j + \Omega_u k) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2} f_e i + \frac{1}{2} f_n j + \frac{1}{2} f_u k)$$

$$= [(\frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u + (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u))i + (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n)j + (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n)k]$$

$$\mathbf{o} (1 + \frac{1}{2} f_e i + \frac{1}{2} f_n j + \frac{1}{2} f_u k)$$

$$= \frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u - (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_e - (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_n - (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_u$$

$$+ [(\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) + (\frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u) \frac{1}{2} f_e + (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_u - (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_n] i$$

$$+ [(\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) - (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_u + (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_e] j$$

$$+ [(\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) + (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_n - (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_e] k$$

$$= (f_u \Omega_n - f_n \Omega_u) i + (f_e \Omega_u + \Omega_n) j + (\Omega_u - f_e \Omega_n) k$$

注意：两个小量相乘可忽略



一次修正粗对准——方法描述

$$= (f_u \Omega_n - f_n \Omega_u) i + (f_e \Omega_u + \Omega_n) j + (\Omega_u - f_e \Omega_n) k$$

$$\hat{W}^n = \begin{bmatrix} f_u \Omega_n - f_n \Omega_u \\ f_e \Omega_u + \Omega_n \\ \Omega_u - f_e \Omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L \\ f_e w_{ie} \sin L + w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L - f_e w_{ie} \cos L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_e \\ \hat{W}_n \\ \hat{W}_u \end{bmatrix}$$

$$f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L = \hat{W}_e$$

$$f_e = \frac{\hat{f}_n}{g}$$

$$f_n = -\frac{\hat{f}_e}{g}$$

$$f_u = \frac{\hat{W}_e}{w_{ie} \sin L} + f_n \tan L = \frac{\hat{W}_e}{w_{ie} \sin L} - \frac{\hat{f}_e}{g} \tan L$$

$$\hat{f}^n = \begin{bmatrix} -f_n g \\ f_e g \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_e \\ \hat{f}_n \\ \hat{f}_u \end{bmatrix}$$

利用这些估值的失准角可以校正计算的四元数

$$dQ = [1, \frac{1}{2} \hat{f}_e i, \frac{1}{2} \hat{f}_n j, \frac{1}{2} \hat{f}_u]^T$$

$$dQ = Q \circ \hat{Q}^*$$

$$Q = dQ \circ \hat{Q}$$

一次修正粗对准——误差分析

现在考虑仪表误差及干扰运动对估值 $\hat{\phi}$ 的影响。

用 f_d 和 w_d 分别表示干扰加速度及角速度矢量

$$f^n = [f_{de}, f_{dn}, g + f_{du}]^T$$

$$w^n = [w_{de}, w_{dn} + w_{ie} \cos L, w_{du} + w_{ie} \sin L]^T$$

将仪表误差 df^b 和 $d\omega^b$ 沿计算参考坐标系轴分解得到

$$\hat{f}'^n = \begin{bmatrix} -f_n g + d f_e + f_{de} \\ f_e g + d f_n + f_{dn} \\ g + d f_u + f_{du} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}'_e \\ \hat{f}'_n \\ \hat{f}'_u \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}'_e = \frac{\hat{f}'_n}{g}$$

$$\hat{f}'_n = -\frac{\hat{f}'_e}{g}$$

$$\hat{w}'^n = \begin{bmatrix} f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L + d w_e + w_{de} \\ f_e w_{ie} \sin L + w_{ie} \cos L + d w_n + w_{dn} \\ w_{ie} \sin L - f_e w_{ie} \cos L + d w_u + w_{du} \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}'_u = \frac{\hat{w}'_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{\hat{f}'_e}{g} \tan L$$

一次修正粗对准——误差分析

可以求出估计的捷联平台失准角为：

$$\hat{f}_e = f_e + \frac{1}{g}(df_e + f_{de})$$

$$\hat{f}_n = f_n - \frac{1}{g}(df_n + f_{dn})$$

$$\hat{f}_u = f_u + \frac{1}{W_{ie} \cos L}(dw_e + w_{de}) - \frac{\tan L}{g}(df_e + f_{de})$$

当 $df_e=df_n=10^{-4}g$ 时，水平失准角误差为 $10^{-4}rad$ 。由陀螺漂移所产生的方位失准角误差，当 $dw_e=0.2^\circ/h$ ，纬度 45° 时，误差约为 $0.0188rad(1^\circ)$ ； df_e 所产生的方位误差比它小二个数量级，即 $10^{-4}rad$ 。干扰运动对一次修正对准精度的影响是比较大的。例如， $10^{-3}g$ 的横向加速度可能造成 0.05° 的水平误差，而绕东向轴的 $10^{-3}^\circ/s$ 的干扰角速率将产生约 19.45° 的方位误差。

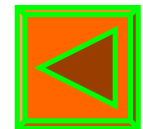
克服扰动影响最常用的方法是在一段时间内对估计的失准角取平均值

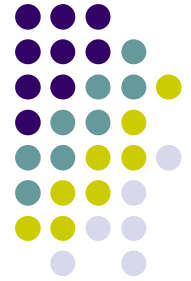
$$\hat{f}'_e = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{f}'_n}{g} dt$$

$$\hat{f}'_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{\hat{f}'_e}{g}\right) dt$$

$$\hat{f}'_u = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\hat{W}'_e}{W_{ie} \cos L} - \frac{\hat{f}'_e}{g} \tan L \right) dt$$

当T足够大时，扰动运动对计算失准角的影响几乎可以忽略。这时计算的是平均失准角，实际的失准角误差最大可能是其波动的峰值。





6.3 精对准原理

- | 6.3.1 东向陀螺作为敏感元件的校正对准
- | 6.3.1.1 对准方法描述
- | 6.3.1.2 失准角信息的提取
- | 6.3.1.3 修正矩阵的结构及对准精度分析
- | 6.3.2 常规校正对准
- | 6.3.2.1 对准方法的描述
- | 6.3.2.2 调平回路的设计
- | 6.3.2.3 方位对准回路的设计及对准精度分析



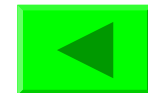
精对准原理



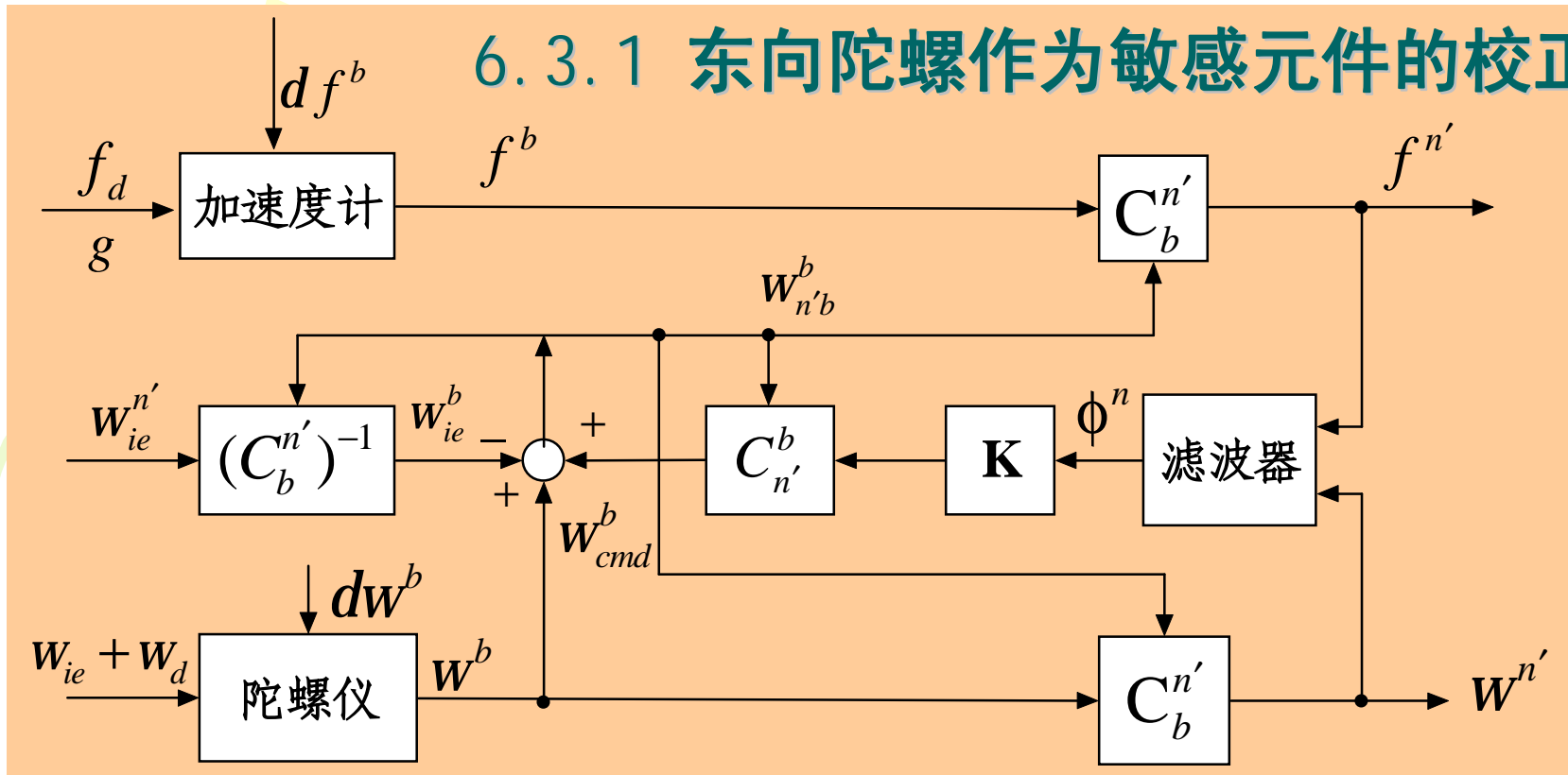
按照提取失准角信息的方法来划分，可能有两种自主式精对准方案。

从加速度表及东向陀螺仪输出中提取失准角信息

与平台式惯导系统对准相似，只从水平加速度表中提取失准角信息

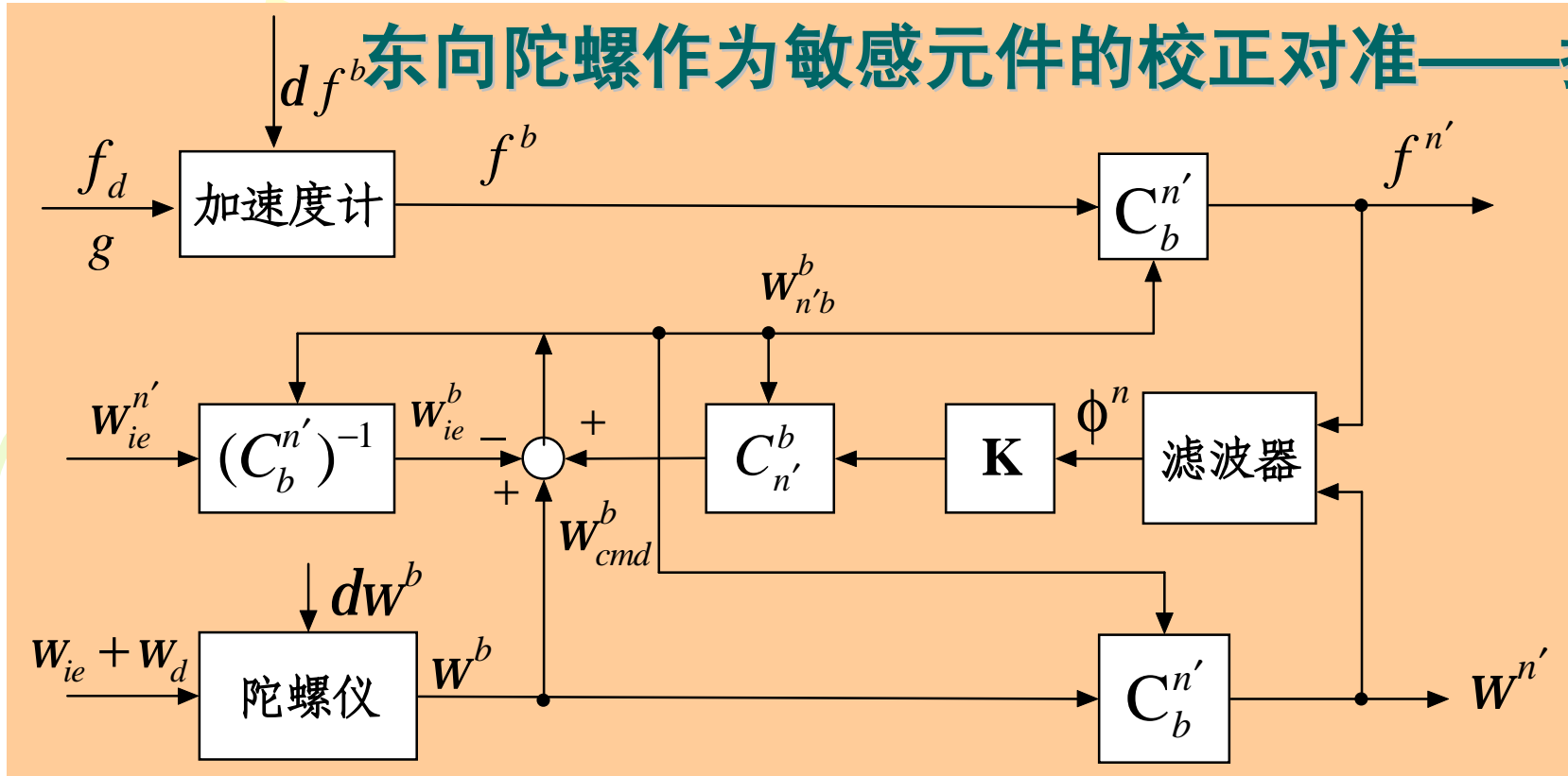


6.3.1 东向陀螺作为敏感元件的校正对准



取地理坐标系为参考坐标系，为了清晰，图中将四元数更新姿态矩阵算法简略了。校正对准的基本思路是，通过处理加速度计及陀螺仪的测量值，检测 n 坐标系与 nC 坐标系之间的误差角 f ，并产生一个修正指令 w_{cmd} 给姿态变换矩阵计算机，以驱动这些误差角尽可能较小为零。与此同时，还需要对于扰角振动进行补偿。这个过程类似于平台系统中“基座振动隔离”。

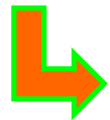
东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述



由图中看出，它是依靠将干扰角速度 W_d^b 的估值反馈给方向余弦矩阵计算机来实现的。变换矩阵

$C_b^{n'}$ 可利用下式进行更新

$$\dot{C}_b^{n'} = C_b^{n'} W_{n'b}^{bk}$$



是角速度 $W_{n'b}^b$ 的反对称阵

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$C_{n'}^b$

dw^b

w_{cmd}^b

通过滤波计算得到的与误差有关的修正信号

理想

$$W_{n'b}^b = W_{n'n}^b + W_{nb}^b = W_{cmd}^b + W_d^b$$

补偿计算载体坐标系 b 的振动所需的角速度

$$W_d^b = W_{ie}^b + W_d^b + dw^b - W_{ie}^{b'}$$

$$\&_{b}^{n'} = C_b^{n'} W_{n'b}^{bk}$$

$$W_{n'b}^b = W_{cmd}^b + W_d^b + dw^b + \underbrace{W_{ie}^b - W_{ie}^{b'}}_{\text{反对称矩阵}}$$

$$\text{实际} = W_{cmd}^b + W_d^b + dw^b - E^b W_{ie}^b$$

$$\&_{b}^{n'} = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk}$$

反对称矩阵

$$W_{ie}^{b'} - W_{ie}^b = C_b^{b'} W_{ie}^b - W_{ie}^b = (C_b^{b'} - I) W_{ie}^b = E^b W_{ie}^b$$

$$C_b^{n'} = C_n^{n'} C_b^n \Rightarrow \&_{b}^{n'} = C_n^{n'} \&_{b}^n + \&_{n}^{n'} C_b^n$$

$$\&_{b}^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

dw_{ie}^{bk}

$E^b W_{ie}^b$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$$\mathcal{E}'_b = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} \quad \mathcal{E}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

$$\mathcal{E}'_b = C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n + \mathcal{E}'_n C_b^n$$

W_d^b

$$\mathcal{E}'_n C_b^n = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} - C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n$$

$$\mathcal{E}'_n C_b^n = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} - C_n^{n'} C_b^n W_{nb}^{bk} \quad C_n^b \text{ 两边右乘}$$

$$\mathcal{E}'_n = -\mathcal{E}_n^n$$

$$W_{nb}^{nk} = C_b^n W_{nb}^{bk} C_n^b$$

角速度反对称矩阵的相似变换

$$\mathcal{E}_n^n = -C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} C_n^b - C_b^{n'} dw^{bk} C_n^b + C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} C_n^b$$

$$\mathcal{E}_n^n = -W_{cmd}^{nk} - dw^{nk} + dw_{ie}^{nk}$$

$$W_{cmd}^n = K_c \hat{\phi}^n$$

$$\mathcal{E}_n^n + W_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -dw^n$$

$$C_b^{n'} = C_n^{n'} C_b^n \Rightarrow \mathcal{E}'_b = C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n + \mathcal{E}'_n C_b^n$$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$$\dot{\phi}^n = -W_{cmd}^{nk} - dW^{nk} + dW_{ie}^{nk} \quad dW_{ie}^{nk} \text{ 是 } E^n W_{ie}^n \text{ 的反对称形式}$$

写成矢量形式

$$\dot{\phi}^n = -W_{cmd}^n - dW^n - \underline{dW_{ie}^{nk} \phi^n} \quad \underline{\text{反对称矩阵}}$$

为使 f^n 减小至零，修正指令 W_{cmd}^n 可选择成 f^n 的估值的线性函数，即采用线性控制规律 $W_{cmd}^n = K_c \hat{\phi}^n$

$$\dot{\phi}^n + W_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -dW^n$$

可以看出，上式表示三个标量微分方程式，它通过地球速率项

$W_{ie}^{nk} \phi^n$ 相耦合。

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——f提取

为了构成修正指令 w_{cmd} ，必须测出误差角 f^n 。从计算的 g 的水平分量及 w_{ie} 的东向分量可以求得 f^n 的三个分量。具体地讲，由于

$$\begin{aligned}\hat{f}^n &= (I - E^n) C_b^n \hat{f}^b \\ &= (I - E^n) (\underline{g^n + f_d^n + df^n})\end{aligned}$$

$$g^n = [0 \quad 0 \quad g]^T$$

$$\hat{f}_e = -g f_n + f_{de} + d f_e$$

$$\hat{f}_n = g f_e + f_{dn} + d f_n$$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

方位失准角 f_u 可由下式找出

$$\hat{w}^n = (I - E^n) C_b^n \hat{w}^b$$

$$= (I - E^n) (\omega_{ie}^n + \omega_d^n + d\omega^n) \quad \text{其东向分量为}$$

$$\hat{w}_e = f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L + w_{de} + dw_e$$

系统设计成，可从 \hat{f}_e \hat{f}_n \hat{w}_e 的测量值中提取误差角，
假设不计误差源的影响

$$\hat{\phi}^n = \left[\begin{array}{ccc} \hat{f}_n & -\hat{f}_e & -\hat{f}_e \tan L + \frac{\hat{w}_e}{w_{ie} \cos L} \end{array} \right]^T$$

$$\hat{\phi} = \phi + d\phi$$

$$\hat{\phi}^n = \phi^n + d\phi^n = \phi^n + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g} (f_{dn} + df_n) \\ -\frac{1}{g} (f_{de} + df_e) \\ -\frac{f_{de} + df_e}{g} \tan L + \frac{w_{de} + dw_e}{w_{ie} \cos L} \end{array} \right\}$$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——修正矩阵结构

现在先确定使误差角趋于零的 K_c 矩阵结构，然后简要分析对准精度。在式中，假设没有不确定性误差，得到

$$\dot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -d\omega^n \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^n = -\omega_{ie}^{nk} \phi^n - K_c \hat{\phi}^n$$

$$\dot{X} = AX + U \quad \text{式中 } X = f^n \quad A = -\omega_{ie}^{nk} \quad U = -K_c \hat{\phi}^n$$

确定 K_c 的一种方法是定义

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (X^T V X + U^T W U) dt \quad \text{评价函数}$$

$$V = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_{3m}^2} \end{Bmatrix} \quad W = \begin{Bmatrix} \frac{1}{u_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u_{3m}^2} \end{Bmatrix}$$

式中 t_0 是过程的起始时间， V 和 W 是正定加权矩阵，这里取它们为常数矩阵。 V 和 W 的合理选择是使闭环系统有满意的动态品质。有文献指出， V 和 W 取下列对角阵是合适的

式中 x_{im} 及 u_{im} 是状态与控制量的上限值。为使性能指标 J 取极小值， K_c 应为

$$K_c = W^{-1}S$$

式中 S 是代数里卡提方程的解

$$SA + A^T S - S W^{-1} S + V = 0$$

← 须用数值法求解。

此处

$$A = -\omega_{ie}^{nk}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L \\ -w_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ w_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

确定矩阵 K_c 的另一种方法是使方程式变成无耦合的。这一点能够做到，因为在给定纬度上 ω_{ie}^n 是常数。

$$\dot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -d\omega^n$$



由此可取 K_c 的非对角线项等于反对称矩阵

$-\omega_{ie}^{nk}$ 的对应元素，

$$K_c = \begin{bmatrix} K_e & \omega_{ie} \sin L & -\omega_{ie} \cos L \\ -\omega_{ie} \sin L & K_n & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & K_u \end{bmatrix}$$

$$\dot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n$$

$$\hat{\phi} = \phi + d\phi$$

$$\dot{\phi}^n + K_d \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n$$

$$K_d = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & K_u \end{bmatrix}$$

若详细考察式中的项 $K_c df^n$ 可以看到，合理选择系统的调整时间，则有

$$K_e, K_n, K_u \gg w_{ie}$$

$$\phi^n + K_d \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n$$

$$f_e^n + K_e f_e = -\frac{K_e}{g} (f_{dn} + d f_n) - dw_e$$

$$\phi^n + K_d \phi^n = -d\omega^n - K_d d\phi^n$$

$$f_n^n + K_n f_n = \frac{K_n}{g} (f_{de} + d f_e) - dw_n$$



$$f_u^n + K_u f_u = K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de} + d f_e) - \frac{w_{de} + dw_e}{w_{ie} \cos L} \right] - dw_u$$

$$s f_e(s) - f_e(0) + K_e f_e(s) = -\frac{K_e}{g} (f_{dn}(s) + d f_n(s)) - dw_e(s)$$

$$s f_n(s) - f_n(0) + K_n f_n(s) = \frac{K_n}{g} (f_{de}(s) + d f_e(s)) - dw_n(s)$$

$$s f_u(s) - f_u(0) + K_u f_u(s) = K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de}(s) + d f_e(s)) - \frac{w_{de}(s) + dw_e(s)}{w_{ie} \cos L} \right] - dw_u(s)$$

显然，捷联系统的这种对准方案与平台系统的陀螺罗经对准有相似之处，在高纬度地区精度下降，而在地球的两极不能工作。

可以看出，失准角 f_e 、 f_n 、 f_u 是载体运动与测量误差的函数。利用拉普拉斯变换可容易求出方程的解。假定扰动函数是时间的一般函数得到

$$\left. \begin{aligned} f_e(s) &= -\frac{K_e}{g} \frac{f_{dn}(s) + d f_n(s)}{s + K_e} - \frac{dw_e(s)}{s + K_e} + \frac{f_e(0)}{s + K_e} \\ f_n(s) &= \frac{K_n}{g} \frac{f_{de}(s) + d f_e(s)}{s + K_n} - \frac{dw_n(s)}{s + K_n} + \frac{f_n(0)}{s + K_n} \\ f_u(s) &= K_u \left[\frac{\tan L}{g} \frac{f_{de}(s) + d f_e(s)}{s + K_u} - \frac{w_{de}(s) + dw_e(s)}{w_{ie} \cos L (s + K_n)} \right] - \frac{dw_u(s)}{s + K_n} + \frac{f_u(0)}{s + K_n} \end{aligned} \right\}$$

式中s为拉普拉斯算子。利用卷积定理

$$L^{-1} \frac{W(s)}{s + K} = \int_0^t e^{-K(t-t)} w(t) dt$$

对于任意的输入，方程式的解由下式给出

$$\left. \begin{aligned} f_e(t) &= e^{-K_e t} \int_0^t e^{-K_e t} \left[-\frac{K_e}{g} (f_{dn}(t) + d f_n(t)) - dw_e(t) \right] dt + f_e(0) e^{-K_e t} \\ f_n(t) &= e^{-K_n t} \int_0^t e^{-K_n t} \left[\frac{K_n}{g} (f_{de}(t) + d f_e(t)) - dw_n(t) \right] dt + f_n(0) e^{-K_n t} \\ f_u(t) &= e^{-K_u t} \int_0^t e^{-K_u t} K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de}(t) + d f_e(t)) - \frac{w_{de}(t) + dw_e(t)}{w_{ie} \cos L} - dw_u(t) \right] dt \\ &\quad + f_u(0) e^{-K_u t} \end{aligned} \right\}$$

针对载体运动为零，加速度表陀螺仪有常值误差的简单情况，分析系统的动力学特性

$$f_{de}(t) = f_{dn}(t) = w_{de}(t) = 0$$

$$df_i(t) = df_i = \text{const}, i = e, n$$

$$dw_i(t) = dw_i = \text{const}, i = e, n, u$$

稳态误差

$$f_{ess} = -\frac{df_n}{g} - \frac{dw_e}{K_e}$$

$$f_{nss} = \frac{df_e}{g} - \frac{dw_n}{K_n}$$

$$f_{uss} = \frac{\tan L df_e}{g} - \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{dw_u}{K_u}$$

$$f_e(t) = \left[-\frac{df_n}{g} - \frac{dw_e}{K_e} \right] (1 - e^{-K_e t}) + f_e(0) e^{-K_e t}$$

$$f_n(t) = \left[\frac{df_e}{g} - \frac{dw_n}{K_n} \right] (1 - e^{-K_n t}) + f_n(0) e^{-K_n t}$$

$$f_u(t) = \left[\frac{\tan L df_e}{g} - \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{dw_u}{K_u} \right] (1 - e^{-K_u t}) + f_u(0) e^{-K_u t}$$

可以看出，与平台系统相比，主要误差源与灵敏度均相同。即造成水平对准误差的基本原因是加速度表的测量误差，而方位误差主要是由东向陀螺漂移引起的。

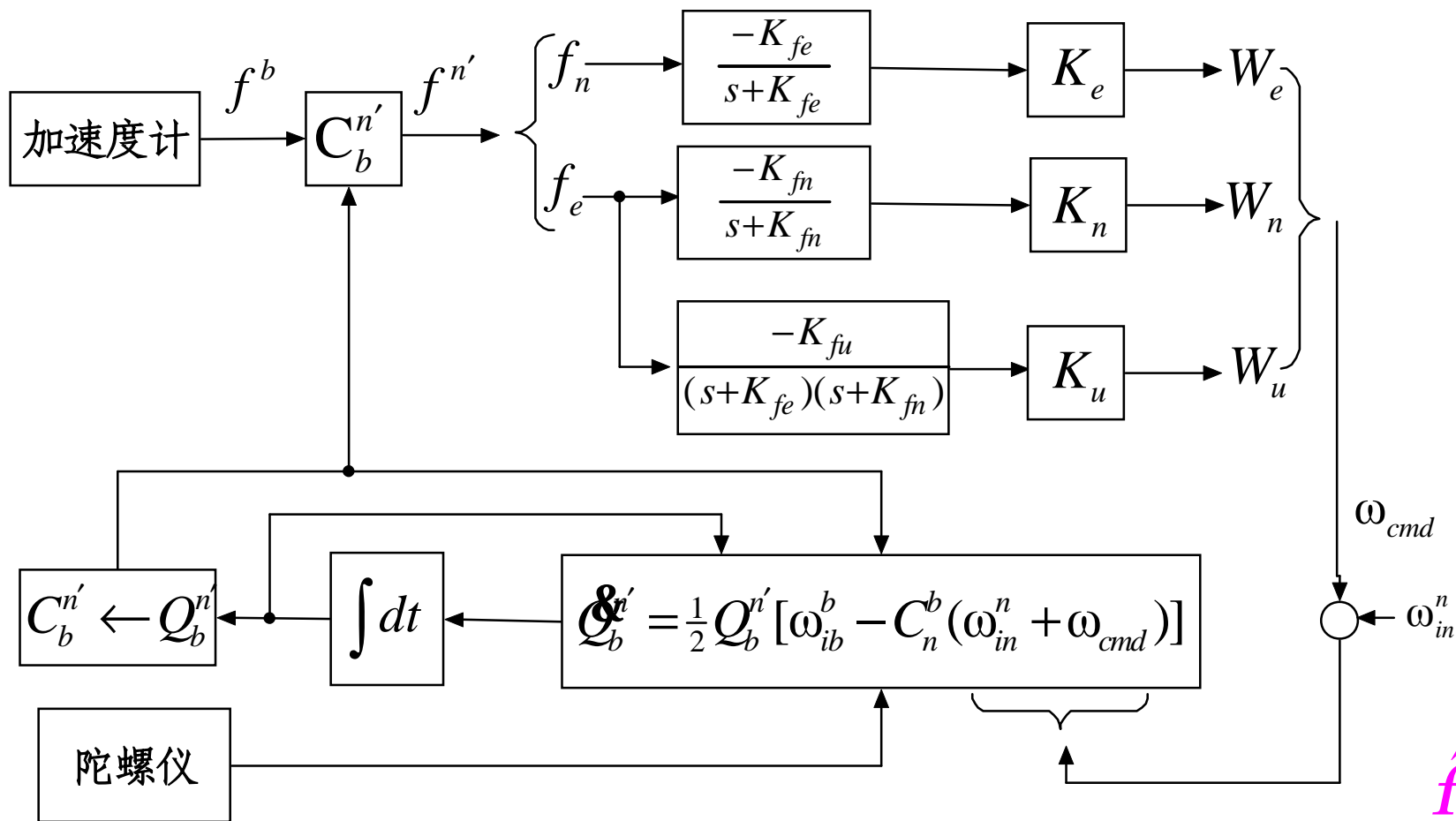
6.3.2 常规校正对准



在载体有扰动运动时，只用加速度表作为敏感元件的常规对准法已得到满意的对准效果。虽然采用卡尔曼滤波器改进常规对准也是一种有效方法，但为使系统结构简单和适应噪声特性变动更便于调节滤波参数，提出有低通滤波器的常规对准方案。

粗对准后，计算地理坐标系 n^c 与真实地理坐标系 n 之间有很小的失准角 f 。造成对准误差的主要原因是载体的扰动运动。对加速度计输出信号进行滤波处理，可以求得失准角的估值 $\hat{\phi}$ ，然后用这个估值经过加权形成指令信号，对 $C_b^{n'}$ 进行连续校正，使 f^n 减小至零。应当指出，与东向陀螺校正对准方案相似，在四元数姿态校正计算中也应对干扰角振动进行补偿。





对加速度计输出信号进行滤波处理，可以求得失准角的估值
然后用这个估值经过加权形成指令信息，对 $C_b^{n'}$

校正，使 f^n 减小至零。与东向陀螺校正对准方案相似，在
四元数姿态校正计算中也应对干扰角振动进行补偿。



常规校正对准——对准方法的描述



$$\dot{\mathbf{f}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{cmd}^n - d\boldsymbol{\omega}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^{nk} \mathbf{f}^n$$

$$-\boldsymbol{\omega}_{ie}^{nk} = \begin{bmatrix} 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L \\ -w_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ w_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{f}}_e = w_{ie} \sin L f_n - w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{\mathbf{f}}_n = -w_{ie} \sin L f_e + W_n - dw_n$$

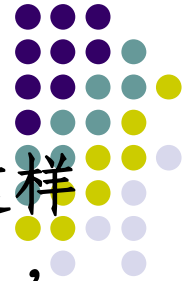
$$\dot{\mathbf{f}}_u = w_{ie} \cos L f_e + W_u - dw_u$$

失准角微分方程的分量形式

式中 W_e , W_n , W_u 为指令信号。精对准分两步进行, 将方位失准角 f_u 保持在不加指令信号的状态, 系统**先进行调平**, 把 f_e , f_n 驱动至零, **然后再进行方位对准**, 把 f_u 调整至零。



常规校正对准——对准方法的描述

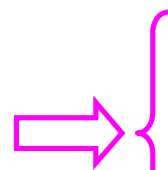


在调平时，依靠忽略包含 $w_{ie} \cos L$ 的项能使方程式解耦。这样做是合理的。因为可以看出，经过粗对准后，当 $f_e = f_n = 1^\circ$ ， $L = 45^\circ$ 时， $w_{ie} \sin L f_e$ 及 $w_{ie} \sin L f_n$ 项的值约为 $0.185^\circ/h$ 。它远小于要求的初始调平指令信号。自然， $w_{ie} \sin L f_e$ 及 $w_{ie} \sin L f_n$ 将比指令信号 W_e ， W_n 更快地趋近于零。应当指出，在式中，相对于 W_e 不能忽略 $w_{ie} \cos L f_u$ ，因为调平时 f_u 并未趋近于零， $w_{ie} \cos L f_u$ 还比较大。对于方位对准，在式中，与 W_u 相比可以忽略 $w_{ie} \cos L f_e$ ，其理由与在式中忽略包含 $w_{ie} \sin L$ 的项相同。利用这些简化关系，可改写为

$$\dot{f}_e = w_{ie} \sin L f_n - w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{f}_n = -w_{ie} \sin L f_e + W_n - dw_n$$

$$\dot{f}_u = w_{ie} \cos L f_e + W_u - dw_u$$



$$\dot{f}_e = -w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{f}_n = W_n - dw_n$$

$$\dot{f}_u = W_u - dw_u$$



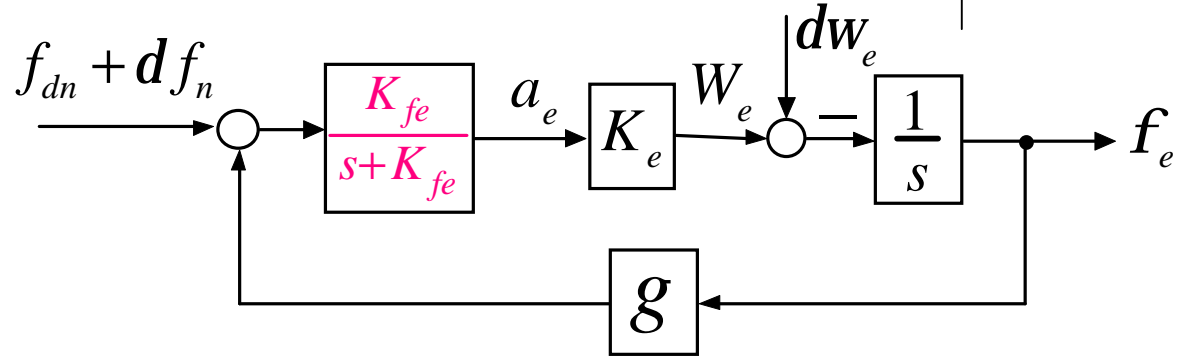
常规校正对准——对准方法的描述



$$\hat{f}_e = -g f_n + f_{de} + d f_e$$

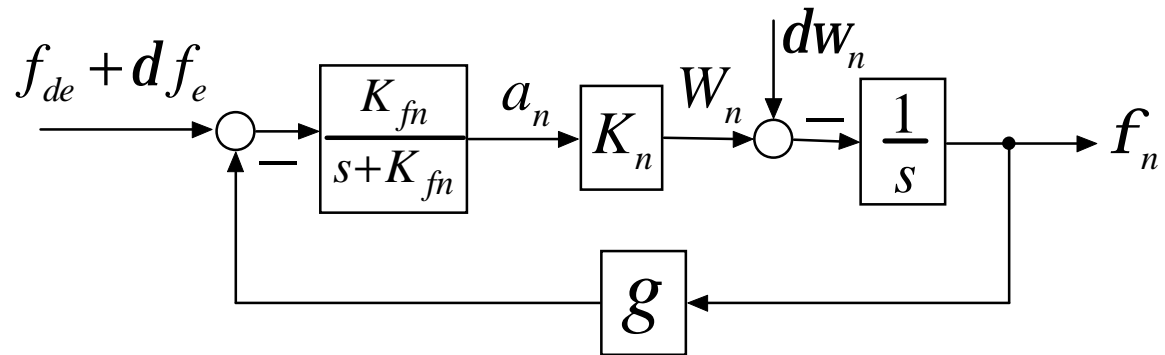
$$\hat{f}_n = g f_e + f_{dn} + d f_n$$

$$\dot{f}_e = -W_{ie} \cos L f_u + W_e - d w_e$$



东向调平回路

如果将上式所表示的加速度计输出，经过一阶数字滤波和加权后构成对准指令信号，便可以画出水平对准回路的原理方框图。



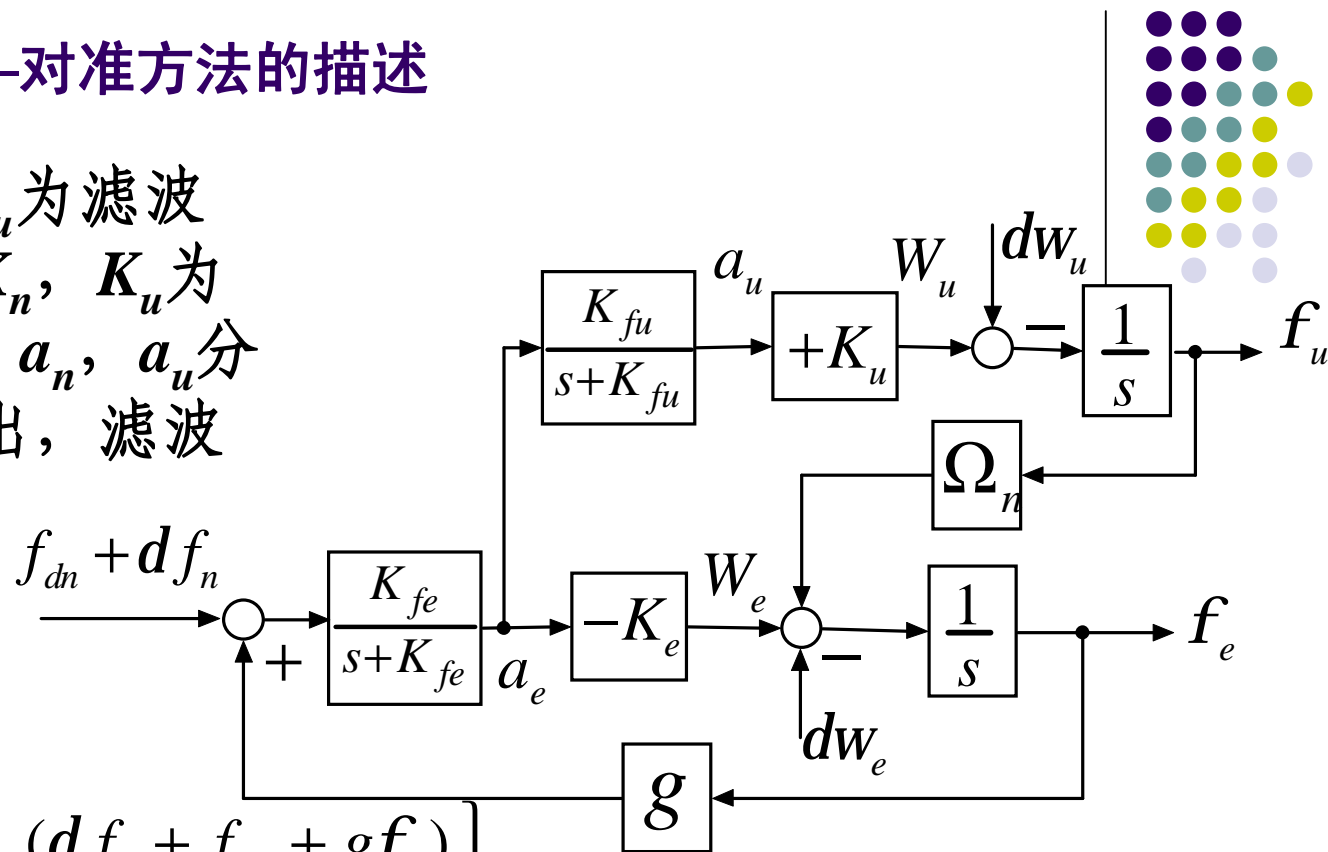
$$\dot{f}_n = W_n - d w_n$$

北向调平回路



常规校正对准——对准方法的描述

图中 K_{fe} , K_{fn} , K_{fu} 为滤波器的参数, K_e , K_n , K_u 为加权系数。取 a_e , a_n , a_u 分别表示滤波器输出, 滤波器方程为



$$\dot{\delta}_e = -K_{fe} a_e + K_{fe} (df_n + f_{dn} + g f_e)$$

$$\dot{\delta}_n = -K_{fn} a_n + K_{fn} (df_e + f_{de} - g f_n)$$

$$\dot{\delta}_u = -K_{fu} a_u + K_{fu} a_e$$

方位对准回路

不难看出, 所述捷联式惯导系统的精对准原理与平台式惯导系统的对准类似, 可以借用平台惯导对准的一些概念来分析捷联惯导对准回路的设计问题。



6.3.2.2 调平回路的设计



由于北向调平回路与东向调平回路的结构完全相同，在分析水平对准回路设计原理时，可以北向调平回路为对象进行研究。

北向调平回路的微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_n \\ \dot{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_n \\ -K_{fn}g & -K_{fn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_n \\ K_{fn}(df_e + f_{de}) \end{bmatrix}$$

回路的特征方程式为

$$s^2 + K_{fn}s + gK_nK_{fn} = 0$$

$$s^2 + 2xw_n s + w_n^2 = 0$$

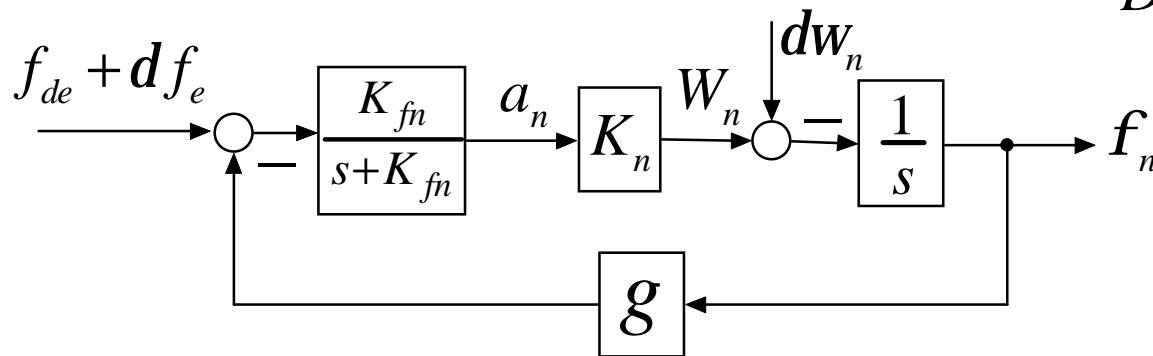
式中 x —阻尼比， w_n —回路的无阻尼自然频率，定义下列设计参数

$$x = \frac{K_{fn}}{2\sqrt{gK_nK_{fn}}}$$

$$t = \frac{3}{xw_n} = \frac{6}{K_{fn}}$$

$$w_n = \sqrt{gK_nK_{fn}}$$

$$D = \frac{f_{nss}}{dw_n} = \frac{K_{fn}}{gK_nK_{fn}} = \frac{1}{gK_n}$$



2010-04-23

D —稳态偏差与陀螺漂移之比， t —调整时间

调平回路的设计

假设受阵风、浪、装载等干扰作用的影响，载体的正弦形晃动为

$$q(t) = q_0 \sin w_d t$$

式中 q_0 为晃动的振幅[度]， w_d 为频率[弧度/秒]。若惯性测量装置距**摇摆中心**高度为 h [厘米]，则作用在加速度计输入端的干扰加速度 f_d 的幅值为

$$F_d = h q_0 w_d^2$$

以 $f_d(s)$ 为输入量，以 $f(s)$ 为输出量的传递函数

$$\frac{f(s)}{f_d(s)} = \frac{K_v}{s^2 + K_{fn}s + gK_v}$$

$$K_v = K_{fn} K_n$$

$$f(s) = \frac{F_d K_v w_d}{(s^2 + K_{fn}s + gK_v)(s^2 + w_d^2)}$$



调平回路的设计

$$f(s) = \frac{F_d K_v w_d}{(s^2 + K_{fn} s + g K_v)(s^2 + w_d^2)}$$



对上式求拉氏逆变换可得由干扰加速度所引起的失准角为

$$f(t) = \frac{F_d K_v w_d}{\sqrt{(g K_v - w_d^2)^2 + K_{fn}^2 w_d^2}} \left[\frac{1}{w_d} \sin(w_d t - l) + \frac{1}{\sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}}} e^{-(K_{fn}/2)t} \sin(\sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}} t - m) \right]$$

$$l = \tan^{-1} \frac{K_{fn} w_d}{g K_v - w_d^2}$$

$$m = \tan^{-1} \frac{K_{fn} \sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}}}{\frac{K_{fn}^2}{4} - g K_v + w_d^2}$$

具体设计中，一般 $g K_v$ 比 w_d^2 小一个数量级。为了简化分析，可将 $g K_v$ 作为二阶微量予以忽略。由此可求得由干扰加速度所引起的失准角的幅值为

$$N_L = \frac{3600 K_v q_0 h w_d^2}{w_d \sqrt{w_d^2 + K_{fn}^2}} \quad \text{[角秒]}$$

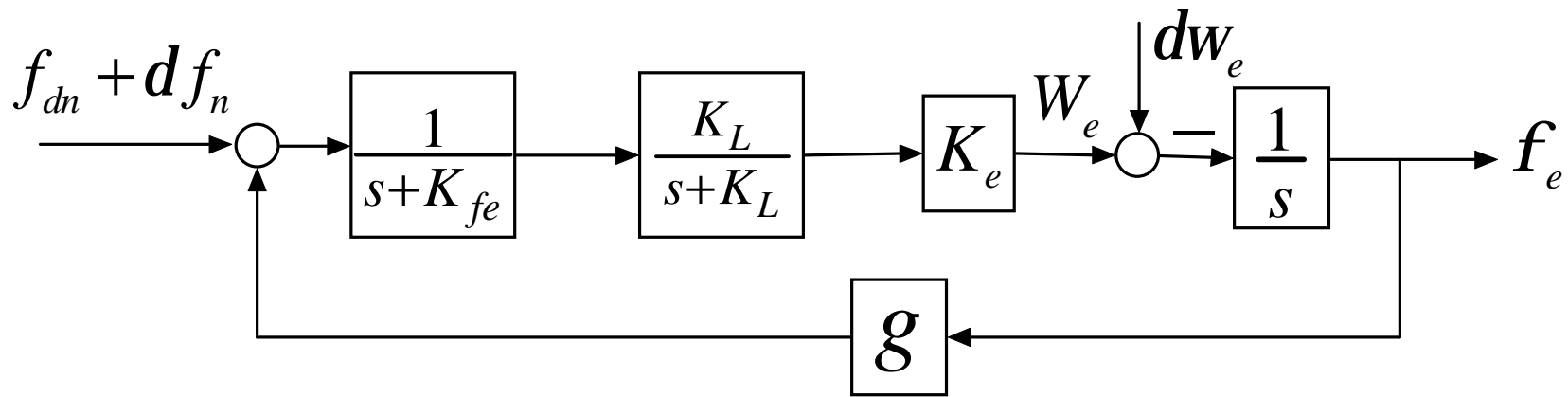
对于 $w_d \gg K_{fn}$

$$N_L = 3600 K_v q_0 h \text{ [角秒]}$$

改进的北向调平回路原理方块图



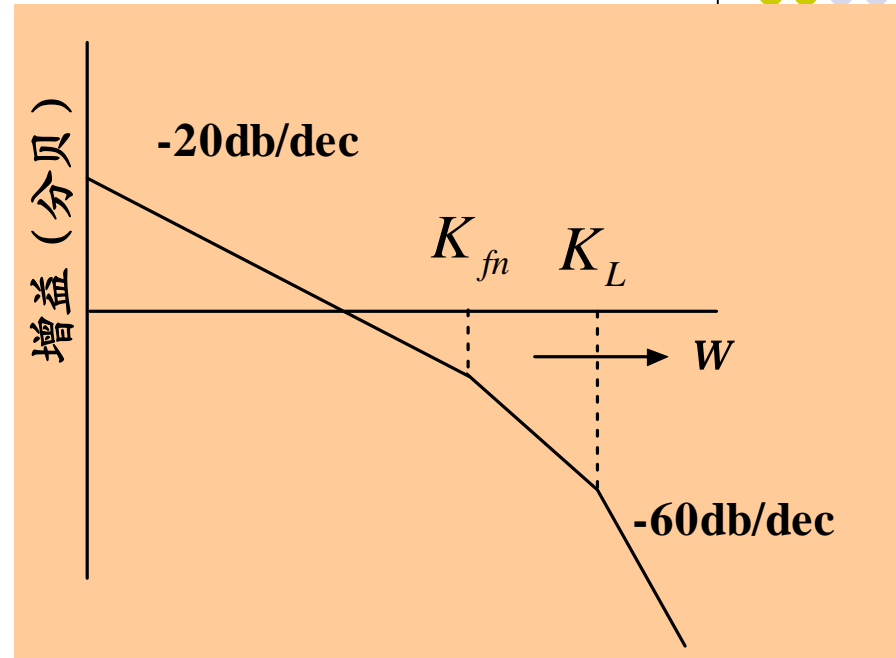
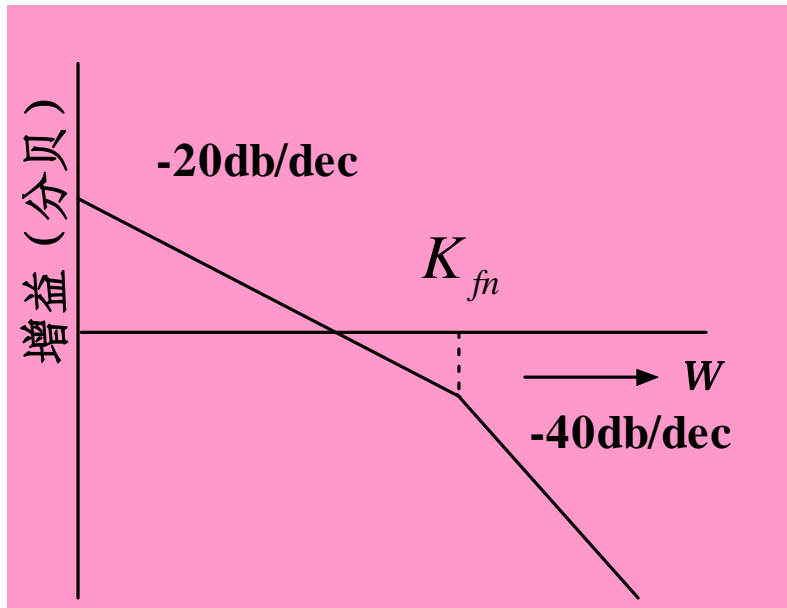
这里有4个待求的参数 (D_L , t_L , x_L 和 N_L)，但只有2个量 (K_{fn} 和 K_v)可供选择。设计步骤是从获得满意瞬态响应选择 K_{fn} 和 K_v 。然而这个响应常常是不够理想的，因为还希望 N_L 和 D_L 尽可能小。一旦选出合适的瞬态响应，要通过改变伯德图或根轨迹图来减小 D_L 和 N_L ，但它对确定 t_L 和 x_L 的一对主要极点的影响应当减至最小。此外，为了进一步衰减载体摇晃运动的影响，还可以在前向回路中附加一个滤波器，其交接频率高出 K_{fn} 十倍频程。



东向调平回路也可按同样方式加以改进



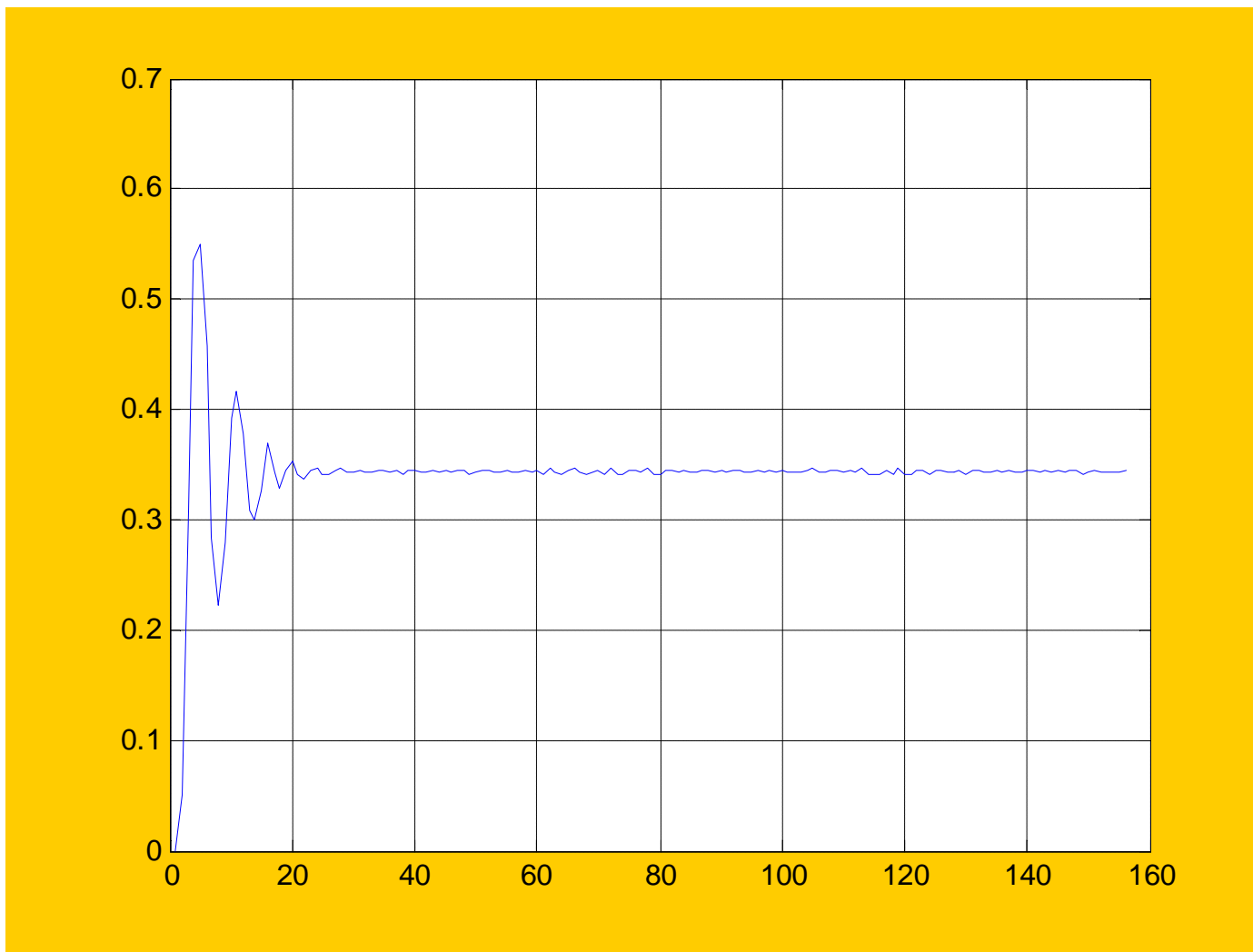
改进前后两种调平回路的伯德图



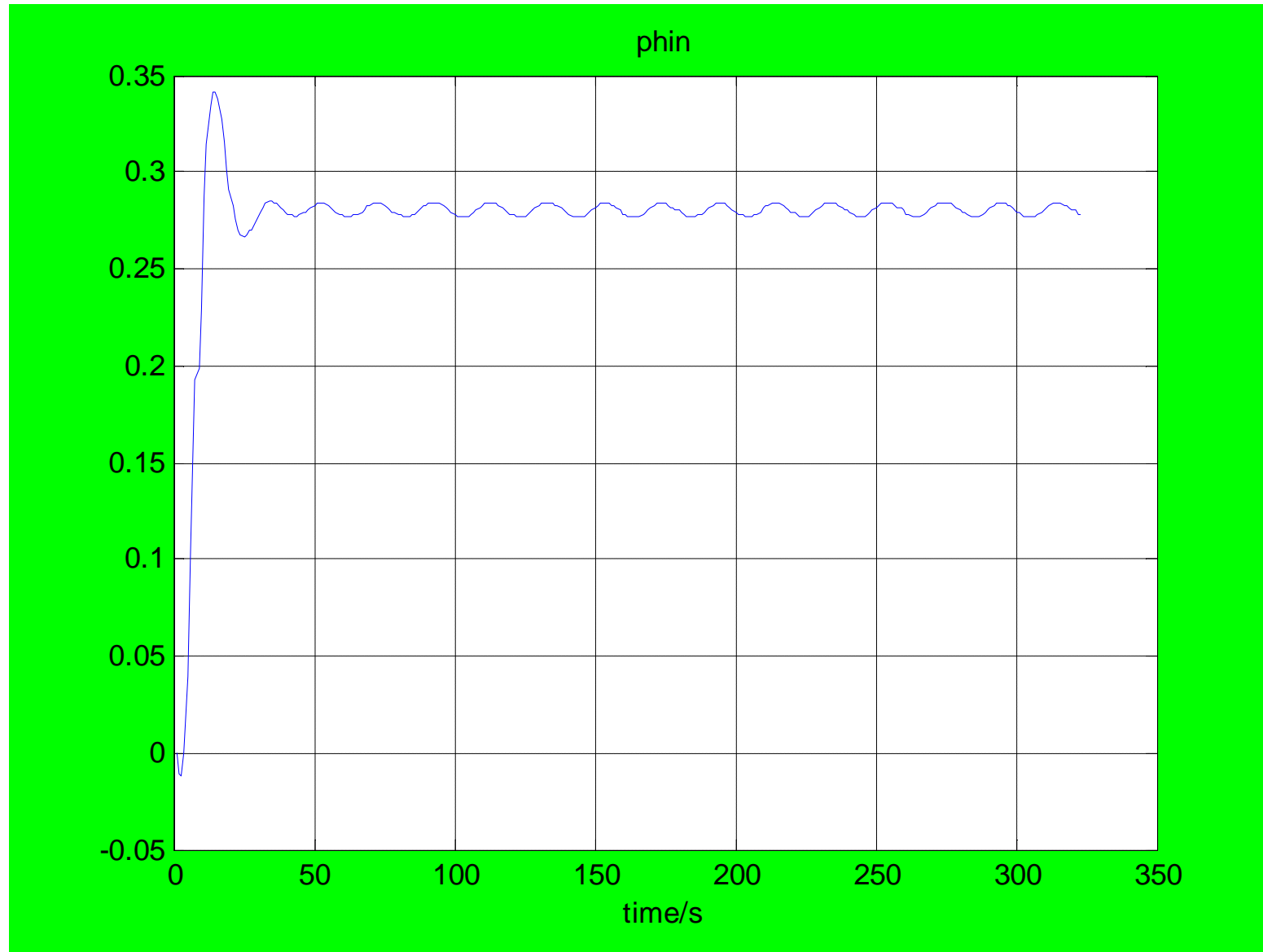
如 K_L 较 K_{fn} 足够高，附加滤波器对瞬态响应的影响不大。



北向调平回路smulink仿真（改进前）



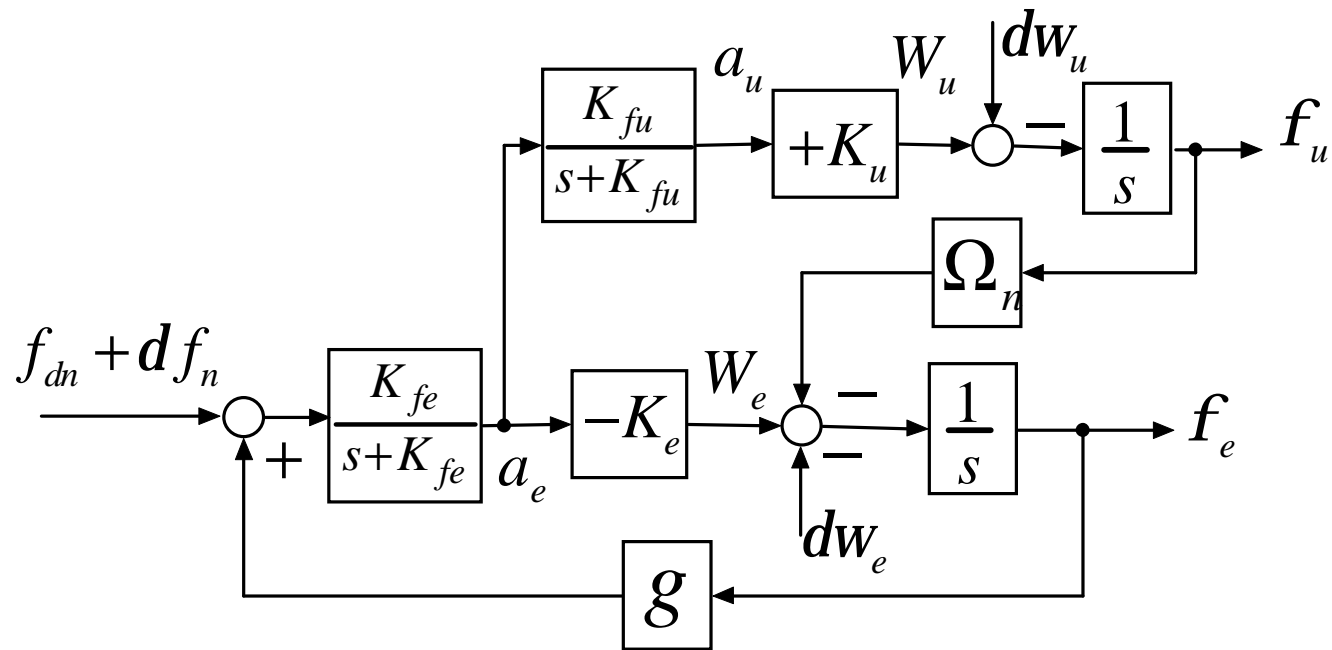
北向调平回路smulink仿真（改进后）



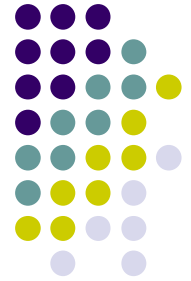
6.3.2.3 方位对准回路的设计及对准精度分析

写出方位对准回路的微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_e \\ \dot{f}_u \\ \dot{a}_e \\ \dot{a}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{ie} \cos L & -K_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_u \\ gK_{fe} & 0 & -K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & K_{fu} & -K_{fu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e \\ f_u \\ a_e \\ a_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_e \\ -dw_u \\ K_{fe}(df_n + f_{dn}) \\ 0 \end{bmatrix}$$



微分方程的特征多项式:



$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & w_{ie} \cos L & K_e & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_u \\ -gK_{fe} & 0 & s + K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fu} & s + K_{fu} \end{vmatrix}$$

$$s^4 + (K_{fu} + K_{fe})s^3 + (K_{fu}K_{fe} + gK_v)s^2 + gK_vK_{fu}s + gK_{fu}K_{fe}K_uw_{ie} \cos L = 0$$

$$s^4 + s^3 * K_{fu} + s^3 * K_{fe} + s^2 * K_{fe} * K_{fu} + g * K_{fe} * w * \cos L * K_u * K_{fu} + g * K_{fe} * s^2 * K_e + g * K_{fe} * s * K_e * K_{fu}$$

$$s^4 + (K_{fu} + K_{fe})s^3 + (K_{fu}K_{fe} + gK_v)s^2 + gK_vK_{fu}s + gK_{fu}K_{fe}K_uw_{ie} \cos L = 0$$

$$K_v = K_{fe}K_e$$

经验证明，如将这个四阶系统视为两个二阶系统的串联，并由此选择系数 K_{fe} ， K_{fu} ， K_u 和 K_e 可得到初始误差角希望的瞬态响应。

$$\Delta(s) = [s^2 + 2\zeta s + (\zeta^2 + w^2)]^2 = (s + \zeta + jw)^2 (s + \zeta - jw)^2$$



方位对准回路的精度分析

$$= s^4 + 4Ss^3 + (6S^2 + 2W^2)s^2 + (4S^3 + 4SW^2)s + (S^4 + 2W^2S^2 + W^4)$$

由二阶系统的最佳控制条件 $S = W$ 得

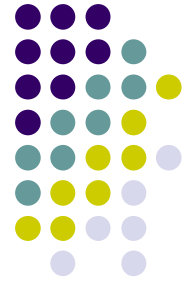
$$\Delta(s) = s^4 + 4Ss^3 + 8S^2s^2 + 8S^3s + 4S^4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2S \\ K_e &= \frac{2S}{g} \\ K_u &= \frac{S^2}{gW_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} f_e(s) \\ f_u(s) \\ a_e(s) \\ a_u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & W_{ie} \cos L & K_e & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_u \\ -gK_{fe} & 0 & s + K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fu} & s + K_{fu} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_u(0) \\ a_e(0) \\ a_u(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_e(s) \\ -dw_u(s) \\ K_{fe}(df_n(s) + f_{dn}(s)) \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



用matlab程序推导，文件为equation6_8691.m



$$[s*(s+Kfe)*(s+Kfu)]$$

$$[g*Kfe*Ku*Kfu]$$

$$[g*Kfe*s*(s+Kfu)]$$

$$[g*Kfe*s*Kfu]$$

式中系数阵的逆是

$$[-w*cosL*(s+Kfe)*(s+Kfu)]$$

$$[s^3+s^2*Kfu+Kfe*s^2+s*Kfe*Kfu+g*Kfe*Ke*s+g*Kfe*Ke*Kfu]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*(s+Kfu)]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*Kfu]$$

$$[-w*cosL*Ku*Kfu-s^2*Ke-s*Ke*Kfu]$$

$$[s*Ku*Kfu]$$

$$[s^2*(s+Kfu)]$$

$$[s^2*Kfu]$$

$$[-w*cosL*Ku*(s+Kfe)]$$

$$[Ku*(s^2+Kfe*s+g*Kfe*Ke)]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*Ku]$$

$$[s^{2010-04-23}(s^2+Kfe*s+g*Kfe*Ke)]$$





$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} f_e(s) \\ f_u(s) \\ a_e(s) \\ a_u(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+K_{fe}) & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos L(s+K_{fe}) & \mathbf{M} & -s(s+K_{fu})K_e & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos LK_u \\ \cdot(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & (s+K_{fu}) & & & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos LK_{fu}K_u & \mathbf{M} & (s+K_{fe}) \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fu}K_{fe}K_u & \mathbf{M} & s(s+K_{fe})(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & sK_uK_{fu} & \mathbf{M} & sK_u(s+K_{fe}) \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fe}s(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & -gw_{ie} \cos LK_{fe} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & s^2(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & -K_u w_{ie} \cos L \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fu}K_{fe} & \mathbf{M} & -gw_{ie} \cos LK_{fe}K_{fu} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & s^2K_{fu} & \mathbf{M} & s^2(s+K_{fe}) \\ & & & & & & & & +gK_{fu}K_e s \end{bmatrix}$$





利用终值定理可以求出由传感器偏置引起的失准角稳态误差

$$f_{ess} = \lim_{s \rightarrow 0} s f_e(s)$$

$$f_e(s) = \frac{-w_{ie} \cos L (s + K_{fe})(s + K_{fu})(-dw_u(s)) - [w_{ie} \cos L K_{fu} K_u] K_{fe} (df_n(s) + f_{dn}(s))}{\Delta(s)}$$

$$f_u(s) = \frac{g K_{fu} K_{fe} K_u (-dw_e(s)) + g K_e K_{fe} (s + K_{fu})(-dw_u(s))}{\Delta(s)}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ess} &= \frac{dw_u}{g K_u} - \frac{df_n}{g} \\ f_{uss} &= \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{K_e dw_u}{K_u w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2s \\ K_e &= \frac{2s}{g} \\ K_u &= \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4 = 0$$



$$\left. \begin{aligned} f_{ess} &= \frac{dw_u}{gK_u} - \frac{df_n}{g} \\ f_{uss} &= \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{K_e dw_u}{K_u w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

适当选择 K_u 和 K_e 的值可使稳态误差主要取决于 df_n/g 及 $dw_e/(w_{ie} \cos L)$ 项。这个结论说明，捷联系统常规对准的精度与平台系统常规对准是一样的。

方位失准角 f_u 对于干扰加速度 f_{dn} 的响应

$$f_u(s) = \frac{sK_u K_{fu} K_{fe} f_{dn}}{\Delta(s)}$$



$$\left\{ \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2s \\ K_e &= \frac{2s}{g} \\ K_u &= \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right.$$

为了简化分析，假设 $w=0$ ，即系统特征方程有四个相同的负实根

$$\begin{aligned} &= \frac{s \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} 2s 2s}{(s+s)^4} f_{dn} \\ &= \frac{4}{w_{ie} \cos L} \frac{s}{(Ts+1)^4} \frac{f_{dn}}{g} \end{aligned}$$

$$|f_u|_{\max} = \frac{4}{w_{ie} \cos L} \left| \frac{jW_d}{(jW_d T + 1)^4} \right| \frac{F_{dn}}{g}$$



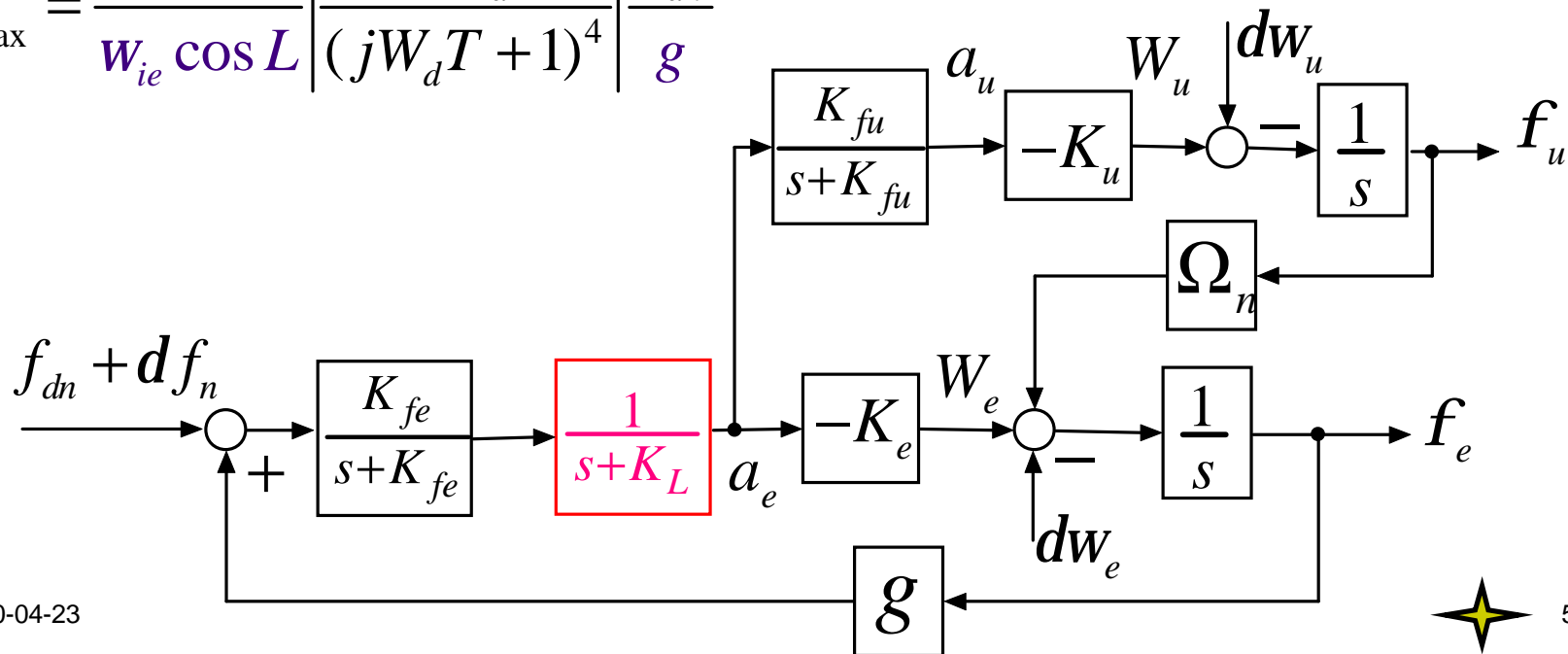
改进的方位对准回路



$$= \frac{4}{W_{ie} \cos L} \frac{s}{(Ts + 1)^4} \frac{f_{dn}}{g}$$

式中 $T=1/s$ 是方位对准回路的时间常数。如果正弦形干扰加速度为 $f_{dn} = F_{dn} \sin W_d t$ 则方位角峰值

$$|f_u|_{\max} = \frac{4}{W_{ie} \cos L} \left| \frac{jW_d}{(jW_d T + 1)^4} \right| \frac{F_{dn}}{g}$$





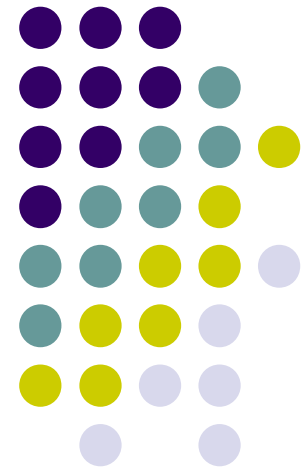
思考题

- 1、推导静基座解析粗对准算法。
- 2、编写静基座解析粗对准仿真程序并说明其对准精度与哪些因素有关。（提示：请考虑传感器误差）

捷联式惯导系统

初始对准

程向红





内容提要

- 6 捷联惯导系统的初始对准
- 6.1 惯导对准的一般要求和原理
- 6.2 粗对准原理
- ┆ 6.3 精对准原理
- ┆ 6.4 卡尔曼滤波在初始对准中的应用





6 捷联惯导系统的初始对准

- 📌 6.1 惯导对准的一般要求和原理
- 📌 6.2 粗对准原理
- 📌 6.3 精对准原理
- 📌 6.4 卡尔曼滤波在初始对准中的应用



6.1 惯导对准的一般要求和原理



😊 1. 为何要对准?

惯导家族成员均是由加速度计测得的加速度经**两次积分**而求得。要进行积分必须要知道**初始条件**: 初始速度, 初始位置, 初始姿态。而捷联惯导系统中初始对准的另一个关键问题是要在较短的时间内以一定的精度确定出从载体坐标系到地理坐标系的初始变换矩阵。

2. 对准的要求

$$C_b^n$$

精确、快速。传感器精度高, 同时对陀螺、加速度计进行补偿



3.对准的方法和过程

过程：分两步即粗对准和精对准

自主对准，不依赖外信息，受控式（依赖外信息）

方法：光的方法，天文的方法

粗对准：利用重力和地球自转角速率，直接估算初始姿态矩阵。

精对准：精确校正计算参考坐标系 n_c 与真实参考坐标系 n 之间的小失准角 f 。

如果采用状态反馈控制时，可将Kalman滤波技术应用于对准。

有些状态是不能直接测量的，因此必须采用**状态估计器**，估计出状态。当把系统考虑为**确定性系统**时，则状态估计器是**状态观测器**，当将系统考虑为随机系统时，则状态估计器是**Kalman滤波器**。



6.2 粗对准原理



- | 6.2.1 解析式粗对准
- | 6.2.1.1 对准方法描述
- | 6.2.1.2 误差分析
- | 6.2.2 一次修正粗对准
- | 6.2.2.1 对准方法描述
- | 6.2.2.2 误差分析



6.2.1解析式粗对准

对准方法描述



取导航坐标系为地理坐标系（ n 系ENU）。初始对准时，载体处于**静止状态**，加速度计测量的是重力加速度矢量在载体坐标系中的分量，陀螺仪测量的是地球速率矢量在载体坐标系 b 中的分量。这两个分量在导航坐标系 n 中的分量是已知的，并且是常值。变换矩阵 C_b^n

可由 w_{ie} 及 g 在 b 和 n 坐标系中的估值计算出来。重力矢量

$$\mathbf{g}^b = C_n^b \mathbf{g}^n \implies (\mathbf{g}^b)^T = (\mathbf{g}^n)^T (C_n^b)^T \implies C_b^n = [(\mathbf{g}^n)^T]^{-1} (\mathbf{g}^b)^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = C_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \implies C_b^n = [(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T]^{-1} (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_{ie} \quad \mathbf{v}^b = C_n^b \mathbf{v}^n \implies C_b^n = [(\mathbf{v}^n)^T]^{-1} (\mathbf{v}^b)^T$$
$$C_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

如定义

$$C_b^n = (C_n^b)^{-1} = (C_n^b)^T$$



对准方法描述



$$(\mathbf{g}^n)^T = [0 \quad 0 \quad -g]$$

$$(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T = [0 \quad w_{ie} \cos L \quad w_{ie} \sin L]$$

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{g}^n \times \mathbf{W}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gw_{ie} \cos L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

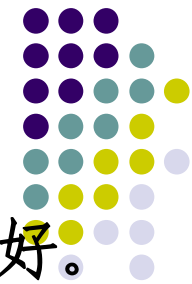
$$(\mathbf{v}^n)^T = [gw_{ie} \cos L \quad 0 \quad 0]$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & w_{ie} \cos L & w_{ie} \sin L \\ gw_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{g^2 w_{ie}^2 \cos^2 L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & gw_{ie} \cos L \\ gw_{ie}^2 \sin L \cos L & g^2 w_{ie} \cos L & 0 \\ -gw_{ie}^2 \cos^2 L & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{gw_{ie} \cos L} \\ \frac{\tan L}{g} & \frac{1}{w_{ie} \cos L} & 0 \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



对准方法描述



在静基座上对准时，解析对准法比现有的光学对准法要好。然而实际情况下，由于受干扰振动及干扰加速度的影响，其性能将要下降。这种影响是双重的，首先，这些干扰使 g^b 与

ω_{ie}^b 的测量有误差，因为被测量是

$$f = g + f_d \quad g^b \text{ 与 } \omega_{ie}^b$$

$$\omega_{ie}^b = C_n^b \omega_{ie}^n$$

$$\mathcal{C}_n^b = -\omega_{nb}^{bk} C_n^b$$

$$W_{ib} = W_{ie} + W_d$$

$$\mathcal{C}_n^b = \frac{C_n^b \mathcal{C}_n^n + \mathcal{C}_n^b \omega_{ie}^n}{=0} = -\omega_{nb}^{bk} C_n^b \omega_{ie}^n = -\omega_{nb}^{bk} \omega_{ie}^b \quad \mathcal{C}_{ie}^n = 0$$

由 w_d 的分量确定

需要引入某种滤波作用，以减小振动的影响。可采用简单的低通滤波器，以得到被测量的平均值。这样便能给出平均对准矩阵。显然，与载体的运动有关，载体坐标系的瞬时位置相对于其平均值位置可能有相当大的变化。结果是，如果仅达到平均对准，当系统转入导航状态时，会有比较大的初始失准角。



对准方法描述



若能得到载体振动的统计特性，则可构造一个更完善的最佳滤波方案，然而，要想依靠线性滤波把 g^b 和 ω_{ie}^b 的变动从干扰 w_d 和 f_d 中区分开来是相当困难的。因为很可能这些分量包含有相同的频率。此外，滤波器还会引入附加的时间延迟。因此，解析对准主要是作为一种平均对准，它是**迅速**求得变换矩阵初始估值 $C_b^{n'}$ 的一种方法。

坐标系 n_c 可称为捷联平台坐标系，它与真实参考系 n 之间的关系可用**3**个小失准角描述。变换矩阵 $C_n^{n'}$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

在精对准阶段，将利用计算参考系 n_c 与真实参考系 n 间的失准角估值 \hat{f} **精校变换矩阵的元素。**



误差分析

$$C_b^n = M Q_T \quad M = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \quad Q_T = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \times \mathbf{w}$$



$$d\mathbf{v} = \mathbf{g} \times d\mathbf{w} + d\mathbf{g} \times \mathbf{w}$$

$$d\mathbf{v} = \mathbf{g} \times d\mathbf{w} + d\mathbf{f} \times \mathbf{w}$$

$$C_b^{n'} = M(Q_T + dQ_T) \quad dQ_T = \begin{bmatrix} d\mathbf{f}^T \\ d\mathbf{w}^T \\ d\mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_x & df_y & df_z \\ dw_x & dw_y & dw_z \\ dv_x & dv_y & dv_z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} dv_x &= g_y \times dw_z - g_z \times dw_y + df_y \times w_z - df_z \times w_y \\ dv_y &= g_z \times dw_x - g_x \times dw_z + df_z \times w_x - df_x \times w_z \\ dv_z &= g_x \times dw_y - g_y \times dw_x + df_x \times w_y - df_y \times w_x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}^T$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$



误差分析



$$C_b^{n'} = MQ_T + MdQ_T = (I + MdQ_T C_n^b) C_b^n$$

$$MdQ_T C_n^b = \begin{bmatrix} 0 & f_u & -f_n \\ -f_u & 0 & f_e \\ f_n & -f_e & 0 \end{bmatrix} = -E^n$$

$$(C_b^{n'})_0 = C_b^{n'} [(C_b^{n'})^T (C_b^{n'})]^{-1/2}$$

$$(C_b^{n'})_0 = (I + MdQ_T C_n^b) C_b^n \underline{(I + dQ_T^T M^T C_b^n + C_n^b MdQ_T)^{-1/2}}$$

$$= C_b^n - \frac{1}{2} C_b^n dQ_T^T M^T C_b^n - \frac{1}{2} C_b^n C_n^b MdQ_T + MdQ_T - \frac{1}{2} MdQ_T dQ_T^T M^T C_b^n$$

$$- \frac{1}{2} MdQ_T C_n^b MdQ_T$$

$$(C_b^{n'})_0 = [I + \frac{1}{2} (MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T)] C_b^n$$

$$(C_b^{n'})^T (C_b^{n'})$$

$$= (C_b^n + MdQ_T)^T (C_b^n + MdQ_T)$$

$$= (C_b^n + dQ_T^T M^T) (C_b^n + MdQ_T)$$

$$= I + dQ_T^T M^T C_b^n + C_n^b MdQ_T$$

$$(I + X)^{-1/2} \approx I - \frac{1}{2} X$$

Matlab辅助推导



6.2.1.2 误差分析

$$(C_b^{n'})_0 = [I + \frac{1}{2}(MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T)] C_b^n$$

$$\frac{1}{2}(MdQ_T C_n^b - C_b^n dQ_T^T M^T) \quad \frac{1}{2}(MdQ_T \quad - \quad dQ_T^T M^T)$$

小括号内的项为一个矩阵和其转置矩阵的差值，是反对称矩阵。当载体坐标系***b***相对于地理坐标系***n***处于任意方位时，还不容易导出失准角 f_e ， f_n ， f_u 与仪表误差的简单解析函数式。为了便于分析，考虑一种特殊情况，假设***b***系沿着***n***系对准，即

$$C_b^n = I \quad , \quad \text{此时,}$$

$$(C_b^{n'})_0 = \left[I - \begin{bmatrix} 0 & -(f_u)_0 & (f_n)_0 \\ (f_u)_0 & 0 & -(f_e)_0 \\ -(f_n)_0 & (f_e)_0 & 0 \end{bmatrix} \right] C_b^n$$

误差分析

$$\frac{1}{2} (M dQ_T - dQ_T^T M^T)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L} & -\frac{df_x}{g} \\ -\frac{df_x}{g} \tan L + \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L} & 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right) \\ \frac{df_x}{g} & \frac{1}{2} \left(\frac{df_y}{g} + \frac{df_z}{g} \tan L - \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f_e)_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right)$$

$$(f_n)_0 = \frac{df_x}{g}$$

$$(f_u)_0 = \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L}$$

$$(C_b^{n'})_0 = \left[I - \begin{bmatrix} 0 & -(f_u)_0 & (f_n)_0 \\ (f_u)_0 & 0 & -(f_e)_0 \\ -(f_n)_0 & (f_e)_0 & 0 \end{bmatrix} \right] C_b^n$$



误差分析

$$(f_e)_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{df_y}{g} - \frac{df_z}{g} \tan L + \frac{dw_z}{w_{ie} \cos L} \right)$$

$$(f_n)_0 = \frac{df_x}{g}$$

$$(f_u)_0 = \frac{df_x}{g} \tan L - \frac{dw_x}{w_{ie} \cos L}$$

	df_x	df_y	df_z	dw_x	dw_z
f_e		-1.7¢/1mg	-1.7¢tanL/1mg		1.7¢secL/meru
f_n	3.4¢/1mg				
f_u	3.4¢tanL/1mg			-3.4¢secL/meru	

6.2.2 一次修正粗对准

传递对准

假设载体的姿态及航向角已由其它导航仪表以几度的精度近似测出。被测出的加速度分量 \hat{f}^b 可通过已知数据构成的姿态四元数 \hat{Q} 进行分解。由此得到计算的加速度分量为

$$\hat{f}^n = \hat{Q} \circ \hat{f}^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ (f^b + df^b) \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ f^b \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= \hat{Q} \circ Q^* \circ f^n \circ Q \circ \hat{Q}^* + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$= dQ^* \circ f^n \circ dQ + \hat{Q} \circ df^b \circ \hat{Q}^*$$

$$f^b = Q^* \circ f^n \circ Q$$

$$dQ = Q \circ \hat{Q}^*$$

$$dQ^* = \hat{Q} \circ Q^*$$

暂时不考虑测量误差，即 $df^b=0$ ，在载体没有加速度的情况下，矢量 f^n 为

$$f^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad dQ^* = 1 - \frac{1}{2}\phi^n$$

一次修正粗对准——方法描述

$$dQ^* = 1 - \frac{1}{2}f_e i - \frac{1}{2}f_n j - \frac{1}{2}f_u k$$

$$\hat{f}^n = dQ^* \mathbf{o} f^n \mathbf{o} dQ$$

$$dQ = 1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k$$

$$= (1 - \frac{1}{2}f_e i - \frac{1}{2}f_n j - \frac{1}{2}f_u k) \mathbf{o} (gk) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k)$$

$$= (\frac{1}{2}f_u g - \frac{1}{2}f_n g i + \frac{1}{2}f_e g j + gk) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2}f_e i + \frac{1}{2}f_n j + \frac{1}{2}f_u k)$$

$$= \frac{1}{2}f_u g + \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_e - \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_n - g \frac{1}{2}f_u$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_e - \frac{1}{2}f_n g + \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_u - g \frac{1}{2}f_n) i$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_e g + \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_u + g \frac{1}{2}f_e) j$$

$$+ (\frac{1}{2}f_u g \frac{1}{2}f_u + g - \frac{1}{2}f_n g \frac{1}{2}f_n - \frac{1}{2}f_e g \frac{1}{2}f_e) k$$

$$= -f_n g i + f_e g j + gk$$

有的是两个小量相乘被忽略了

$$\hat{f}^n = \begin{bmatrix} -f_n g \\ f_e g \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_e \\ \hat{f}_n \\ \hat{f}_u \end{bmatrix}$$

一次修正粗对准——方法描述

进行分解，可以写出

类似地，如将陀螺仪测出的角速率通过四元数 \hat{Q}
$$W^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_n \\ \Omega_u \end{bmatrix}$$

$$\hat{w}^n = \hat{Q} \mathbf{o} \hat{w}^b \mathbf{o} \hat{Q}^* = dQ^* \mathbf{o} w^n \mathbf{o} dQ + \hat{Q} \mathbf{o} d\hat{w}^b \mathbf{o} \hat{Q}^*$$

$$\hat{w}^n = dQ^* \mathbf{o} w^n \mathbf{o} dQ$$

$$= (1 - \frac{1}{2} f_e i - \frac{1}{2} f_n j - \frac{1}{2} f_u k) \mathbf{o} (\Omega_n j + \Omega_u k) \mathbf{o} (1 + \frac{1}{2} f_e i + \frac{1}{2} f_n j + \frac{1}{2} f_u k)$$

$$= [(\frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u + (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u)) i + (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) j + (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) k]$$

$$\mathbf{o} (1 + \frac{1}{2} f_e i + \frac{1}{2} f_n j + \frac{1}{2} f_u k)$$

$$= \frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u - (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_e - (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_n - (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_u$$

$$+ [(\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) + (\frac{1}{2} f_n \Omega_n + \frac{1}{2} f_u \Omega_u) \frac{1}{2} f_e + (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_u - (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_n] i$$

$$+ [(\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) - (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_u + (\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) \frac{1}{2} f_e] j$$

$$+ [(\Omega_u - \frac{1}{2} f_e \Omega_n) + (\frac{1}{2} f_u \Omega_n - \frac{1}{2} f_n \Omega_u) \frac{1}{2} f_n - (\frac{1}{2} f_e \Omega_u + \Omega_n) \frac{1}{2} f_e] k$$

$$= (f_u \Omega_n - f_n \Omega_u) i + (f_e \Omega_u + \Omega_n) j + (\Omega_u - f_e \Omega_n) k$$

**注意：两个小量
相乘可忽略**



一次修正粗对准——方法描述

$$= (f_u \Omega_n - f_n \Omega_u) i + (f_e \Omega_u + \Omega_n) j + (\Omega_u - f_e \Omega_n) k$$

$$\hat{W}^n = \begin{bmatrix} f_u \Omega_n - f_n \Omega_u \\ f_e \Omega_u + \Omega_n \\ \Omega_u - f_e \Omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L \\ f_e w_{ie} \sin L + w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L - f_e w_{ie} \cos L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_e \\ \hat{W}_n \\ \hat{W}_u \end{bmatrix}$$

$$f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L = \hat{W}_e$$

$$f_e = \frac{\hat{f}_n}{g}$$

$$f_n = -\frac{\hat{f}_e}{g}$$

$$f_u = \frac{\hat{W}_e}{w_{ie} \sin L} + f_n \tan L = \frac{\hat{W}_e}{w_{ie} \sin L} - \frac{\hat{f}_e}{g} \tan L$$

$$\hat{f}^n = \begin{bmatrix} -f_n g \\ f_e g \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_e \\ \hat{f}_n \\ \hat{f}_u \end{bmatrix}$$

利用这些估值的失准角可以校正计算的四元数

$$dQ = [1, \frac{1}{2} \hat{f}_e i, \frac{1}{2} \hat{f}_n j, \frac{1}{2} \hat{f}_u]^T$$

$$dQ = Q \circ \hat{Q}^*$$

$$Q = dQ \circ \hat{Q}$$

一次修正粗对准——误差分析

现在考虑仪表误差及干扰运动对估值 $\hat{\phi}$ 的影响。

用 f_d 和 w_d 分别表示干扰加速度及角速度矢量

$$f^n = [f_{de}, f_{dn}, g + f_{du}]^T$$

$$w^n = [w_{de}, w_{dn} + w_{ie} \cos L, w_{du} + w_{ie} \sin L]^T$$

将仪表误差 df^b 和 $d\omega^b$ 沿计算参考坐标系轴分解得到

$$\hat{f}'^n = \begin{bmatrix} -f_n g + d f_e + f_{de} \\ f_e g + d f_n + f_{dn} \\ g + d f_u + f_{du} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}'_e \\ \hat{f}'_n \\ \hat{f}'_u \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}'_e = \frac{\hat{f}'_n}{g}$$

$$\hat{f}'_n = -\frac{\hat{f}'_e}{g}$$

$$\hat{w}'^n = \begin{bmatrix} f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L + d w_e + w_{de} \\ f_e w_{ie} \sin L + w_{ie} \cos L + d w_n + w_{dn} \\ w_{ie} \sin L - f_e w_{ie} \cos L + d w_u + w_{du} \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}'_u = \frac{\hat{w}'_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{\hat{f}'_e}{g} \tan L$$

一次修正粗对准——误差分析

可以求出估计的捷联平台失准角为：

$$\hat{f}_e = f_e + \frac{1}{g}(df_e + f_{de})$$

$$\hat{f}_n = f_n - \frac{1}{g}(df_n + f_{dn})$$

$$\hat{f}_u = f_u + \frac{1}{W_{ie} \cos L}(dw_e + w_{de}) - \frac{\tan L}{g}(df_e + f_{de})$$

当 $df_e=df_n=10^{-4}g$ 时，水平失准角误差为 10^{-4}rad 。由陀螺漂移所产生的方位失准角误差，当 $dw_e=0.2^\circ/\text{h}$ ，纬度 45° 时，误差约为 $0.0188\text{rad}(1^\circ)$ ； df_e 所产生的方位误差比它小二个数量级，即 10^{-4}rad 。干扰运动对一次修正对准精度的影响是比较大的。例如， $10^{-3}g$ 的横向加速度可能造成 0.05° 的水平误差，而绕东向轴的 $10^{-3}^\circ/\text{s}$ 的干扰角速率将产生约 19.45° 的方位误差。

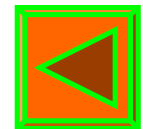
克服扰动影响最常用的方法是在一段时间内对估计的失准角取平均值

$$\hat{f}'_e = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{f}'_n}{g} dt$$

$$\hat{f}'_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{\hat{f}'_e}{g}\right) dt$$

$$\hat{f}'_u = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\hat{W}'_e}{W_{ie} \cos L} - \frac{\hat{f}'_e}{g} \tan L \right) dt$$

当T足够大时，扰动运动对计算失准角的影响几乎可以忽略。这时计算的是平均失准角，实际的失准角误差最大可能是其波动的峰值。





6.3 精对准原理

- | 6.3.1 东向陀螺作为敏感元件的校正对准
- | 6.3.1.1 对准方法描述
- | 6.3.1.2 失准角信息的提取
- | 6.3.1.3 修正矩阵的结构及对准精度分析
- | 6.3.2 常规校正对准
- | 6.3.2.1 对准方法的描述
- | 6.3.2.2 调平回路的设计
- | 6.3.2.3 方位对准回路的设计及对准精度分析



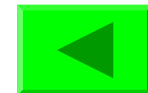
精对准原理



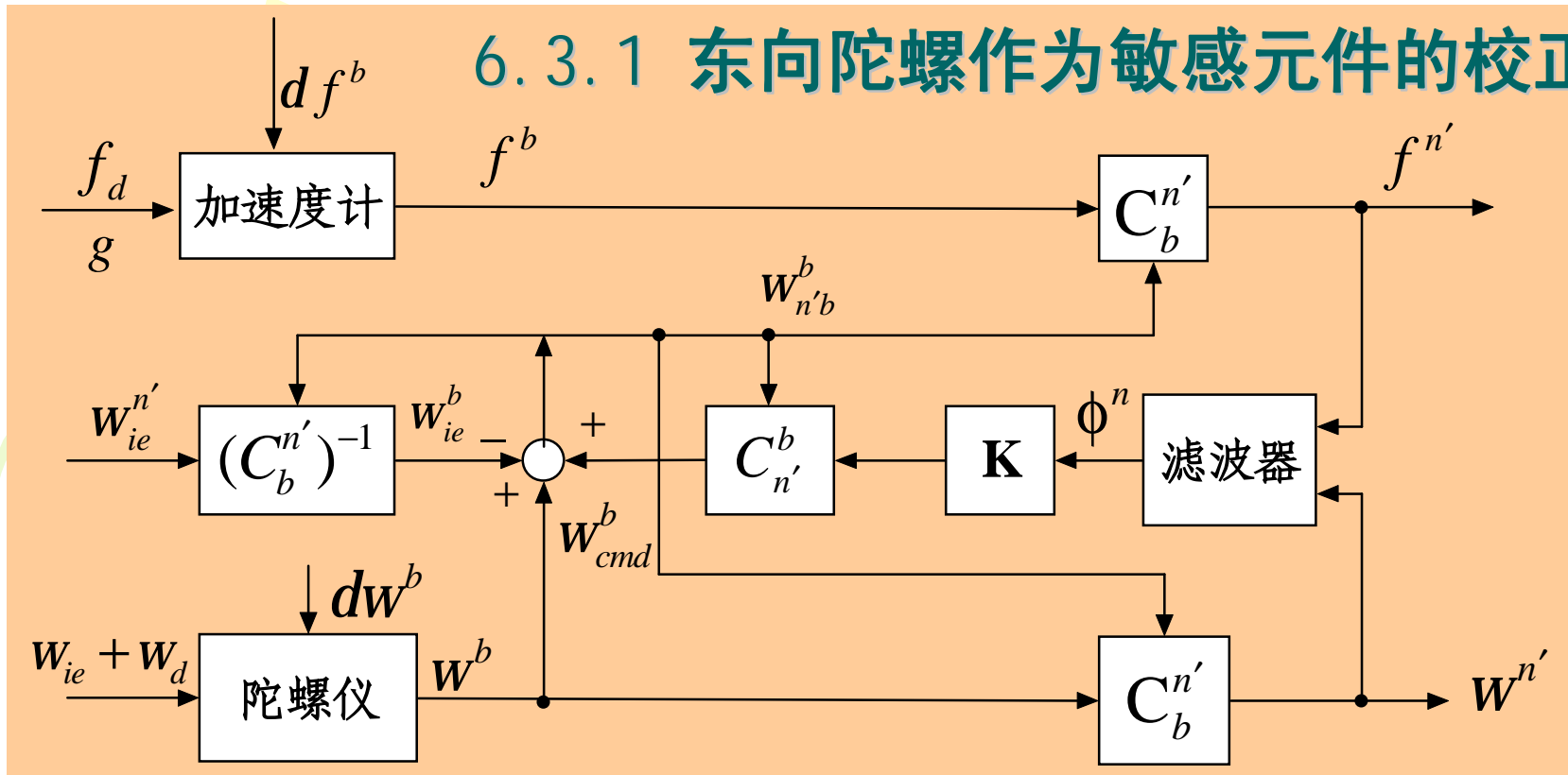
按照提取失准角信息的方法来划分，可能有两种自主式精对准方案。

从加速度表及东向陀螺仪输出中提取失准角信息

与平台式惯导系统对准相似，只从水平加速度表中提取失准角信息

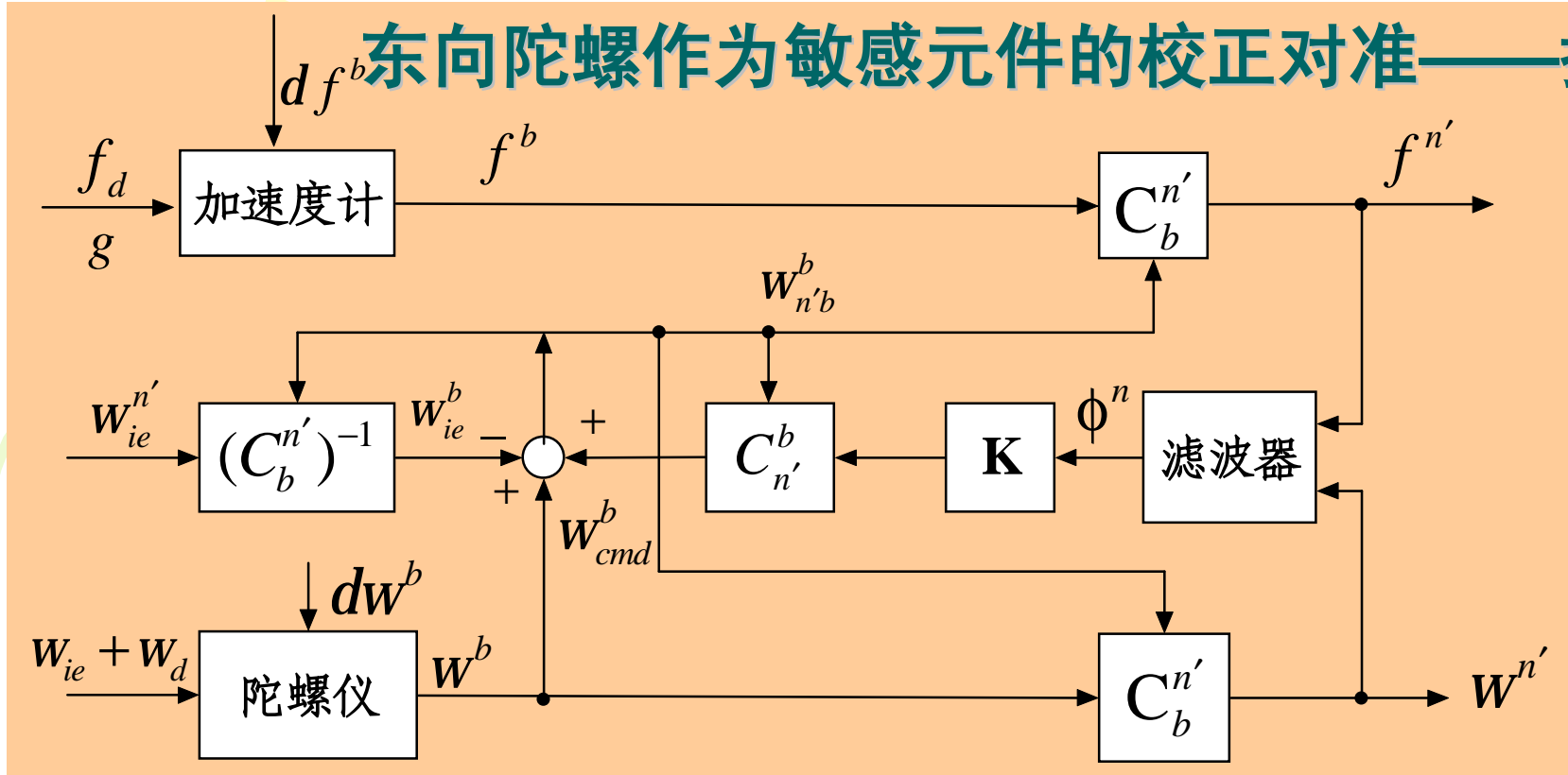


6.3.1 东向陀螺作为敏感元件的校正对准



1取地理坐标系为参考坐标系;2图中将四元数更新姿态矩阵算法简略了。3校正对准基本思路是,通过处理加速度计及陀螺仪的测量值,检测 n 坐标系与 n' 坐标系之间的误差角 f ,并产生一个修正指令 W_{cmd}^b 给姿态变换矩阵计算机,以驱动这些误差角尽可能较小为零。4同时,还需要对干扰角振动进行补偿。这个过程类似于平台系统中“基座振动隔离”。

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

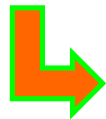


“基座振动隔离”，是依靠将干扰角速度 W_d^b 的估值反馈给方向余弦矩阵计算机来实现的。

变换矩阵 $C_b^{n'}$ 可利用下式进行更新

$$C_b^{n'} = C_b^{n'} W_{n'b}^{bk}$$

$$W_{n'b}^b = W_{cmd}^b + W_d^b + dw^b + W_{ie}^b - W_{ie}^{b'}$$



是角速度 $W_{n'b}^b$ 的反对称阵

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$$C_{n'}^b$$

$$W_{cmd}^b$$

通过滤波计算得到的与误差有关的修正信号

估值 陀螺输出的角速度 dw^b

$$\hat{W}_d^b = W_{ie}^b + W_d^b + dw^b - W_{ie}^{b'}$$

$$\mathcal{C}_b^{n'} = C_b^{n'} W_{n'b}^{bk} \quad W_{ie}^{b'} \neq W_{ie}^b$$

理想

$$W_{n'b}^b = W_{n'n}^b + W_{nb}^b = W_{cmd}^b + W_d^b$$

补偿计算载体坐标系 b 的振动所需的角速度

$$W_{n'b}^b = W_{cmd}^b + W_d^b + dw^b + W_{ie}^b - W_{ie}^{b'}$$

实际 = $W_{cmd}^b + W_d^b + dw^b - E^b W_{ie}^b$

$$\mathcal{C}_b^{n'} = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk}$$

反对称矩阵

$$W_{ie}^{b'} - W_{ie}^b = C_b^{b'} W_{ie}^b - W_{ie}^b = (C_b^{b'} - I) W_{ie}^b = E^b W_{ie}^b$$

$$C_b^{n'} = C_n^{n'} C_b^n \Rightarrow \mathcal{C}_b^{n'} = C_n^{n'} \mathcal{C}_b^n + \mathcal{C}_n^{n'} C_b^n \quad \mathcal{C}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

$$dw_{ie}^{bk} \quad E^b W_{ie}^b$$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$$\mathcal{E}'_b = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} \quad \mathcal{E}_b^n = C_b^n W_{nb}^{bk}$$

$$\mathcal{E}'_b = C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n + \mathcal{E}'_n C_b^n$$

W_d^b

$$\mathcal{E}'_n C_b^n = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} - C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n$$

$$\mathcal{E}'_n C_b^n = C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} + C_b^{n'} W_d^{bk} + C_b^{n'} dw^{bk} - C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} - C_n^{n'} C_b^n W_{nb}^{bk} \quad C_n^b \text{ 两边右乘}$$

$$\mathcal{E}'_n = -\mathcal{E}_n^n$$

$$W_{nb}^{nk} = C_b^n W_{nb}^{bk} C_n^b$$

角速度反对称矩阵的相似变换

$$\mathcal{E}_n^n = -C_b^{n'} W_{cmd}^{bk} C_n^b - C_b^{n'} dw^{bk} C_n^b + C_b^{n'} dw_{ie}^{bk} C_n^b$$

$$\mathcal{E}_n^n = -W_{cmd}^{nk} - dw^{nk} + dw_{ie}^{nk}$$

矢量形式

$$\phi^n + W_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -dw^n$$

$$C_b^{n'} = C_n^{n'} C_b^n$$



$$\mathcal{E}'_b = C_n^{n'} \mathcal{E}_b^n + \mathcal{E}'_n C_b^n$$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——描述

$$\dot{\phi}^n = -W_{cmd}^{nk} - dW^{nk} + dW_{ie}^{nk} \quad dW_{ie}^{nk} \text{ 是 } E^n W_{ie}^n \text{ 的反对称形式}$$

写成矢量形式

$$\dot{\phi}^n = -W_{cmd}^n - dW^n - \underline{dW_{ie}^{nk} \phi^n} \quad \underline{\text{反对称矩阵}}$$

为使 f^n 减小至零，修正指令 W_{cmd}^n 可选择成 f^n 的估值的线性函数，即采用线性控制规律 $W_{cmd}^n = K_c \hat{\phi}^n$

K_c 为待定的 3×3 修正矩阵

$$\dot{\phi}^n + W_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -dW^n$$

可以看出，上式表示三个标量微分方程式，它通过地球速率项

$W_{ie}^{nk} \phi^n$ 相耦合。

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——f提取

为了构成修正指令 w_{cmd} ，必须测出误差角 f^n 。从计算的 g 的水平分量及 w_{ie} 的东向分量可以求得 f^n 的三个分量。具体地讲，由于

$$\begin{aligned}\hat{f}^n &= (I - E^n) C_b^n \hat{f}^b \\ &= (I - E^n) (\underline{g^n + f_d^n + df^n})\end{aligned}$$

$$g^n = [0 \quad 0 \quad g]^T$$

$$\hat{f}_e = -g f_n + f_{de} + d f_e$$

$$\hat{f}_n = g f_e + f_{dn} + d f_n$$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

方位失准角 f_u 可由下式找出

$$\hat{w}^n = (I - E^n) C_b^n \hat{w}^b$$

$$= (I - E^n) (\omega_{ie}^n + \omega_d^n + d\omega^n) \quad \text{其东向分量为}$$

$$\hat{w}_e = f_u w_{ie} \cos L - f_n w_{ie} \sin L + w_{de} + dw_e$$

系统设计成，可从 \hat{f}_e \hat{f}_n \hat{w}_e 的测量值中提取误差角，
假设不计误差源的影响

$$\hat{\phi}^n = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\hat{f}_n}{g} & -\frac{\hat{f}_e}{g} & -\frac{\hat{f}_e}{g} \tan L + \frac{\hat{w}_e}{w_{ie} \cos L} \end{array} \right]^T$$

$$\hat{\phi} = \phi + d\phi$$

$$\hat{\phi}^n = \phi^n + d\phi^n = \phi^n + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g} (f_{dn} + df_n) \\ -\frac{1}{g} (f_{de} + df_e) \\ -\frac{f_{de} + df_e}{g} \tan L + \frac{w_{de} + dw_e}{w_{ie} \cos L} \end{array} \right\}$$

$$C_n^{n'} = I - E^n = \begin{bmatrix} 1 & f_u & -f_n \\ -f_u & 1 & f_e \\ f_n & -f_e & 1 \end{bmatrix}$$

东向陀螺作为敏感元件的校正对准——修正矩阵结构

ω_{ie}^n

现在先确定使误差角趋于零的 K_c 矩阵结构，然后简要分析对准精度。在式中，假设没有不确定性误差，得到

$$\dot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -d\omega^n \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^n = -\omega_{ie}^{nk} \phi^n - K_c \hat{\phi}^n$$

$$\dot{X} = AX + U \quad \text{式中 } X = f^n \quad A = -\omega_{ie}^{nk} \quad U = -K_c \hat{\phi}^n \quad \text{最优控制}$$

确定 K_c 的一种方法是定义

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (X^T V X + U^T W U) dt \quad \text{评价函数}$$

$$V = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_{3m}^2} \end{Bmatrix} \quad W = \begin{Bmatrix} \frac{1}{u_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u_{3m}^2} \end{Bmatrix}$$

式中 t_0 是过程的起始时间， V 和 W 是正定加权矩阵，这里取它们为常数矩阵。 V 和 W 的合理选择是使闭环系统有满意的动态品质。有文献指出， V 和 W 取下列对角阵是合适的。

式中 x_{im} 及 u_{im} 是状态与控制量的上限值。为使性能指标 J 取极小值， K_c 应为

$$K_c = W^{-1}S$$

式中 S 是代数里卡提方程的解

$$SA + A^T S - S W^{-1} S + V = 0 \quad \leftarrow \text{须用数值法求解。}$$

此处

$$A = -\omega_{ie}^{nk}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L \\ -w_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ w_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

确定矩阵 K_c 的另一种方法是使方程式变成无耦合的。这一点能够做到，因为在给定纬度上 ω_{ie}^n 是常数。

$$\ddot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -d\omega^n$$



由此可取 K_c 的非对角线项等于反对称矩阵 $-\omega_{ie}^{nk}$ 的对应元素，

$$K_c = \begin{bmatrix} K_e & \omega_{ie} \sin L & -\omega_{ie} \cos L \\ -\omega_{ie} \sin L & K_n & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & K_u \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n \quad \hat{\phi} = \phi + d\phi$$

$$\ddot{\phi}^n + K_d \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n$$

$$K_d = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & K_u \end{bmatrix}$$

若详细考察式中的项 $K_c df^n$ 可以看到，合理选择系统的调整时间，则有

$$K_e, K_n, K_u \gg w_{ie}$$

$$\phi^n + K_d \phi^n + K_c d\phi^n = -d\omega^n$$

$$f_e + K_e f_e = -\frac{K_e}{g} (f_{dn} + d f_n) - dw_e$$

$$\phi^n + K_d \phi^n = -d\omega^n - K_d d\phi^n$$

$$f_n + K_n f_n = \frac{K_n}{g} (f_{de} + d f_e) - dw_n$$



$$f_u + K_u f_u = K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de} + d f_e) - \frac{w_{de} + dw_e}{w_{ie} \cos L} \right] - dw_u$$

$$s f_e(s) - f_e(0) + K_e f_e(s) = -\frac{K_e}{g} (f_{dn}(s) + d f_n(s)) - dw_e(s)$$

$$s f_n(s) - f_n(0) + K_n f_n(s) = \frac{K_n}{g} (f_{de}(s) + d f_e(s)) - dw_n(s)$$

$$s f_u(s) - f_u(0) + K_u f_u(s) = K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de}(s) + d f_e(s)) - \frac{w_{de}(s) + dw_e(s)}{w_{ie} \cos L} \right] - dw_u(s)$$

显然，捷联系统的这种对准方案与平台系统的陀螺罗经对准有相似之处，在高纬度地区精度下降，而在地球的两极不能工作。

可以看出，失准角 f_e 、 f_n 、 f_u 是载体运动与测量误差的函数。利用拉普拉斯变换可容易求出方程的解。假定扰动函数是时间的一般函数得到

$$\left. \begin{aligned} f_e(s) &= -\frac{K_e}{g} \frac{f_{dn}(s) + d f_n(s)}{s + K_e} - \frac{dw_e(s)}{s + K_e} + \frac{f_e(0)}{s + K_e} \\ f_n(s) &= \frac{K_n}{g} \frac{f_{de}(s) + d f_e(s)}{s + K_n} - \frac{dw_n(s)}{s + K_n} + \frac{f_n(0)}{s + K_n} \\ f_u(s) &= K_u \left[\frac{\tan L}{g} \frac{f_{de}(s) + d f_e(s)}{s + K_u} - \frac{w_{de}(s) + dw_e(s)}{w_{ie} \cos L (s + K_n)} \right] - \frac{dw_u(s)}{s + K_n} + \frac{f_u(0)}{s + K_n} \end{aligned} \right\}$$

式中s为拉普拉斯算子。利用卷积定理

$$L^{-1} \frac{W(s)}{s + K} = \int_0^t e^{-K(t-t)} w(t) dt$$

对于任意的输入，方程式的解由下式给出

$$\left. \begin{aligned} f_e(t) &= e^{-K_e t} \int_0^t e^{-K_e t} \left[-\frac{K_e}{g} (f_{dn}(t) + d f_n(t)) - dw_e(t) \right] dt + f_e(0) e^{-K_e t} \\ f_n(t) &= e^{-K_n t} \int_0^t e^{-K_n t} \left[\frac{K_n}{g} (f_{de}(t) + d f_e(t)) - dw_n(t) \right] dt + f_n(0) e^{-K_n t} \\ f_u(t) &= e^{-K_u t} \int_0^t e^{-K_u t} K_u \left[\frac{\tan L}{g} (f_{de}(t) + d f_e(t)) - \frac{w_{de}(t) + dw_e(t)}{w_{ie} \cos L} - dw_u(t) \right] dt \\ &\quad + f_u(0) e^{-K_u t} \end{aligned} \right\}$$

针对载体运动为零，加速度表陀螺仪有常值误差的简单情况，分析系统的动力学特性

$$f_{de}(t) = f_{dn}(t) = w_{de}(t) = 0$$

$$df_i(t) = df_i = \text{const}, i = e, n$$

$$dw_i(t) = dw_i = \text{const}, i = e, n, u$$

稳态误差

$$f_{ess} = -\frac{df_n}{g} - \frac{dw_e}{K_e}$$

$$f_{nss} = \frac{df_e}{g} - \frac{dw_n}{K_n}$$

$$f_{uss} = \frac{\tan L df_e}{g} - \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{dw_u}{K_u}$$

$$f_e(t) = \left[-\frac{df_n}{g} - \frac{dw_e}{K_e} \right] (1 - e^{-K_e t}) + f_e(0) e^{-K_e t}$$

$$f_n(t) = \left[\frac{df_e}{g} - \frac{dw_n}{K_n} \right] (1 - e^{-K_n t}) + f_n(0) e^{-K_n t}$$

$$f_u(t) = \left[\frac{\tan L df_e}{g} - \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{dw_u}{K_u} \right] (1 - e^{-K_u t}) + f_u(0) e^{-K_u t}$$

可以看出，与平台系统相比，主要误差源与灵敏度均相同。即造成水平对准误差的基本原因是加速度表的测量误差，而方位误差主要是由东向陀螺漂移引起的。



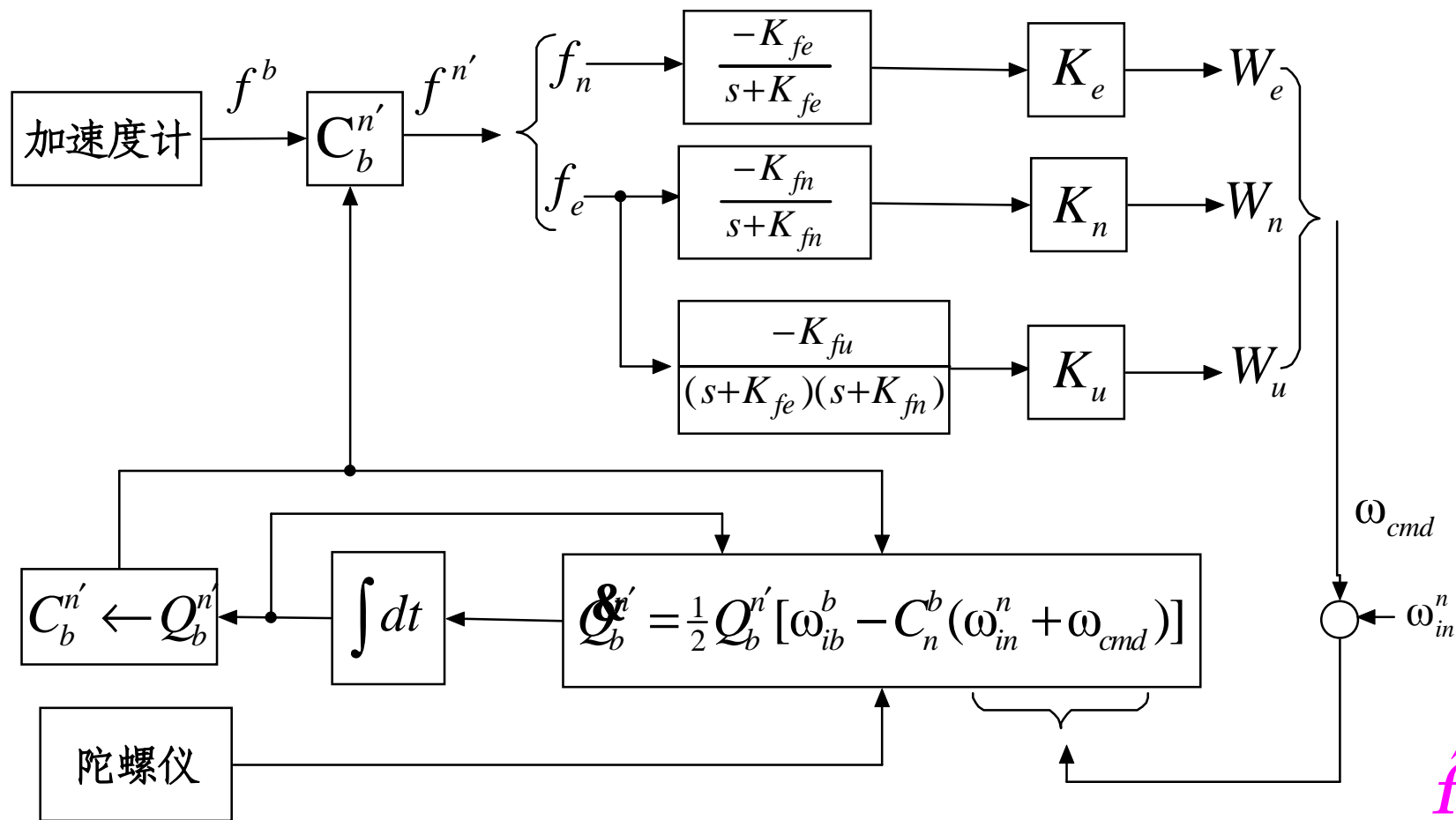
6.3.2 常规校正对准



在载体有扰动运动时，只用加速度表作为敏感元件的常规对准法已得到满意的对准效果。虽然采用卡尔曼滤波器改进常规对准也是一种有效方法，但为使系统结构简单和适应噪声特性变动更便于调节滤波参数，提出有低通滤波器的常规对准方案。

粗对准后，计算地理坐标系 n^c 与真实地理坐标系 n 之间有很小的失准角 f 。造成对准误差的主要原因是载体的扰动运动。对加速度计输出信号进行滤波处理，可以求得失准角的估值 $\hat{\phi}$ ，然后用这个估值经过加权形成指令信号，对 $C_b^{n'}$ 进行连续校正，使 f^n 减小至零。应当指出，与东向陀螺校正对准方案相似，在四元数姿态校正计算中也应对干扰角振动进行补偿。





对加速度计输出信号进行滤波处理，可以求得失准角的估值
 然后用这个估值经过加权形成指令信息，对 $C_b^{n'}$

校正，使 f^n 减小至零。与东向陀螺校正对准方案相似，在
 四元数姿态校正计算中也应对干扰角振动进行补偿。

常规校正对准——对准方法的描述



$$\dot{\mathbf{f}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{cmd}^n - d\boldsymbol{\omega}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^{nk} \mathbf{f}^n$$

$$-\boldsymbol{\omega}_{ie}^{nk} = \begin{bmatrix} 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L \\ -w_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ w_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{f}}_e = w_{ie} \sin L f_n - w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{\mathbf{f}}_n = -w_{ie} \sin L f_e + W_n - dw_n$$

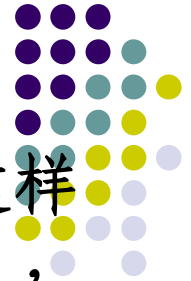
$$\dot{\mathbf{f}}_u = w_{ie} \cos L f_e + W_u - dw_u$$

失准角微分方程的分量形式

式中 W_e , W_n , W_u 为指令信号。精对准分两步进行，将方位失准角 f_u 保持在不加指令信号的状态，系统**先进行调平**，把 f_e , f_n 驱动至零，**然后再进行方位对准**，把 f_u 调整至零。



常规校正对准——对准方法的描述

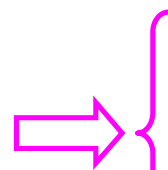


在调平时，依靠忽略包含 $w_{ie} \cos L$ 的项能使方程式解耦。这样做是合理的。因为可以看出，经过粗对准后，当 $f_e = f_n = 1^\circ$ ， $L = 45^\circ$ 时， $w_{ie} \sin L f_e$ 及 $w_{ie} \sin L f_n$ 项的值约为 $0.185^\circ/h$ 。它远小于要求的初始调平指令信号。自然， $w_{ie} \sin L f_e$ 及 $w_{ie} \sin L f_n$ 将比指令信号 W_e ， W_n 更快地趋近于零。应当指出，在式中，相对于 W_e 不能忽略 $w_{ie} \cos L f_u$ ，因为调平时 f_u 并未趋近于零， $w_{ie} \cos L f_u$ 还比较大。对于方位对准，在式中，与 W_u 相比可以忽略 $w_{ie} \cos L f_e$ ，其理由与在式中忽略包含 $w_{ie} \sin L$ 的项相同。利用这些简化关系，可改写为

$$\dot{f}_e = w_{ie} \sin L f_n - w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{f}_n = -w_{ie} \sin L f_e + W_n - dw_n$$

$$\dot{f}_u = w_{ie} \cos L f_e + W_u - dw_u$$



$$\dot{f}_e = -w_{ie} \cos L f_u + W_e - dw_e$$

$$\dot{f}_n = W_n - dw_n$$

$$\dot{f}_u = W_u - dw_u$$



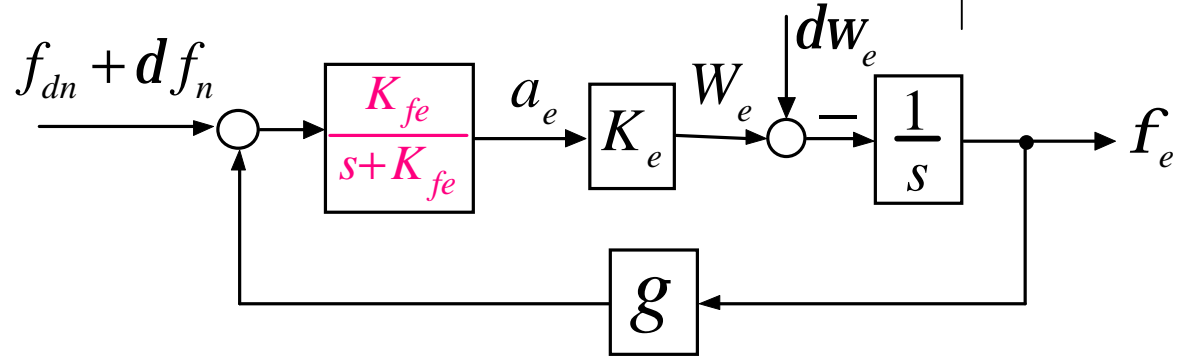
常规校正对准——对准方法的描述



$$\hat{f}_e = -g f_n + f_{de} + d f_e$$

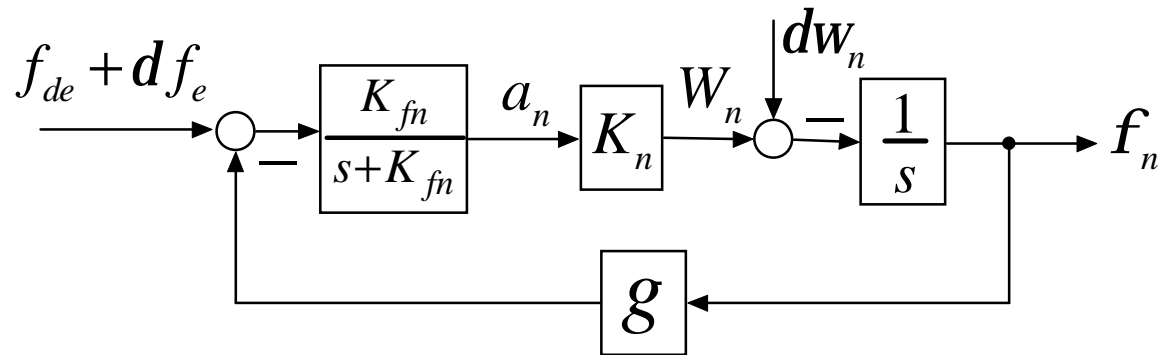
$$\hat{f}_n = g f_e + f_{dn} + d f_n$$

$$\dot{f}_e = -W_{ie} \cos L f_u + W_e - d w_e$$



东向调平回路

如果将上式所表示的加速度计输出，经过一阶数字滤波和加权后构成对准指令信号，便可以画出水平对准回路的原理方框图。



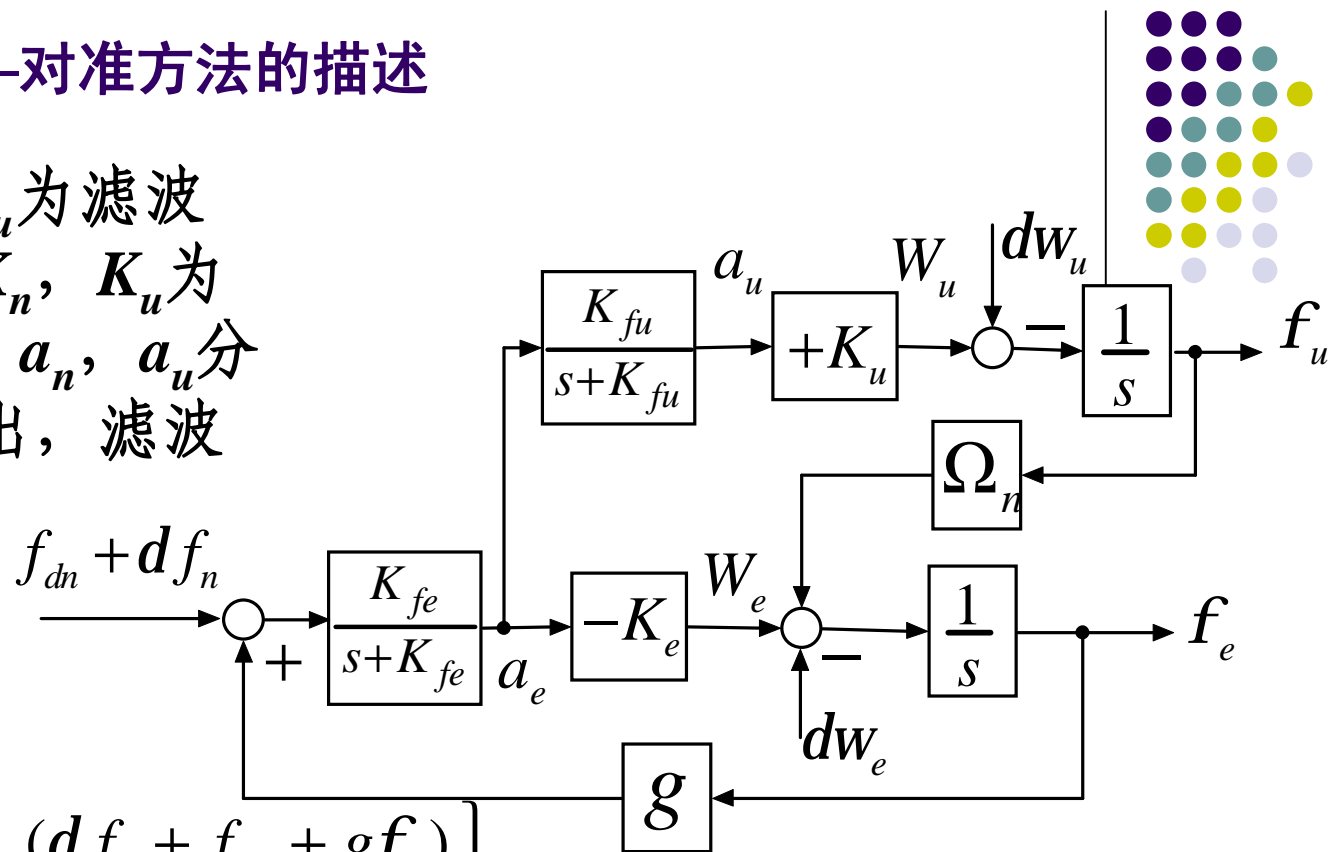
$$\dot{f}_n = W_n - d w_n$$

北向调平回路



常规校正对准——对准方法的描述

图中 K_{fe} , K_{fn} , K_{fu} 为滤波器的参数, K_e , K_n , K_u 为加权系数。取 a_e , a_n , a_u 分别表示滤波器输出, 滤波器方程为



$$\dot{\delta}_e = -K_{fe} a_e + K_{fe} (df_n + f_{dn} + gf_e)$$

$$\dot{\delta}_n = -K_{fn} a_n + K_{fn} (df_e + f_{de} - gf_n)$$

$$\dot{\delta}_u = -K_{fu} a_u + K_{fu} a_e$$

方位对准回路

不难看出, 所述捷联式惯导系统的精对准原理与平台式惯导系统的对准类似, 可以借用平台惯导对准的一些概念来分析捷联惯导对准回路的设计问题。



6.3.2.2 调平回路的设计



由于北向调平回路与东向调平回路的结构完全相同，在分析水平对准回路设计原理时，可以北向调平回路为对象进行研究。

北向调平回路的微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_n \\ \dot{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_n \\ -K_{fn}g & -K_{fn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_n \\ K_{fn}(df_e + f_{de}) \end{bmatrix}$$

回路的特征方程式为

$$s^2 + K_{fn}s + gK_nK_{fn} = 0$$

$$s^2 + 2xw_n s + w_n^2 = 0$$

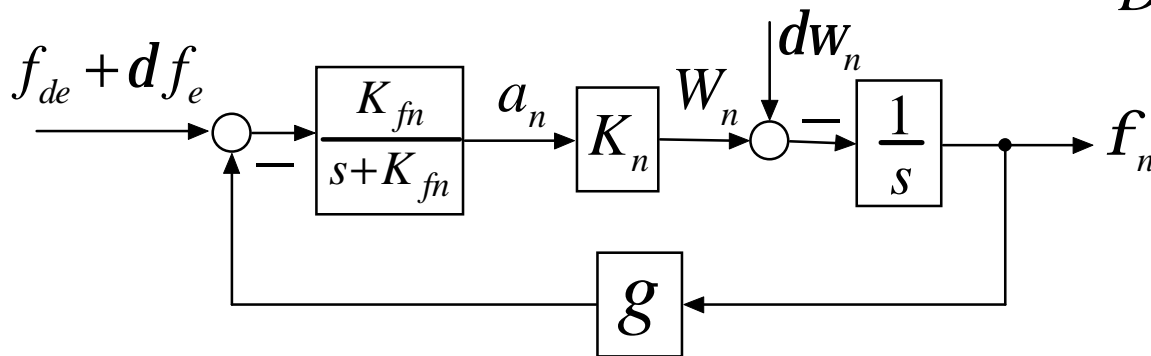
式中 x —阻尼比， w_n —回路的无阻尼自然频率，定义下列设计参数

$$x = \frac{K_{fn}}{2\sqrt{gK_nK_{fn}}}$$

$$t = \frac{3}{xw_n} = \frac{6}{K_{fn}}$$

$$w_n = \sqrt{gK_nK_{fn}}$$

$$D = \frac{f_{nss}}{dw_n} = \frac{K_{fn}}{gK_nK_{fn}} = \frac{1}{gK_n}$$



2010-04-23

D —稳态偏差与陀螺漂移之比， t —调整时间



调平回路的设计

假设受阵风、浪、装载等干扰作用的影响，载体的正弦形晃动为

$$q(t) = q_0 \sin w_d t$$

式中 q_0 为晃动的振幅[度]， w_d 为频率[弧度/秒]。若惯性测量装置距**摇摆中心**高度为 h [厘米]，则作用在加速度计输入端的干扰加速度 f_d 的幅值为

$$F_d = h q_0 w_d^2$$

以 $f_d(s)$ 为输入量，以 $f(s)$ 为输出量的传递函数

$$\frac{f(s)}{f_d(s)} = \frac{K_v}{s^2 + K_{fn}s + gK_v}$$

$$K_v = K_{fn} K_n$$

$$f(s) = \frac{F_d K_v w_d}{(s^2 + K_{fn}s + gK_v)(s^2 + w_d^2)}$$



调平回路的设计

$$f(s) = \frac{F_d K_v w_d}{(s^2 + K_{fn} s + g K_v)(s^2 + w_d^2)}$$



对上式求拉氏逆变换可得由干扰加速度所引起的失准角为

$$f(t) = \frac{F_d K_v w_d}{\sqrt{(g K_v - w_d^2)^2 + K_{fn}^2 w_d^2}} \left[\frac{1}{w_d} \sin(w_d t - l) + \frac{1}{\sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}}} e^{-(K_{fn}/2)t} \sin(\sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}} t - m) \right]$$

$$l = \tan^{-1} \frac{K_{fn} w_d}{g K_v - w_d^2}$$

$$m = \tan^{-1} \frac{K_{fn} \sqrt{g K_v - \frac{K_{fn}^2}{4}}}{\frac{K_{fn}^2}{4} - g K_v + w_d^2}$$

具体设计中，一般 $g K_v$ 比 w_d^2 小一个数量级。为了简化分析，可将 $g K_v$ 作为二阶微量予以忽略。由此可求得由干扰加速度所引起的失准角的幅值为

$$N_L = \frac{3600 K_v q_0 h w_d^2}{w_d \sqrt{w_d^2 + K_{fn}^2}} \quad \text{[角秒]}$$

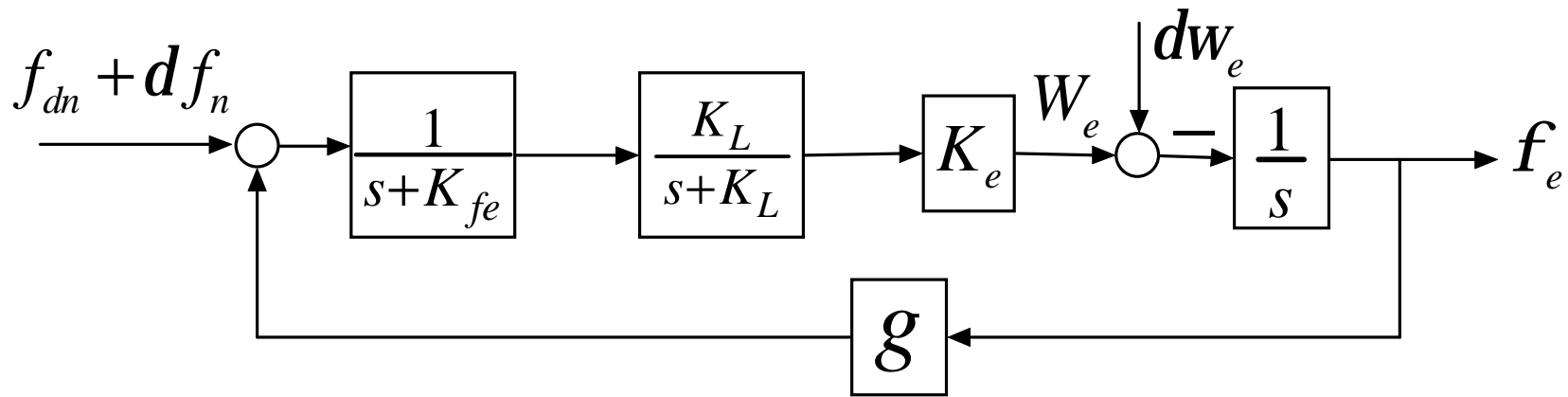
对于 $w_d \gg K_{fn}$

$$N_L = 3600 K_v q_0 h \text{ [角秒]}$$

改进的北向调平回路原理方块图



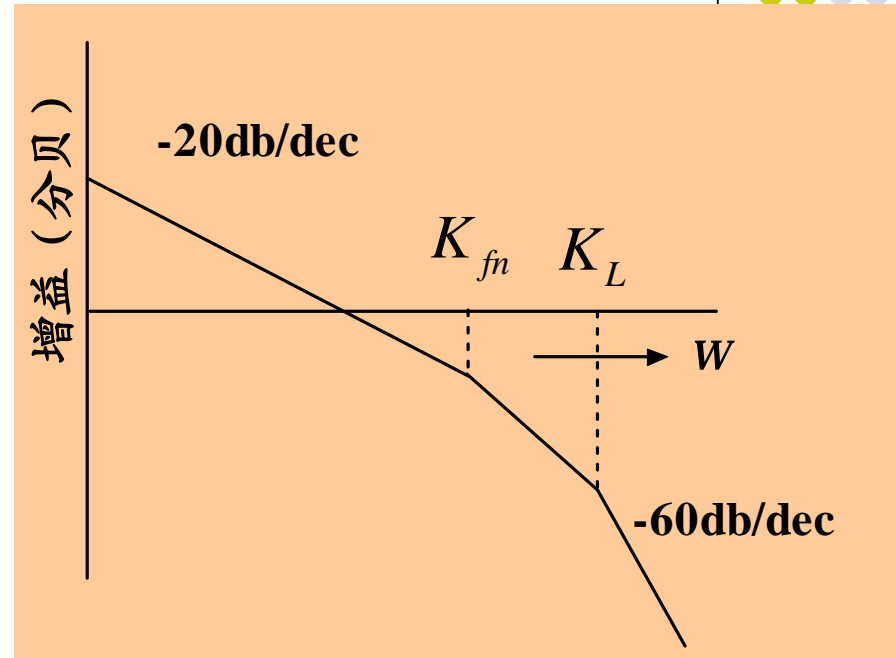
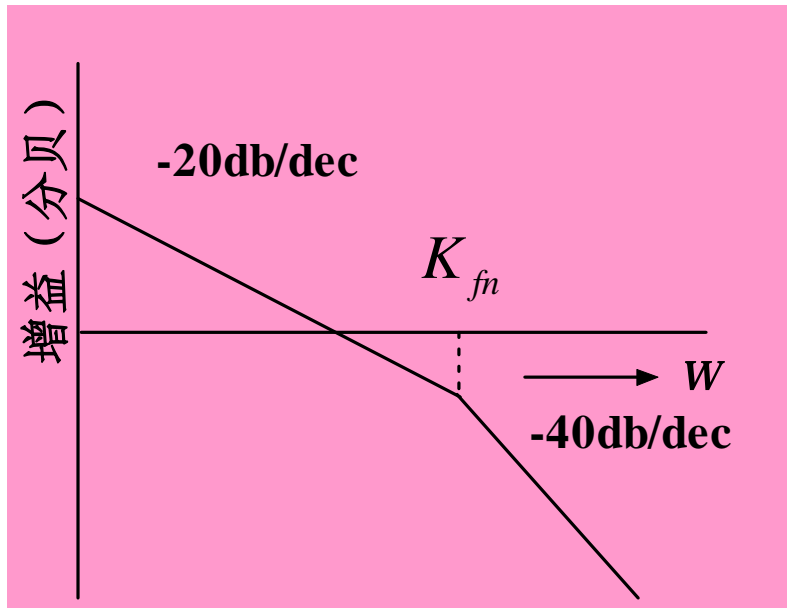
这里有4个待求的参数 (D_L , t_L , x_L 和 N_L)，但只有2个量 (K_{fn} 和 K_v)可供选择。设计步骤是从获得满意瞬态响应选择 K_{fn} 和 K_v 。然而这个响应常常是不够理想的，因为还希望 N_L 和 D_L 尽可能小。一旦选出合适的瞬态响应，要通过改变伯德图或根轨迹图来减小 D_L 和 N_L ，但它对确定 t_L 和 x_L 的一对主要极点的影响应当减至最小。此外，为了进一步衰减载体摇晃运动的影响，还可以在前向回路中附加一个滤波器，其交接频率高出 K_{fn} 十倍频程。



东向调平回路也可按同样方式加以改进



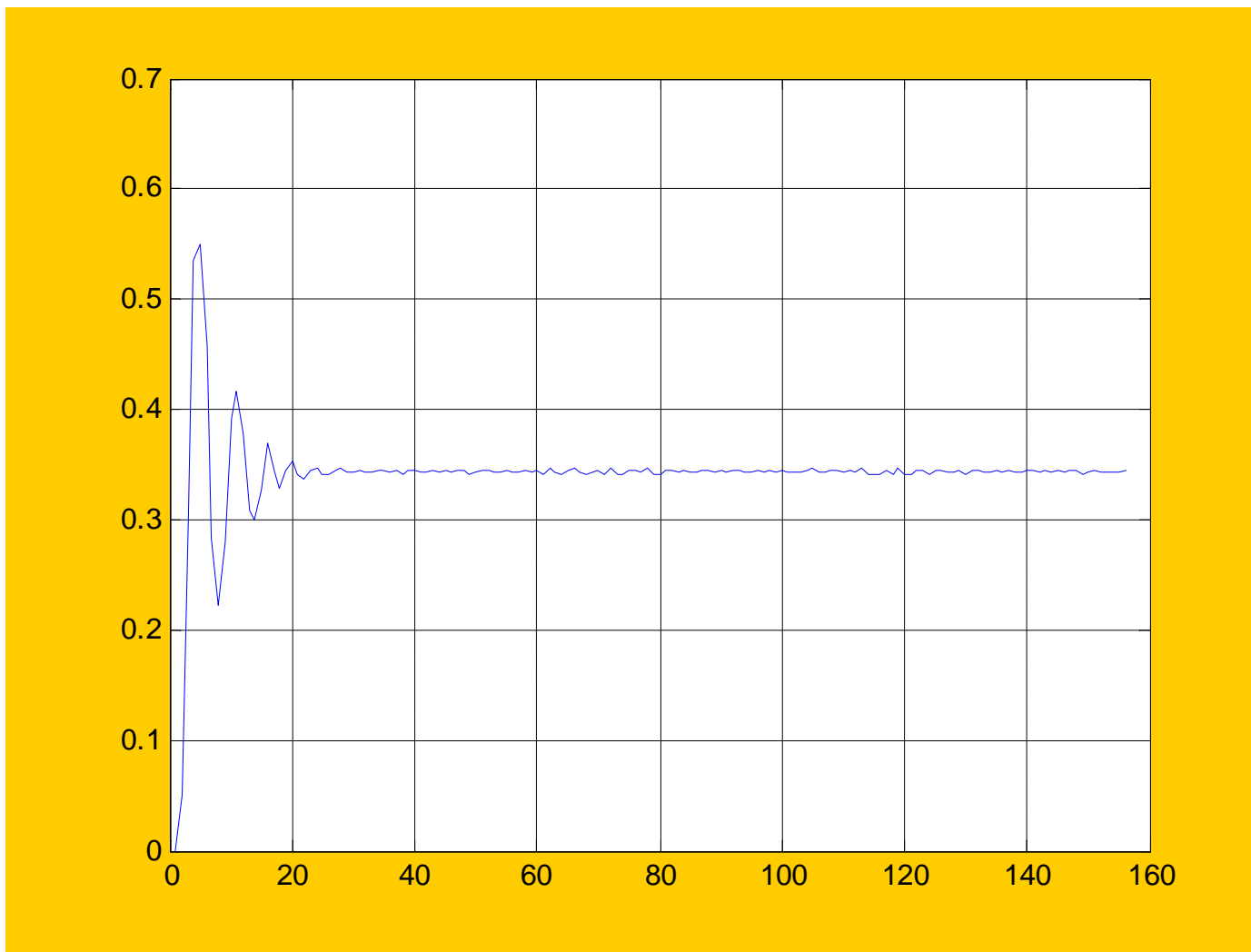
改进前后两种调平回路的伯德图



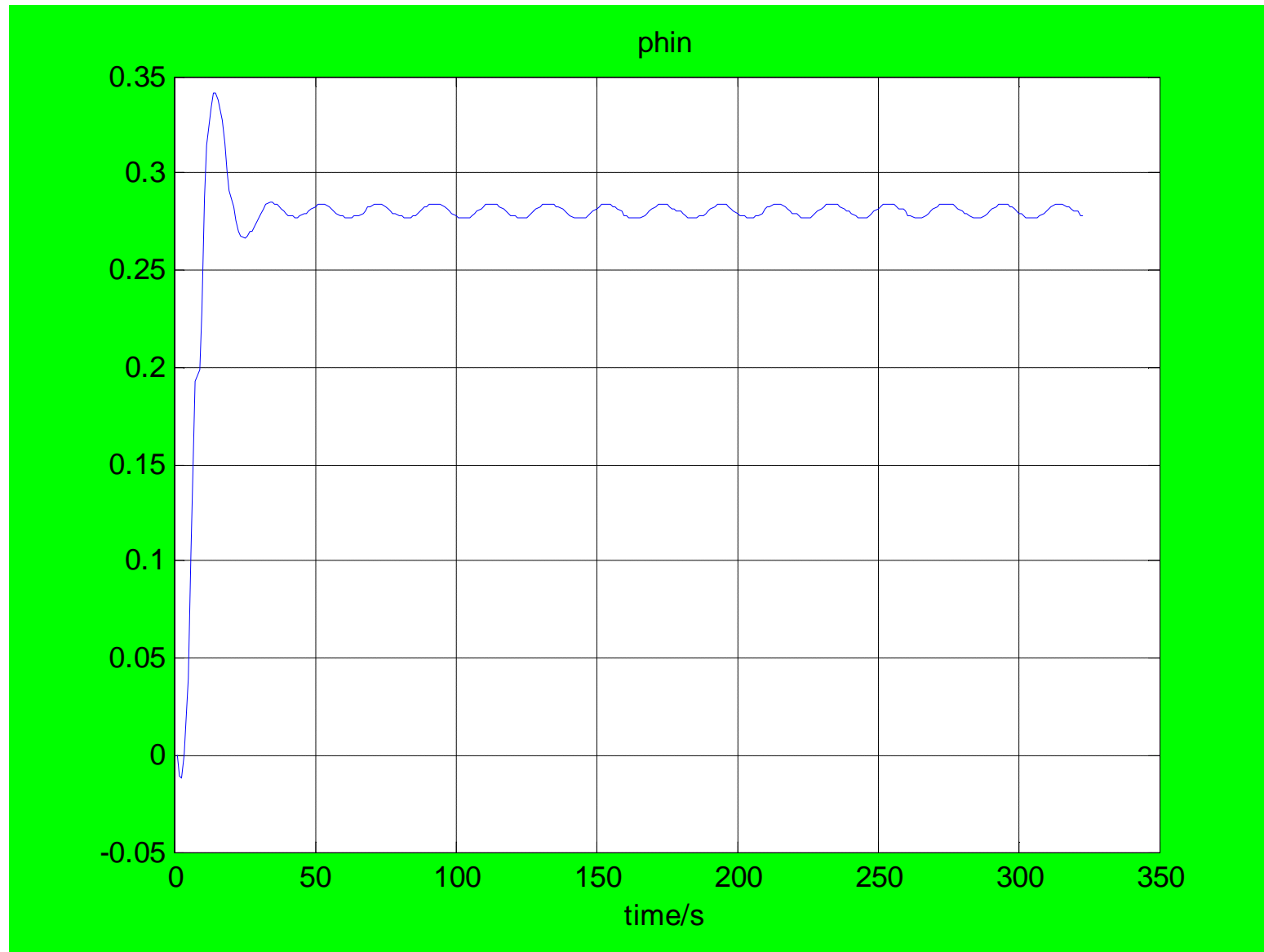
如 K_L 较 K_{fn} 足够高，附加滤波器对瞬态响应的影响不大。



北向调平回路smulink仿真（改进前）



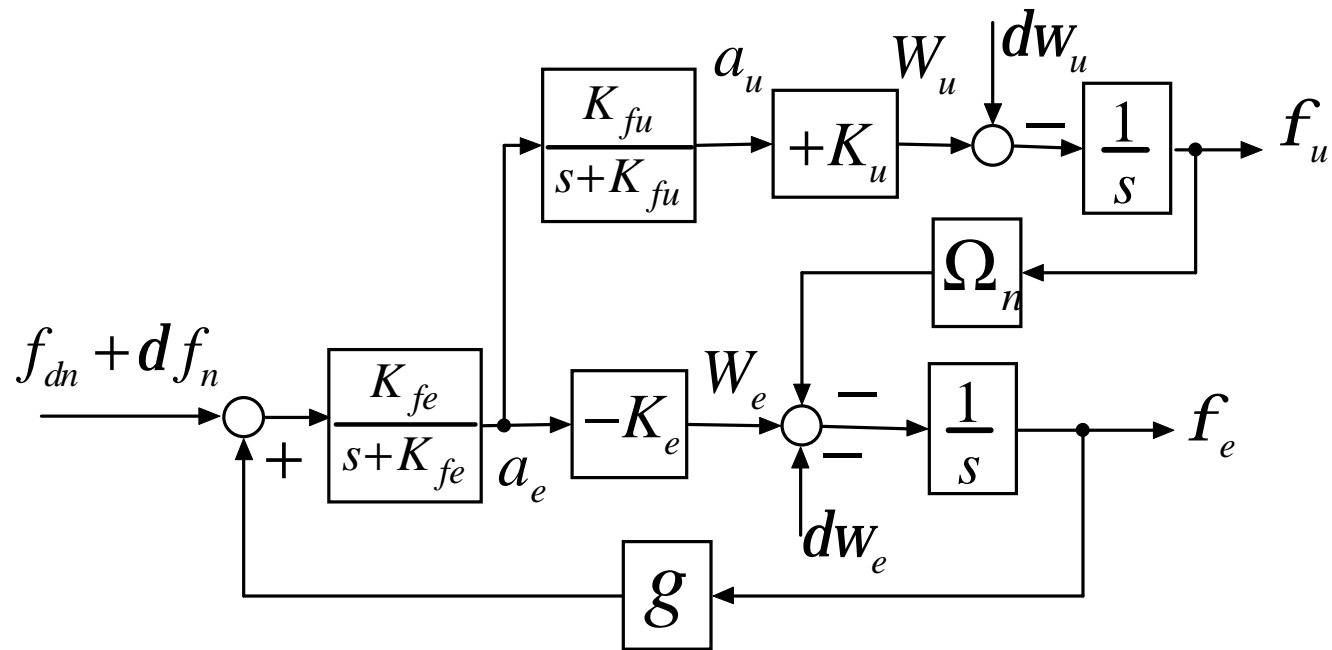
北向调平回路smulink仿真（改进后）



6.3.2.3 方位对准回路的设计及对准精度分析

写出方位对准回路的微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_e \\ \dot{f}_u \\ \dot{a}_e \\ \dot{a}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{ie} \cos L & -K_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_u \\ gK_{fe} & 0 & -K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & K_{fu} & -K_{fu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e \\ f_u \\ a_e \\ a_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_e \\ -dw_u \\ K_{fe}(df_n + f_{dn}) \\ 0 \end{bmatrix}$$



微分方程的特征多项式:



$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & w_{ie} \cos L & K_e & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_u \\ -gK_{fe} & 0 & s + K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fu} & s + K_{fu} \end{vmatrix}$$

$$s^4 + (K_{fu} + K_{fe})s^3 + (K_{fu}K_{fe} + gK_v)s^2 + gK_vK_{fu}s + gK_{fu}K_{fe}K_uw_{ie} \cos L = 0$$

$$s^4 + s^3 * K_{fu} + s^3 * K_{fe} + s^2 * K_{fe} * K_{fu} + g * K_{fe} * w * \cos L * K_u * K_{fu} + g * K_{fe} * s^2 * K_e + g * K_{fe} * s * K_e * K_{fu}$$

$$s^4 + (K_{fu} + K_{fe})s^3 + (K_{fu}K_{fe} + gK_v)s^2 + gK_vK_{fu}s + gK_{fu}K_{fe}K_uw_{ie} \cos L = 0$$

$$K_v = K_{fe}K_e$$

经验证明，如将这个四阶系统视为两个二阶系统的串联，并由此选择系数 K_{fe} ， K_{fu} ， K_u 和 K_e 可得到初始误差角希望的瞬态响应。

$$\Delta(s) = [s^2 + 2\zeta s + (\zeta^2 + w^2)]^2 = (s + \zeta + jw)^2 (s + \zeta - jw)^2$$



方位对准回路的精度分析

$$= s^4 + 4Ss^3 + (6S^2 + 2W^2)s^2 + (4S^3 + 4SW^2)s + (S^4 + 2W^2S^2 + W^4)$$

由二阶系统的最佳控制条件 $S = W$ 得

$$\Delta(s) = s^4 + 4Ss^3 + 8S^2s^2 + 8S^3s + 4S^4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2S \\ K_e &= \frac{2S}{g} \\ K_u &= \frac{S^2}{gW_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} f_e(s) \\ f_u(s) \\ a_e(s) \\ a_u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & W_{ie} \cos L & K_e & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_u \\ -gK_{fe} & 0 & s + K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fu} & s + K_{fu} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_u(0) \\ a_e(0) \\ a_u(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dw_e(s) \\ -dw_u(s) \\ K_{fe}(df_n(s) + f_{dn}(s)) \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



用matlab程序推导，文件为equation6_8691.m



$$[s*(s+Kfe)*(s+Kfu)]$$

$$[g*Kfe*Ku*Kfu]$$

$$[g*Kfe*s*(s+Kfu)]$$

$$[g*Kfe*s*Kfu]$$

式中系数阵的逆是

$$[-w*cosL*(s+Kfe)*(s+Kfu)]$$

$$[s^3+s^2*Kfu+Kfe*s^2+s*Kfe*Kfu+g*Kfe*Ke*s+g*Kfe*Ke*Kfu]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*(s+Kfu)]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*Kfu]$$

$$[-w*cosL*Ku*Kfu-s^2*Ke-s*Ke*Kfu]$$

$$[s*Ku*Kfu]$$

$$[s^2*(s+Kfu)]$$

$$[s^2*Kfu]$$

$$[-w*cosL*Ku*(s+Kfe)]$$

$$[Ku*(s^2+Kfe*s+g*Kfe*Ke)]$$

$$[-g*Kfe*w*cosL*Ku]$$

$$[s^{2010-04-23}(s^2+Kfe*s+g*Kfe*Ke)]$$





$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} f_e(s) \\ f_u(s) \\ a_e(s) \\ a_u(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+K_{fe}) & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos L(s+K_{fe}) & \mathbf{M} & -s(s+K_{fu})K_e & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos LK_u \\ \cdot(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & (s+K_{fu}) & & & \mathbf{M} & -w_{ie} \cos LK_{fu}K_u & \mathbf{M} & (s+K_{fe}) \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fu}K_{fe}K_u & \mathbf{M} & s(s+K_{fe})(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & sK_uK_{fu} & \mathbf{M} & sK_u(s+K_{fe}) \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fe}s(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & -gw_{ie} \cos LK_{fe} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & s^2(s+K_{fu}) & \mathbf{M} & -K_uw_{ie} \cos L \\ \mathbf{LLLL} & & \mathbf{LLLLLL} & & & \mathbf{LLLL} & & & \mathbf{LLL} \\ gK_{fu}K_{fe} & \mathbf{M} & -gw_{ie} \cos LK_{fe}K_{fu} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & s^2K_{fu} & \mathbf{M} & s^2(s+K_{fe}) \\ & & & & & & & & +gK_{fu}K_e s \end{bmatrix}$$





利用终值定理可以求出由传感器偏置引起的失准角稳态误差

$$f_{ess} = \lim_{s \rightarrow 0} s f_e(s)$$

$$f_e(s) = \frac{-w_{ie} \cos L (s + K_{fe})(s + K_{fu})(-dw_u(s)) - [w_{ie} \cos L K_{fu} K_u] K_{fe} (df_n(s) + f_{dn}(s))}{\Delta(s)}$$

$$f_u(s) = \frac{g K_{fu} K_{fe} K_u (-dw_e(s)) + g K_e K_{fe} (s + K_{fu})(-dw_u(s))}{\Delta(s)}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ess} &= \frac{dw_u}{g K_u} - \frac{df_n}{g} \\ f_{uss} &= \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{K_e dw_u}{K_u w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2s \\ K_e &= \frac{2s}{g} \\ K_u &= \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4 = 0$$



$$\left. \begin{aligned} f_{ess} &= \frac{dw_u}{gK_u} - \frac{df_n}{g} \\ f_{uss} &= \frac{dw_e}{w_{ie} \cos L} - \frac{K_e dw_u}{K_u w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right\}$$

适当选择 K_u 和 K_e 的值可使稳态误差主要取决于 df_n/g 及 $dw_e/(w_{ie} \cos L)$ 项。这个结论说明，捷联系统常规对准的精度与平台系统常规对准是一样的。

方位失准角 f_u 对于干扰加速度 f_{dn} 的响应

$$f_u(s) = \frac{sK_u K_{fu} K_{fe} f_{dn}}{\Delta(s)}$$



$$\left\{ \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fu} = 2s \\ K_e &= \frac{2s}{g} \\ K_u &= \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} \end{aligned} \right.$$

为了简化分析，假设 $w=0$ ，即系统特征方程有四个相同的负实根

$$= \frac{s \frac{s^2}{g w_{ie} \cos L} 2s 2s}{(s + s)^4} f_{dn} = \frac{4}{w_{ie} \cos L} \frac{s}{(Ts + 1)^4} \frac{f_{dn}}{g}$$

$$|f_u|_{\max} = \frac{4}{w_{ie} \cos L} \left| \frac{jW_d}{(jW_d T + 1)^4} \right| \frac{F_{dn}}{g}$$



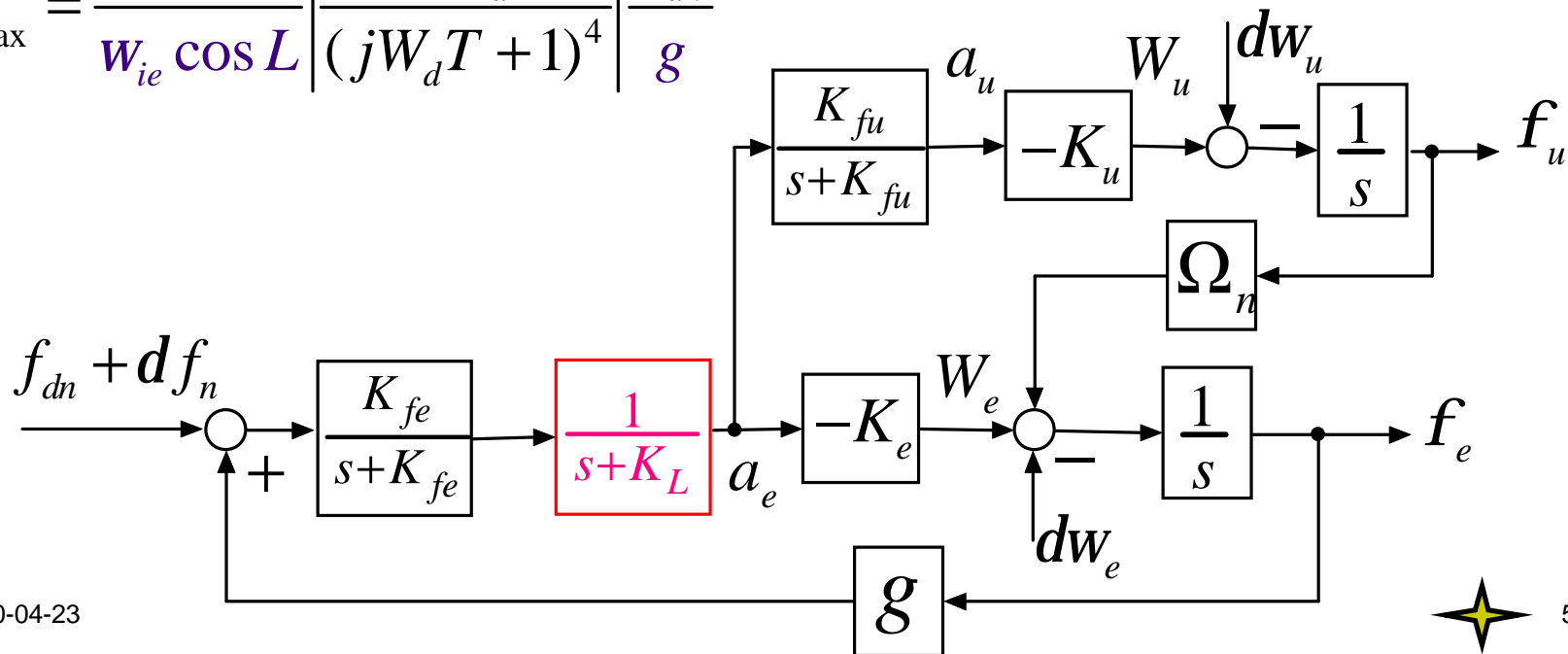
改进的方位对准回路

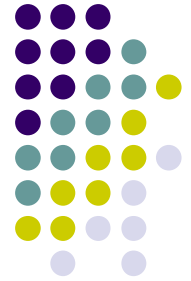


$$= \frac{4}{W_{ie} \cos L} \frac{s}{(Ts + 1)^4} \frac{f_{dn}}{g}$$

式中 $T=1/s$ 是方位对准回路的时间常数。如果正弦形干扰加速度为 $f_{dn} = F_{dn} \sin W_d t$ 则方位角峰值

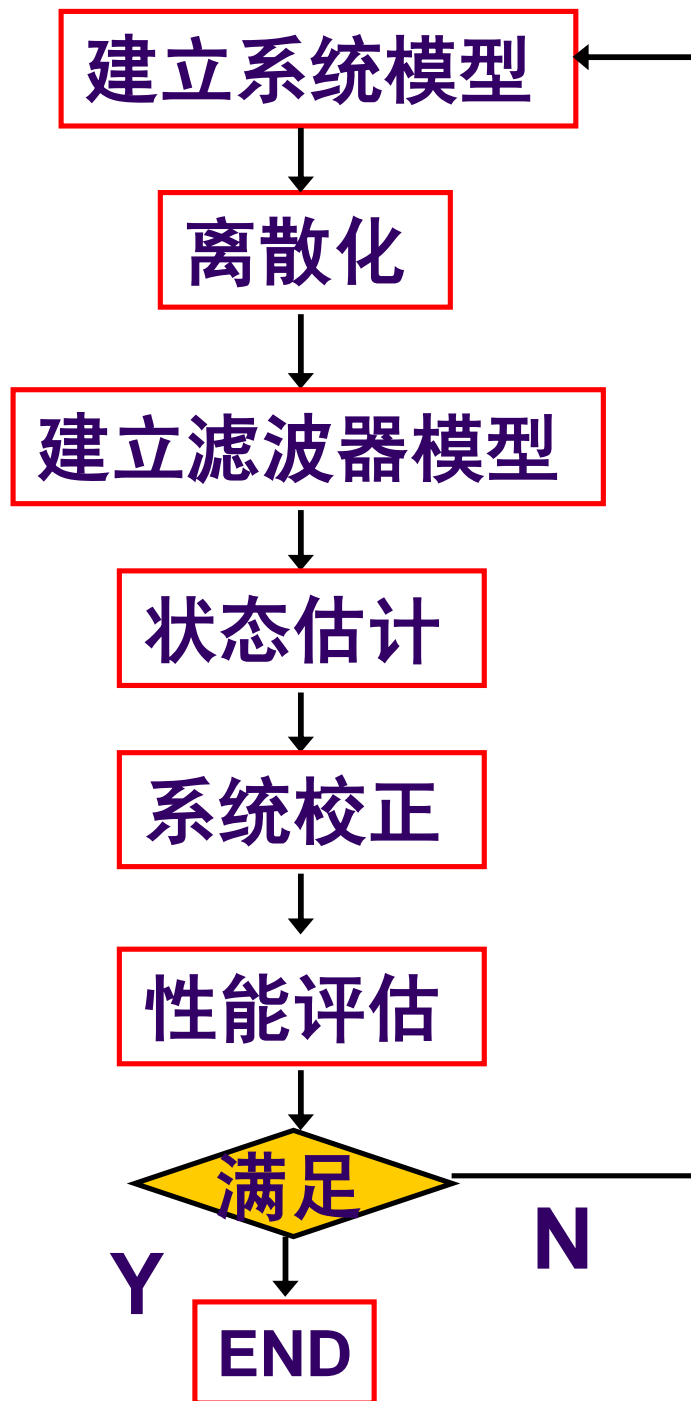
$$|f_u|_{\max} = \frac{4}{W_{ie} \cos L} \left| \frac{jW_d}{(jW_d T + 1)^4} \right| \frac{F_{dn}}{g}$$





6.4 卡尔曼滤波在初始对准中的应用

- | 6.4.1 系统模型
 - | 6.4.1.1 状态方程
 - | 6.4.1.2 量测方程
- | 6.4.2 最优滤波器及计算结果
 - | 6.4.2.1 滤波方程
 - | 6.4.2.2 计算结果
- | 6.4.3 几点看法



利用
卡尔曼滤波器
进行
初始
对准
流程



6.4.1 系统模型

6.4.1.1 状态方程

失准角误差方程

$$\dot{\mathbf{f}} = d\mathbf{w}_{ie}^n + d\mathbf{w}_{en}^n - (\mathbf{w}_{ie}^n + \mathbf{w}_{en}^n) \times \mathbf{f}^n - \mathbf{e}^p$$

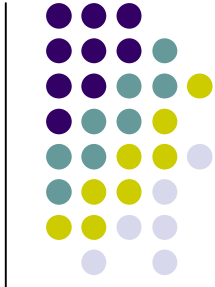
\mathbf{f} 为失准角矢量； \mathbf{e}^p 为等效到平台坐标系上的陀螺漂移

$$\mathbf{w}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{ie} \cos L \\ w_{ie} \sin L \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{求导}} d\mathbf{w}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L \\ w_{ie} \cos L \end{bmatrix} dL$$

$$\mathbf{w}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_n}{R_n} \\ \frac{V_e}{R_e} \\ \frac{V_e}{R_e} \tan L \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{w}_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V_e}{R_e} \sec^2 L \end{bmatrix} dL + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_n} \\ \frac{1}{R_e} & 0 \\ \frac{1}{R_e} \tan L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dV_e \\ dV_n \end{bmatrix}$$



失准角误差方程



$$f^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{ie} \sin L \\ w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e} \sec^2 L \end{bmatrix} dL + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_n} \\ \frac{1}{R_e} & 0 \\ \frac{1}{R_e} \tan L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dV_e \\ dV_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L & -(w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e}) \\ -(w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L) & 0 & -\frac{V_n}{R_n} \\ w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e} & \frac{V_n}{R_n} & 0 \end{bmatrix} f^n - e^p$$



速度误差方程



$$d \dot{V}^n = f^n \times V^n + \nabla^p - (2dw_{ie} + dw_{en}) \times V^n - (2w_{ie} + w_{en}) \times dV^n$$

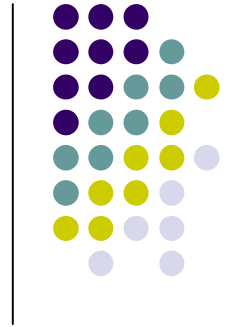
$\tilde{\nabla}^p$ 为等效到平台坐标系上的加速度计偏置

$$d \dot{V}^n = \begin{bmatrix} 0 & -f_u & f_n \\ f_u & 0 & -f_e \\ -f_n & f_e & 0 \end{bmatrix} f^n + \begin{bmatrix} \frac{\tan L}{R_n} V_n - \frac{V_u}{R_e} & 2w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L & -(2w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e}) \\ -2(w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L) & -\frac{V_u}{R_n} & -\frac{V_n}{R_n} \\ 2(w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e}) & 2\frac{V_n}{R_n} & 0 \end{bmatrix} dV$$



位置误差方程

$$\left\{ \begin{array}{l} dL = \frac{dV_n}{R_n} \\ dI = \frac{dV_e}{R_e \cos L} + \frac{V_e}{R_e} \operatorname{tg} L \sec L dL \end{array} \right.$$



失准角误差方程

速度误差方程

位置误差方程

} 系统的动态方程



速度匹配状态方程的建立



选择状态变量

$$\mathbf{X} = [dV_e \quad dV_n \quad f_e \quad f_n \quad f_u \quad \nabla_x \quad \nabla_y \quad e_x \quad e_y \quad e_z]^T$$

式中：

dV_e 是东向速度误差， dV_n 是北向速度误差；

f_e 是东向失准角， f_n 是北向失准角， f_u 是天向失准角；

\tilde{N}_x 是x向加速度计偏置， \tilde{N}_y 是y向加速度计偏置；

e_x 是x向陀螺漂移， e_y 是y向陀螺漂移， e_z 是z向陀螺漂移。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{W}$$

 不同匹配方式有哪些？



状态转移矩阵



$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & -f_u & f_n & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & f_u & 0 & -f_e & c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_n} & 0 & F_{34} & F_{35} & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \frac{1}{R_e} & 0 & F_{43} & 0 & -\frac{V_n}{R_n} & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ \frac{\tan L}{R_e} & 0 & F_{53} & \frac{V_n}{R_n} & 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵中的元素

$$F_{11} = \frac{V_n}{R_n} \tan L - \frac{V_u}{R_e} \quad F_{12} = 2w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L$$

$$F_{21} = -2(w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L) \quad F_{22} = -\frac{V_u}{R_n}$$

$$F_{34} = w_{ie} \sin L + \frac{V_e}{R_e} \tan L \quad F_{35} = -(w_{ie} \cos L + \frac{V_e}{R_e})$$

$$F_{43} = -F_{34} \quad F_{53} = -F_{35}$$

C_{ij} 为 C_b^n 中的元素

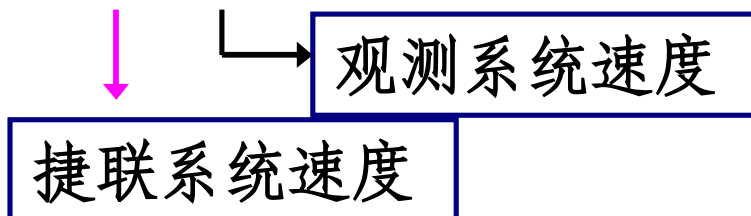




6.4.1.2 量测方程

以速度为观测量的量测方程为

$$Z_v = \begin{bmatrix} V_{se} - V_{oe} \\ V_{sn} - V_{on} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dV_{se} - dV_{oe} \\ dV_{sn} - dV_{on} \end{bmatrix} = H_v X + w_v$$



$$H_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

w_v 为观测噪声。



6.4.2 最优滤波器及计算结果

离散卡尔曼滤波方程为

$$\hat{\mathbf{X}}(t_i, t_{i-1}) = \mathbf{F}(t_i, t_{i-1})\hat{\mathbf{X}}(t_{i-1})$$

$$\hat{\mathbf{X}}(t_i) = \hat{\mathbf{X}}(t_i, t_{i-1}) + \mathbf{K}(t_i)[\mathbf{Y}(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\hat{\mathbf{X}}(t_i, t_{i-1})]$$

$$\mathbf{K}(t_i) = \mathbf{P}(t_i, t_{i-1})\mathbf{H}^T(t_i) + [\mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}(t_i, t_{i-1})\mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i)]^{-1}$$

$$\mathbf{P}(t_i, t_{i-1}) = \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{P}(t_i)\Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \mathbf{G}(t_{i-1})\mathbf{Q}(t_{i-1})\mathbf{G}^T(t_{i-1})$$

$$\mathbf{P}(t_i) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_i)\mathbf{H}(t_i)]\mathbf{P}(t_i, t_{i-1})$$

$\hat{\mathbf{X}}(t_i)$ ——在给出测量值 $\{\mathbf{Y}(t_1), \dots, \mathbf{Y}(t_i)\}$ 后， $\mathbf{X}(t_i)$ 的最优估计值

$\hat{\mathbf{X}}(t_i, t_{i-1})$ —— t_i 时刻状态的预测值

$\mathbf{K}(t_i)$ ——卡尔曼滤波在 t_i 时刻的最佳增益阵

$\mathbf{P}(t_i)$ —— t_i 时刻状态估计误差的协方差阵

$\mathbf{P}(t_{i-1}, t_i)$ —— t_i 时刻预测误差的协方差阵



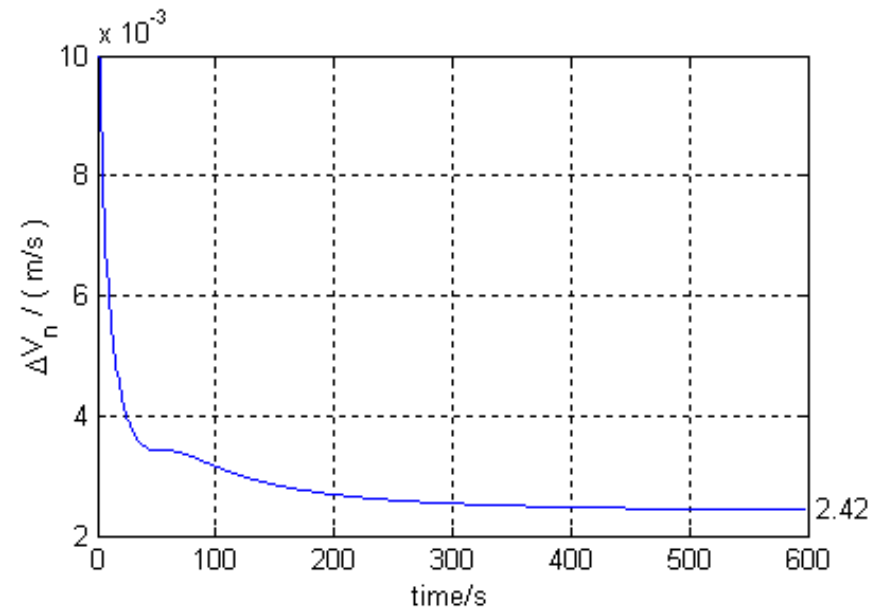
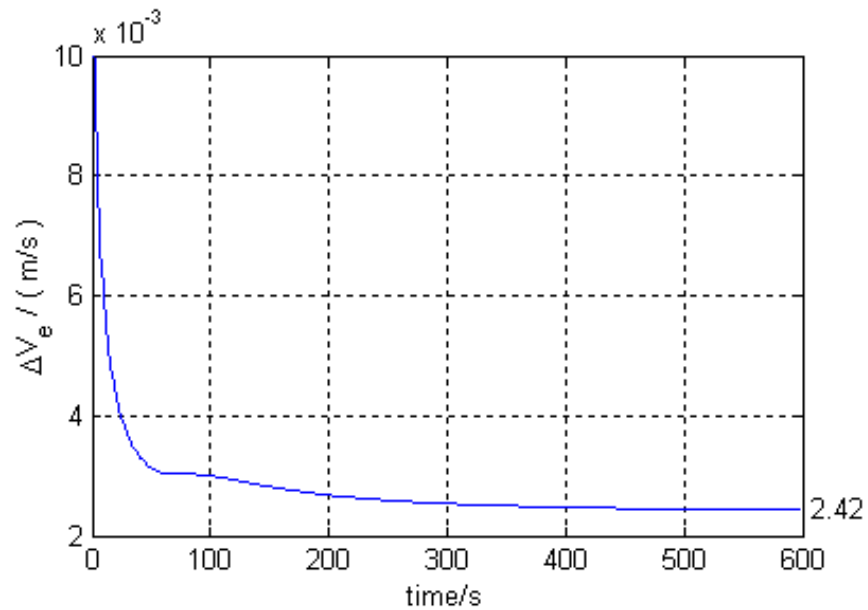
6.4.2 最优滤波器及计算结果

滤波器初值的选取

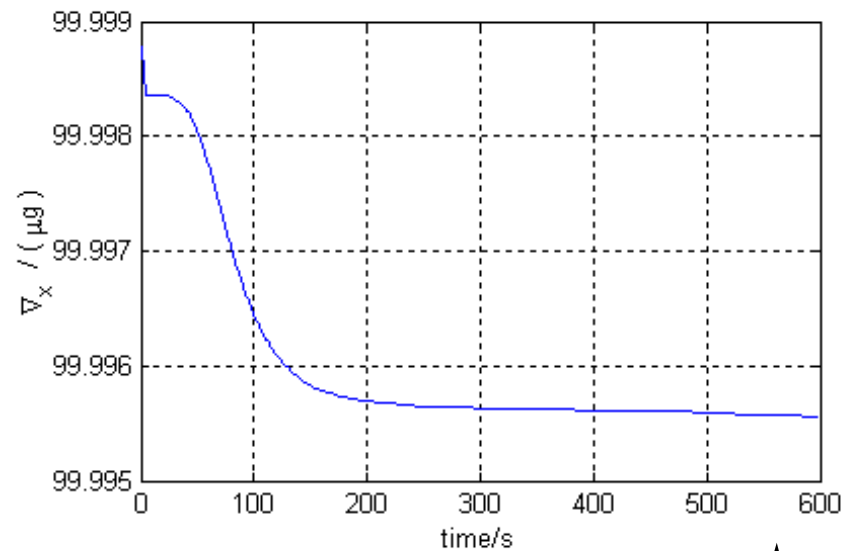
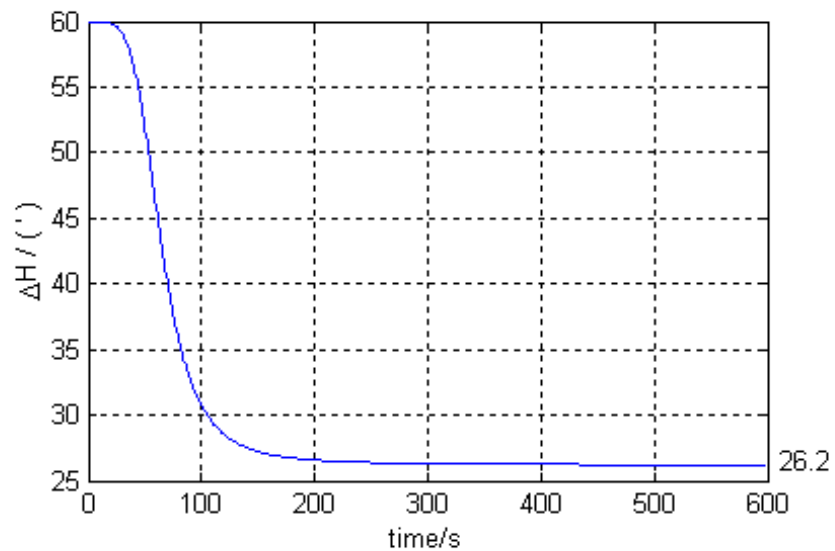
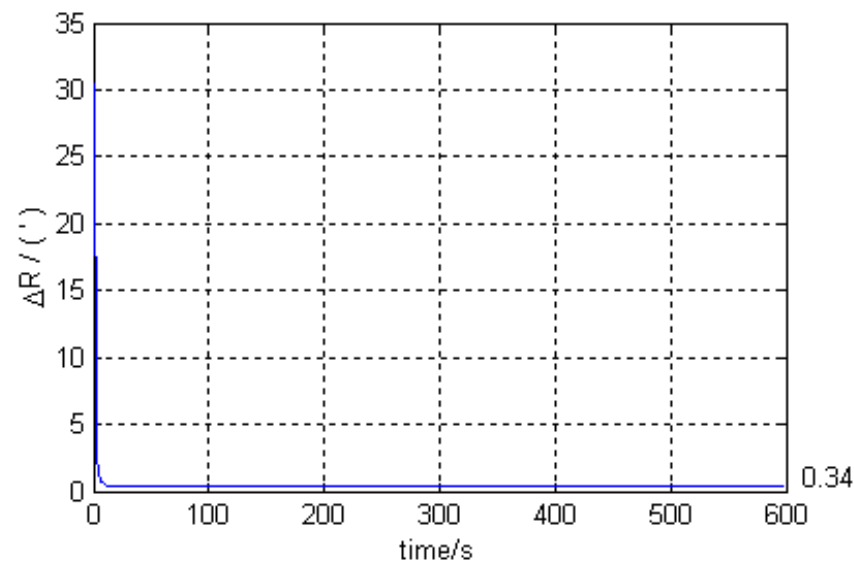
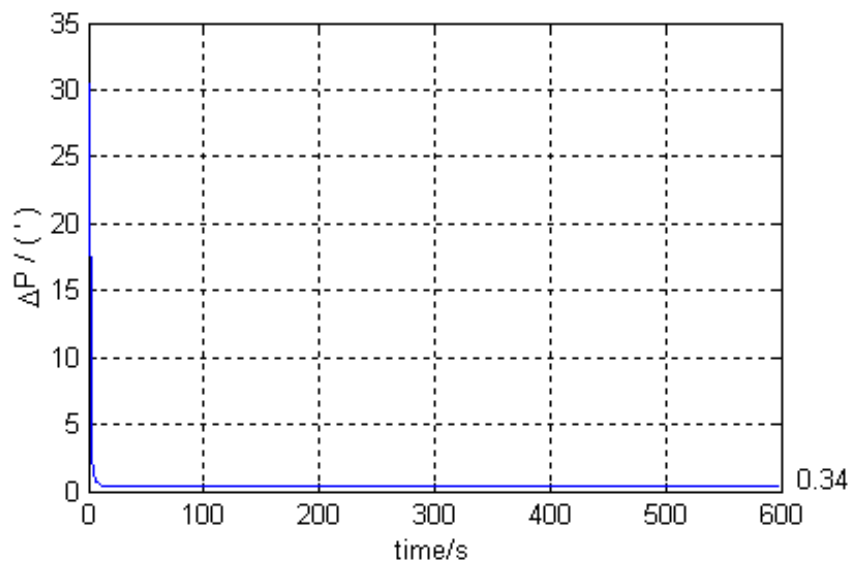
$$P(0) = \text{diag}\{(0.1\text{m/s})^2, (0.1\text{m/s})^2, (1^\circ)^2, (1^\circ)^2, (1^\circ)^2, (100\text{mg})^2, (100\text{mg})^2, \\ (0.1^\circ/\text{h})^2, (0.1^\circ/\text{h})^2, (0.1^\circ/\text{h})^2\}$$

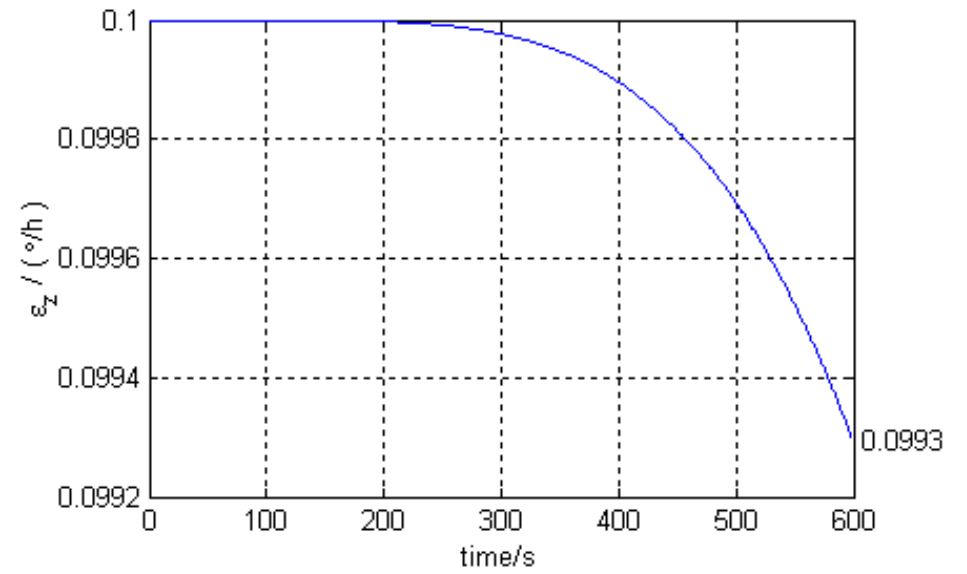
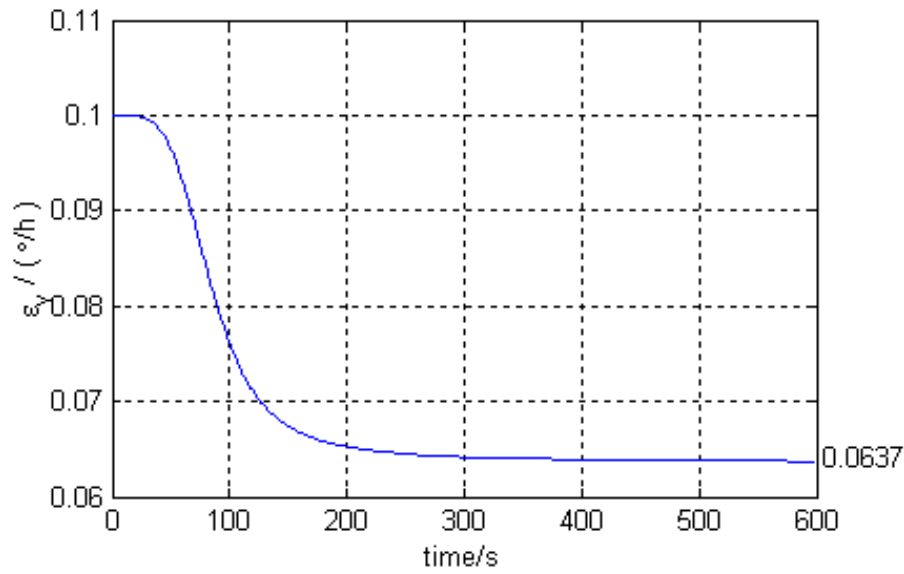
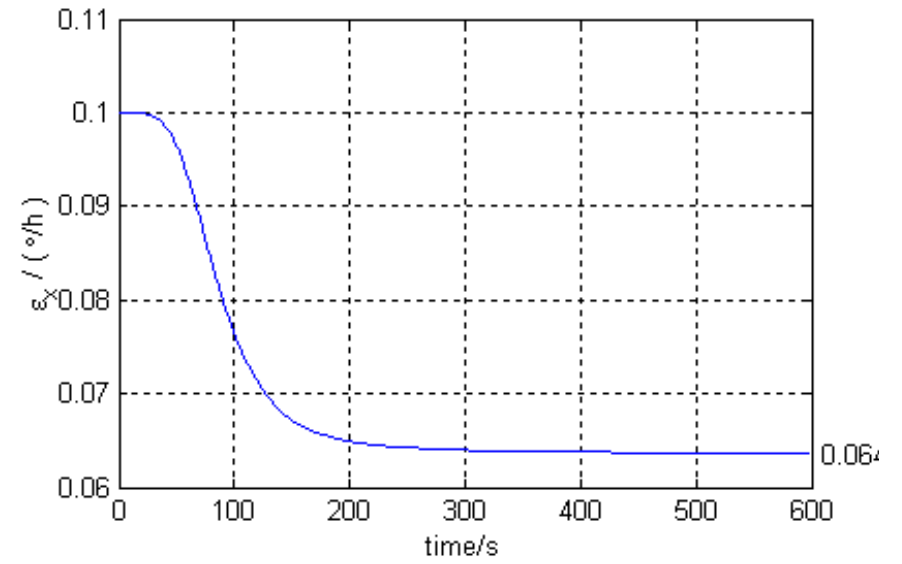
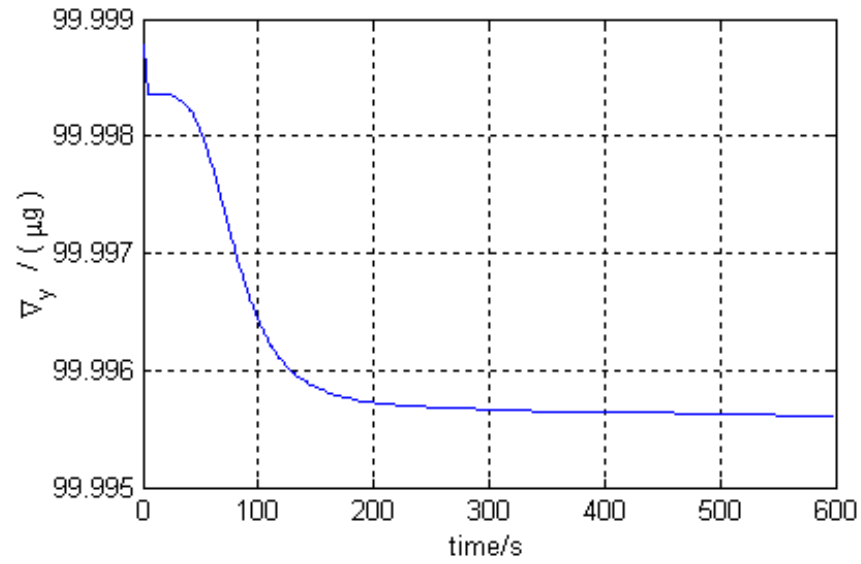
$$Q(0) = \text{diag}\{(50\text{mg})^2, (50\text{mg})^2, (0.1^\circ/\text{h})^2, (0.1^\circ/\text{h})^2, (0.1^\circ/\text{h})^2, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R(0) = \text{diag}\{(0.01\text{m/s})^2, (0.01\text{m/s})^2\}$$



状态估计误差协方差曲线



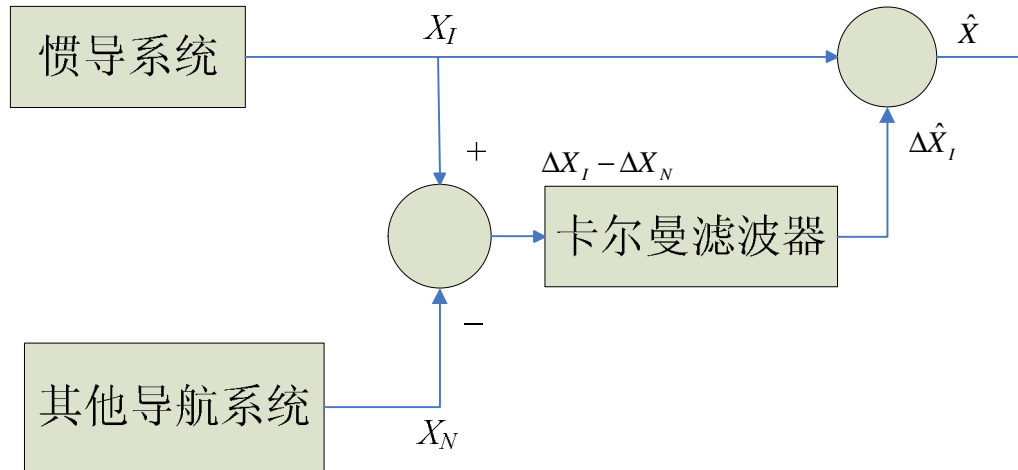


2010-04-23



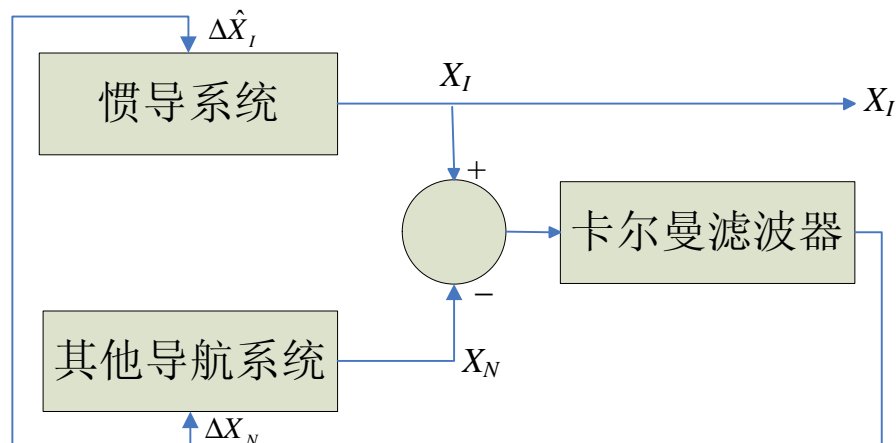
校正方法

输出校正 反馈校正



所谓输出校正，就是用导航参数误差的估值 $\Delta \hat{X}$ 去校正系统输出的导航参数，得到导航系统的导航参数估值 \hat{X}

反馈校正



采用反馈校正的间接法估计是将惯导系统导航参数误差 ΔX_I 的估值 $\Delta \hat{X}_I$ 反馈到惯导系统内，对误差状态进行校正。

根据误差状态的性质，反馈校正分为3种，即脉冲校正（对速度误差和位置误差等的校正）、速率校正（对平台误差角的校正）和补偿校正（对惯性仪表误差的校正）。速率校正是对误差状态按速率形式进行校正，例如对平台误差角按施矩量进行校正，则校正需要持续一段时间才能完成。但一般持续时间短，故可近似作为脉冲校正对待。

2010-04-28 对捷联系统而言，因为是数字校正姿态误差角的校正也是脉冲校正 75



思考题

- 1、推导静基座解析粗对准算法。
- 2、编写静基座解析粗对准仿真程序并说明其对准与哪些因素有关。（提示：请考虑传感器误差）