

基于非线性滤波的初始对准研究

王军厚

2011年4月

Research on Initial Alignment Based on Nonlinear Filters

Candidate: Wang Junhou

Supervisor: Prof. Chen Jiabin

Department: Beijing Institute of Technology

Date:

基于非线性滤波的初始对准研究

北京理工大学

研究成果声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是我本人在指导教师的指导下进行的研究工作获得的研究成果。尽我所知，文中除特别标注和致谢的地方外，学位论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京理工大学或其它教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的合作者对此研究工作所做的任何贡献均已在学位论文中作了明确的说明并表示了谢意。

特此申明。

签 名： 日期：

关于学位论文使用权的说明

本人完全了解北京理工大学有关保管、使用学位论文的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交学位论文的原件与复印件；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存学位论文；③学校可允许学位论文被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换学位论文；⑤学校可以公布学位论文的全部或部分内容（保密学位论文在解密后遵守此规定）。

签 名： 日期：

导师签名： 日期：

摘要

随着捷联惯导系统初始对准对精度和实时性要求日益提高，非线性滤波技术越来越受重视。本文对几种典型的非线性滤波方法从理论上进行了较为深入的研究，针对其中的不足提出了改进方案，并将它们应用于晃动基座下的初始对准中。

首先介绍捷联惯导系统基本原理，推导了捷联惯导系统的更新方程和误差模型，总结了晃动基座下初始对准的状态方程和测量方程；介绍了初始对准基本原理，详细介绍了惯性凝固粗对准法，并仿真验证了该算法在晃动基座下仍能满足精对准的要求。

讨论了三种典型的 Sigma 点卡尔曼滤波算法：二阶分开插值滤波、无轨迹卡尔曼滤波和容积卡尔曼滤波，仿真结果表明相同条件下三者精度和收敛时间相当，仿真耗时上依次减少。针对噪声统计特性未知或不准确导致无轨迹卡尔曼滤波性能下降，应用带噪声统计估计器的自适应无轨迹卡尔曼滤波算法，解决晃动基座下初始对准的问题，仿真结果表明该自适应无轨迹卡尔曼滤波比标准的无轨迹卡尔曼滤波收敛时间快，对准精度高。针对过程噪声统计特性未知或不准确的情况提出了自适应分裂合并无轨迹高斯和滤波算法，仿真表明由于方位失准角的估计上的良好性能该算法总体性能优于标准的无轨迹卡尔曼滤波。

介绍了 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波的推导过程，详细分析了 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波与标准无轨迹卡尔曼滤波算法之间的相互关系，详细推导了 H_{∞} 无轨迹信息滤波，得到 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波的平滑算法。应用 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波和平滑算法解决晃动基座的恶劣条件下系统噪声不确定性问题，仿真结果表明该算法牺牲水平对准精度，使方位对准精度得到提高、收敛速度快，鲁棒性好。针对 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波的不足，推导了混合滤波算法，仿真结果表明该算法提高了水平失准角的估计精度，方位失准角估计精度相当。

介绍了高斯粒子滤波，针对蒙特卡罗采样的缺点提出了随机化拟蒙特卡罗高斯粒子滤波算法，仿真表明该算法比无轨迹卡尔曼滤波、高斯粒子滤波对准精度高，收敛速度快。为提高滤波算法的实时性，采用容积卡尔曼滤波代替无轨迹卡尔曼滤波来获取高斯粒子滤波的重要性函数，得到容积高斯粒子滤波，仿真结果表明该算法比高斯粒子滤波计算复杂度低，对准精度高、收敛快，滤波性能优于无轨迹卡尔曼滤波，但

比其耗时。

选取无轨迹卡尔曼滤波、 H_{∞} 无轨迹混合滤波、自适应分裂合并无轨迹高斯和滤波、容积高斯粒子滤波和惯性凝固粗对准方法，进行干扰车载基座的初始对准试验研究。实际试验表明干扰条件下，惯性凝固粗对准方法优于 3 中解析式粗对准法；在精对准上，自适应分裂合并无轨迹高斯和滤波和容积高斯粒子滤波的单位位置重复精度、收敛速度、对干扰的抑制均优于无轨迹卡尔曼滤波， H_{∞} 无轨迹混合滤波收敛快，抑制干扰快，但方差较大。

关键词：捷联惯导系统；初始对准；Sigma 点卡尔曼滤波；无轨迹卡尔曼滤波； H_{∞} 滤波；高斯粒子滤波

Abstract

The initial alignment of the Strapdown Inertial Navigation System (SINS) is enhancing the requirement of precision and real-time characteristic. Many researchers pay more and more attention to the nonlinear filter technology to solve the problem above. Several typical nonlinear filters are studied in this paper. The improvements are proposed for their shortage, and are applied for the initial alignment on the swaying base.

Basic principles of SINS are introduced, and then renewal equations and the error model of SINS are deduced. The state and measurement equations for nonlinear filters are concluded. The basic principles of the initial alignment are introduced, and the inertial concreted coarse alignment is introduced detailedly, the simulation results demonstrate this coarse alignment guarantees the accurate alignment that follows.

Three typical Sigma Point Kalman Filters (SPKF) are discussed: Divided Difference Filter, Unscented Kalman Filter (UKF), Cubature Kalman Filter (CKF). The simulation results show that under the same conditions precision and convergence time of the three filters are equal, and consuming time of the three filters are reduced respectively. For the problem that the accuracy of the conventional UKF declines and further diverges when the prior noise statistic is unknown or inaccurate, an adaptive UKF with noise statistic estimator is applied to solve the problem of the initial alignment on the swaying base. The simulation results demonstrate that compared with the conventional UKF this filter gets shorter convergence time and higher alignment precision. For the problem the state noise statistic is unknown or inaccurate, an Adaptive Split and Merge Unscented Gaussian Sum Filter (ASMUGSF) is proposed. The simulation results demonstrate that the total performance is better than that of the conventional UKF, because the estimation of the azimuth misalignment angle is much preciser than that of the conventional UKF.

The H_∞ UKF is derived and the relation between the H_∞ UKF and the UKF is analysed detailedly. The H_∞ Unscented Information Filter is deduced detailedly, and therefore the Sigma Point Smoothing of the H_∞ UKF is got. The H_∞ UKF with the Sigma Point Smoothing is applied to solve the problem of the initial alignment on the swaying base. The simulation results demonstrate that the precision of the azimuth misalignment angle is enhanced and the convergence time is reduced with the slight increase of the estimation error of the level misalignment angles. The robustness of the filter is good. The

UKF/ H_∞ UKF mixed filter is deduced for its shortage. The simulation results demonstrate that the mixed H infinity filter (H_∞ filter) has better estimation of level misalignment angles than H_∞ UKF, and has equal estimation of the azimuth misalignment angle.

The Gaussian Particle Filter (GPF) is introduced. For the shortage of this filter Randomized Quasi Monte Carlo-Gaussian Particle Filter is proposed. The simulation results demonstrate that the precision is better and the convergence time is shorter than those of the UKF and the GPF. In order to enhance the real-time characteristic of the GPF, the CKF is used to get the importance function of the GPF instead of the UKF, and therefore the Cubature Gaussian Particle Filter is proposed. The computational complexity of the new filter is lower, the precision is better and the convergence time is shorter than those of the GPF. The filtering characteristic is better than that of the UKF, but the computational time is longer.

The UKF, UKF/ H_∞ UKF, ASMUGSF, and CGPF with the inertial concreted coarse alignment are applied into the real initial alignment experiment on the vehicular base with disturbance. Compared with three analytic coarse alignment methods, the inertial concreted coarse alignment still gets much higher precision for data with disturbance. In the convergence speed, repeatable precision, reducing effect of disturbance, the ASMUGSF and CGPF has better performance than UKF. The UKF/ H_∞ UKF has good convergence in the first 50s, can evidencely reduce effect of disturbance. But after the first 50s, the variance of UKF/ H_∞ UKF becomes large.

Key Words: SINS; initial alignment; SPKF; UKF; H_∞ filter; GPF

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 本论文研究的目的和意义	1
1.2 捷联惯导系统发展概况	2
1.2.1 捷联惯导系统发展概况	2
1.2.2 捷联惯导系统初始对准技术	3
1.3 估计理论的发展历程	5
1.4 非线性滤波理论的现状	6
1.4.1 递归贝叶斯估计	6
1.4.2 基于函数线性化近似的滤波方法	7
1.4.3 基于统计线性化理论的滤波方法	8
1.4.4 基于蒙特卡罗仿真的滤波算法	9
1.4.5 H_{∞} 非线性滤波算法	10
1.5 非线性滤波在初始对准中的应用	10
1.6 本文的主要研究内容	11
第 2 章 捷联惯导系统及初始对准基本原理	13
2.1 引言	13
2.2 捷联惯导系统的更新方程	13
2.2.1 坐标系说明	14
2.2.2 符号说明	15
2.2.3 姿态矩阵定义	16

2.2.4 姿态更新算法	17
2.2.5 速度更新算法	19
2.2.6 位置更新算法	20
2.3 捷联惯导系统的误差方程	21
2.3.1 姿态误差方程	21
2.3.2 速度误差方程	23
2.3.3 初始对准的非线性状态方程及测量方程	23
2.4 初始对准基本原理	24
2.4.1 粗对准	25
2.4.2 精对准	29
2.5 初始对准仿真方案	30
2.5.1 总体仿真方案	30
2.5.2 晃动基座的仿真	31
2.5.3 惯性器件的误差仿真	31
2.5.4 滤波器初始值	32
2.6 本章小结	32
第3章 SIGMA 点卡尔曼滤波在初始对准中的应用	33
3.1 引言	33
3.2 贝叶斯递归估计	33
3.2.1 贝叶斯递归解	33
3.2.2 高斯贝叶斯递归解	35
3.3 Sigma 点卡尔曼滤波算法在初始对准中的应用	35
3.3.1 扩展卡尔曼滤波	36

3.3.2 插值滤波	37
3.3.3 无轨迹卡尔曼滤波	41
3.3.4 容积卡尔曼滤波	45
3.3.5 仿真分析	49
3.4 自适应 UKF 在初始对准中的应用	51
3.4.1 噪声均值非零时 UKF 算法实现	52
3.4.2 带噪声统计估计器的 AUKF 算法	53
3.4.3 仿真分析	58
3.5 ASMUGSF 在初始对准中的应用	62
3.5.1 扩维自适应 UKF	62
3.5.2 高斯模型的分裂和合并算法	64
3.5.3 自适应分裂合并的无轨迹高斯和滤波	64
3.5.4 仿真分析	65
3.6 本章小结	69
第 4 章 鲁棒 UKF 在初始对准中的应用	70
4.1 绪论	70
4.2 H_∞ 滤波的基本理论	70
4.2.1 H_∞ 滤波问题的提出	70
4.2.2 H_∞ 滤波问题的表述	73
4.2.3 H_∞ 滤波问题的求解方法	74
4.3 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的基本理论	75
4.3.1 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的推导过程	75

4.3.2	H_∞ UKF 和 UKF 之间相互关系的推导和分析	77
4.3.3	平滑算法	79
4.3.4	仿真分析	81
4.4	UKF/ H_∞ UKF 混合滤波在初始对准中的应用	85
4.4.1	UKF/ H_∞ UKF 混合滤波算法	85
4.4.2	仿真分析	86
4.5	本章小结	90
第 5 章 高斯粒子滤波在初始对准中的应用		91
5.1	引言	91
5.2	高斯粒子滤波	91
5.2.1	高斯粒子滤波算法	91
5.2.2	高斯粒子滤波算法步骤	93
5.3	RQMC-GPF 在初始对准中的应用	94
5.3.1	随机拟蒙特卡罗方法	94
5.3.2	RQMC-GPF 算法	100
5.3.3	仿真分析	101
5.4	CGPF 在初始对准中的应用	105
5.4.1	容积高斯粒子滤波	105
5.4.2	仿真分析	107
5.5	本章小结	110
第 6 章 非线性滤波在干扰车载基座下初始对准试验研究		112

6.1 试验条件介绍.....	112
6.2 对准结果分析.....	113
6.2.1 粗对准对比分析.....	113
6.2.2 典型精对准结果分析.....	115
6.2.3 三组数据对准结果分析.....	127
6.3 本章小结.....	158
结论.....	159
参考文献.....	162
攻读学位期间发表论文与研究成果清单.....	172
致谢.....	173

第 1 章 绪论

1.1 本论文研究的目的和意义

滤波或者状态估计问题是信号处理中比较重要的一个分支。在线性滤波理论的基础上发展起来的非线性滤波技术，在理论和内容上都比线性滤波更广泛、更丰富。随着信号处理和通讯技术的飞速发展，非线性滤波技术在信号处理^[1-3]、目标跟踪和识别^[4-6]、无线通信^[7]、图象处理^[8]、自动控制^[9-10]以及航空航天等领域具有越来越广泛的应用，也成为导航领域的研究热点。

非线性滤波的特殊应用难题之一是导航系统的滤波估计。导航系统的很多复杂的估计任务必须得到快速地有效地解决，因此对载体自主性和快速反应能力的要求越来越高。解决这些问题的关键技术是估计理论，尤其是非线性滤波理论。从概率统计最优的角度，如何通过滤波的方法估计出系统的状态，在现有硬件条件的基础上，提高载体的导航和控制的精度具有重要意义，是取得各类任务成功的重要保证。

作为直接影响导航系统性能的因素，初始对准是捷联惯导系统（SINS）的关键技术之一^[11]。在初始对准中，SINS 的误差模型本质上是非线性的，为能按线性模型来处理，一般假设失准角为小角度。但晃动基座下初始失准角较大时，线性模型就不能完全正确描述真实的系统，需要非线性模型来描述。通常情况下经过小干扰假设或者直接线性化，由非线性方程要得到线性模型，然后应用卡尔曼/扩展卡尔曼滤波来处理。因此，存在系统模型误差问题。

在系统模型必须足够准确且假定噪声为统计特性已知的高斯白噪声条件下，使用卡尔曼/扩展卡尔曼滤波处理问题，但当不满足小干扰假设或者非线性增强时系统模型存在误差，以及载体处于非高斯的噪声环境下时，估计精度会降低，甚至使滤波器发散。而根据任务的不同初始对准的工作环境是变化的：可能静止的、行进间的、空中的以及晃动基座的等^[11]，用简单的高斯噪声不能完全近似噪声特性。因此，如何处理有误差的不够准确的模型和如何降低高斯白噪声假设的不合理性是卡尔曼/扩展卡尔曼滤波在上述导航问题的应用中遇到两个主要问题。

非线性的系统模型与小干扰假设下的线性系统模型相比，既能更准确地描述状态的传播特性，又具有更少的约束条件，可以使所建立的模型的适用范围进一步得到扩

展。因此，直接研究初始对准的非线性模型，不仅有助于分析在提高初始对准性能上非线性模型的作用，而且还有助于了解模型线性化对初始对准性能造成的影响。而噪声激励源驱动下状态的动态传播规律是由系统模型描述的，所以，合理地建立处于复杂的非高斯环境下系统的噪声模型也有利于状态传播规律的准确掌握。

目前，对于非线性系统的状态估计问题，学者们取得了大量的研究成果，称为非线性滤波^[12-17]。随着信号处理、通讯和惯性导航等领域的快速发展，对非线性滤波技术提出了更高的要求，非线性滤波在理论和内容上迅速发展，解决各类复杂滤波问题有了更加丰富的选择。与卡尔曼/扩展卡尔曼滤波相比，直接采用非线性模型的非线性滤波方法，具有更好的估计精度。

文中从捷联惯导系统的初始对准问题入手，考虑初始对准执行任务所处噪声环境的非高斯性以及不确定性，建立非线性误差模型，并采用相应的非线性滤波方法，使初始对准估计精度得到提高同时保证估计的可靠性，这在理论上和工程上都具有重要的意义。另外，文中对非线性滤波方法进行梳理分类，总结它们的原理、优缺点、适用条件以及相互之间的关系，并用仿真算例加以验证。对非线性滤波方法从整体上有深入了解，为解决具体问题时方法的选择上提供参考的依据。

1.2 捷联惯导系统发展概况

1.2.1 捷联惯导系统发展概况

惯性技术是惯导技术、惯性仪表技术、惯性测量技术以及有关设备和装置技术的统称，它广泛用于航空、航海、航天及陆地各领域。惯性系统是决定武器精度的关键，精确惯性制导武器的威力奠定了战争胜利的基石，在海湾战争中是不可缺少的重要设备^[18]。因而惯性系统在国防科学技术中占有非常重要的地位，是世界各工业强国重点发展的技术领域之一。捷联惯导是惯性技术的研究热点，是惯性技术主要的发展方向。

由于没有平台框架和相连的伺服装置，捷联惯导系统简化了硬件，使体积和成本大大降低，且机械构件少，捷联惯导系统容易采用多敏感元件配置，实现余度技术，具有可靠性高的优点。但是捷联惯导系统要求陀螺精度高、稳定性和耐冲击振动性好，对计算机的要求也较高。为保证高精度工作，飞行器要求系统动态范围在 $0.01\text{deg}/h$ 至 $400\text{deg}/s$ 内，舰船要求动态范围在 $0.001\text{deg}/h$ 至 $60\text{deg}/s$ 内。因为要计算各种补偿数据和各种坐标系转换，要求计算机具有更大的容量、更高的速度、更高的精度。

从20世纪50年代开始，真正研制捷联式系统。美国首先致力研究空间飞行器的

捷联式方案。但当时由于缺乏适用于捷联惯导系统的惯性仪表和计算机，所以无法实现。随着电子技术的发展，微型计算机的容量和速度不断提高，以及以可靠性为主要因素的航天技术的需要，大量研究人员对捷联惯导系统进行深入的研究。20世纪60、70年代，美国联合飞机公司哈密尔顿标准中心研制了LM/ASA捷联式系统，在“阿波罗”登月舱的应用中，取得了成功；美国哈密尔顿标准中心研制的捷联惯导系统在飞机的应用中同样取得成功；洛克韦尔国际公司研制了基于静电陀螺的中等精度低成本的机载捷联式MICRON系统。20世纪80年代末，美国立顿公司就研制出了精度达0.2nm/h的捷联惯导系统。随着惯性仪表技术的发展，出现了适合于捷联惯导系统的更为理想的陀螺，即除了静电陀螺、挠性陀螺外，又出现光纤陀螺和激光陀螺等没有旋转质量的陀螺等，从更加有利于研制捷联惯导系统。霍尼韦尔公司研制的采用激光陀螺的LINS系统，其姿态精度为2.5min，速度精度为1m/s，定位精度为1nm/h，平均故障间隔时间达到2500h。

捷联惯导系统在军民应用领域不断扩大，但在许多应用场合，由于已有的惯性仪表体积过大而无法应用。因此惯性仪表的重要发展方向之一就是微型化。随着微电子技术的迅猛发展，半导体集成电路工艺日臻完善，人们开始在精密机械制造中使用批量生产的IC制造技术。二十世纪八十年代，在集成电路工艺和微机械加工工艺的基础上，各种微传感器和微机电系统(MEMS)脱颖而出，一些技术发达国家就在尝试使用MEMS技术制作能够测量运动物体角速度、线加速度的惯性敏感器，即MEMS陀螺和MEMS加速度计，到现在已获得了初步成功。厂商设计和制造了由正交安装的三个MEMS陀螺和三个MEMS加速度计构成的微型惯性测量组合MIMU(MicroInertial Measurement Unit)，同时将GPS接收机与MIMU集成，制造组合导航系统组件。近年来在MIMU及其在军、民用方面的研究，国内外均不断取得可喜成果，不断扩大销售市场，从而MIMU被人们誉为是惯性技术领域中的一朵奇葩。MEMS惯性仪表的出现极大拓宽了捷联惯导系统的应用领域，使其在诸如微型卫星、战术导弹、制导弹药以及便携式个人导航仪等军民领域具有广阔的应用前景^[19]。

目前船用惯性导航系统需要长时间高精度的平台式系统，捷联惯导系统已广泛应用于中低精度的应用领域。特别在航空和导弹等导航、制导系统中，捷联惯导系统的出现和发展代表了现代惯性技术的一个新的发展方向，倍受青睐的捷联惯导系统大有最终取代平台式系统的趋势。

1.2.2 捷联惯导系统初始对准技术

捷联惯导系统的关键技术包括初始对准、有害加速度的消除及引力修正、建立惯性器件误差模型并可实时补偿、更新姿态矩阵等。对于平台式惯导系统而言，控制平台使其跟踪导航坐标系是初始对准的任务。而建立姿态矩阵的初始值是捷联惯性导航系统初始对准的目的。捷联式惯导系统的主要误差源之一是初始对准误差，它直接影响捷联惯导系统的工作精度；另外，作为武器系统重要战术指标的快速反应能力也需要缩短初始对准时间。往往需要较长的对准时间才能获得较高的对准精度，初始对准的关键技术是如何解决对准精度和快速性的矛盾。

按对准阶段来分，初始对准一般分为两个阶段：第一阶段为粗对准，第二阶段为精对准。获得的粗略姿态矩阵是捷联惯导系统的粗对准的目的，并为后续的精对准提供基础。粗对准阶段要求速度快，因此精度可以低一些。在粗对准的基础上进行精对准，通过处理惯性器件的输出信息，精确估计计算导航坐标系与真实导航坐标系之间的失准角，使之趋于零，从而得到精确的姿态矩阵。

按照捷联惯导系统初始对准时载体的运行状态来分可分为静基座对准和动基座对准。顾名思义，运载体是不动进行静基座对准，而在运载体运动状态下完成动基座对准。对于静基座捷联惯导系统的初始对准问题的研究已取得了不少成果，但对于动基座对准尤其是晃动基座捷联系统的初始对准问题仍很不成熟，是值得研究的课题之一。

按照否取得外部信息，可把初始对准时可分为自对准和非自对准。利用地球自转角速率矢量和重力矢量通过解析的方法实现的初始对准称为惯性导航系统的自对准，自主性强是这种对准方法的优点，所需的对准时间长是其缺点。非自主式对准借助机电或光学方法，把外部参考坐标系引入系统，实现捷联惯性系统的初始对准。在捷联惯导系统的粗对准阶段，可以把主惯导系统的航向姿态信息引入到子惯导系统，实现传递对准，迅速将数学平台对准导航坐标系，减小初始失准角。在精对准阶段，可以利用其它导航设备（如 GPS，计程仪）等提供的信息（如速度和位置）作为测量信息，通过组合导航的方法，使用卡尔曼滤波实现精确对准。

对于初始对准问题的研究，主要包括：自对准误差模型分析与研究^[20-21]，包括静基座对准模型和传递对准模型研究^[22-23]；自对准方法研究，包括捷联惯导系统涉及的两位置^[24-25]和多位置对准问题^[26-27]研究等；静、动基座对准非线性滤波算法研究^[28-31]；模糊信息处理^[32-33]、神经网络^[34-35]及信息融合等技术在惯导系统初始对准中的应用研究；误差模型及状态变量可观测研究^[36-37]；建立更合理、更精确的初始对准的误差

模型^[38-39]；选择合适的辅助测量信息^[40-41]。本文主要研究晃动基座初始对准中非线性滤波算法。

1.3 估计理论的发展历程

在工程实践中，常会遇到两类问题：（1）无法确定描述系统所需的部分或全部结构参数；（2）为了实施控制的需要对系统状态的实时了解，而由于种种限制，不能直接通过测量系统的部分或者全部状态变量来实现。现在解决这两类问题的办法就是通过测量可测量的状态变量，估计状态变量或结构参数，于是形成了估计理论^[42-43]。

参数估计和状态估计是估计理论两个主要研究方向。一般来讲，把参数估计归于静态估计，把状态估计归于动态估计。在实际中，可在系统状态加入变量参数，用状态估计的方法同时解决参数估计和状态估计，反之也可以在变量参数中融入系统状态，用参数估计的方法来处理。

估计理论的发展已经历 200 多年。19 世纪初，德国数学家 Gauss 提出了最小二乘法估计^[44]，成功用于处理行星运动轨道测量的问题。最小二乘要求测量误差的方差最小，不考虑测量信号的统计特性，应用比较简单，但性能较差。到了 20 世纪 20 年代，极大似然估计法由英国统计学家 Fisher 提出^[45]，经典估计理论才系统地建立起来。

20 世纪 40 年代，美国科学家 Weaner 和苏联科学家 Kolmogorov 相继独立地提出了维纳滤波理论。1941 年 Kolmogorov 分析了离散时间情况下的预测问题^[46]。然后 Wiener 于 1942 年推导出连续时间滤波^[47]。维纳滤波有机地结合数理统计理论和线性系统理论，利用输入信号和测量信号的统计特性，成功地处理火力控制系统中精确跟踪的问题，进而形成了对随机信号作平滑、估计或预测的最优估计新理论。但是，维纳滤波具有严格的限制条件，在很大程度上限制了其应用范围。维纳滤波奠定现代估计理论的基础。

由于维纳滤波方法的难以推广，促使人们转向研究在时域内直接设计最优滤波器新方法^[48-52]。Kalman 在 60 年代初提出了卡尔曼滤波 (Kalman Filtering, KF) 理论。首次在估计理论引入状态空间法，使用状态方程和测量方程描述系统的动态模型和测量模型，得到系统状态的最小均方误差估计。KF 算法是时域递推的，可在时变、非平稳随机过程和多维信号的估计中使用，也便于计算机实现。KF 理论是现代估计理论的开始。

随后，Bierman, Carlson 和 Schmidt 等提出平方根滤波算法^[53-54]和 UDU^T 分解滤

波算法^[55-56]，确保滤波方差阵在 KF 增益回路中始终保持正定，避免计算舍入误差造成滤波发散的现象，使算法的计算效率和健壮性得到提高。Speyer, Bierman 和 Kerr 等先后提出了分散滤波的思想来解决高维系统的滤波问题^[57-60]，该算法可增强 KF 递归估计的实时性，提高了 KF 的计算效率。考虑到系统的容错能力，在 1988 年 Carlson 提出了联邦滤波理论^[61]。

系统模型准确且噪声为已知的高斯过程是 KF 的要求。一方面，由于工作环境和条件的变化，往往不能确定噪声统计特性，因此发展起来若干自适应滤波方法，如极大后验估计^[62]、新息自适应滤波器^[63]、动态偏差去藕估计^[64]等，根据新息序列的统计特性，在线评估和修正滤波器，以降低滤波误差并提高滤波器适应变化的能力，增强滤波器的鲁棒性。另一方面，学者们相继提出衰减、有限记忆滤波方法等滤波方法，解决抑制系统模型不准确导致的滤波发散问题^[65]。

继维纳滤波之后，卡尔曼滤波将估计理论引入到一个崭新的突破性的发展阶段，也使非线性滤波理论的得到飞速发展。

1.4 非线性滤波理论的现状

1.4.1 递归贝叶斯估计

在组合导航、雷达或声纳探测系统以及火箭的制导和控制系统等广泛存在的非线性随机动态系统，一般都是非线性和/或非高斯的。对非线性随机动态系统的最优状态估计是非线性滤波亟待解决的问题，解决的是如何在序贯测量的基础上，采用某种统计最优的方法，根据一定的滤波准则，在线、实时地预测和估计出动态系统的状态和误差的统计量。从广义上讲，贝叶斯估计可统一描述最优非线性滤波^[66-69]。

递归贝叶斯估计将滤波问题转化为计算状态基于测量信息的条件概率密度，状态的条件概率密度就是状态估计的解。若已知该条件概率密度，就很容易得到基于某种最优性能指标的滤波表达式，如最小方差估计、极大验后估计等。

卡尔曼滤波给出了线性高斯系统状态的最小方差估计，对于非线性系统，贝叶斯概率密度公式给出了最优解。但在数学上求解无穷维积分运算是极为困难的^[13,70]，计算精确的最优解是困难的，有时甚至是不可能的。所以人们提出很多次优的非线性滤波方法近似贝叶斯估计的最优解^[71-78]。文中把这些近似方法大体上分为三类：（1）基于函数线性化近似的滤波方法；（2）基于统计线性化理论的滤波方法；（3）基于蒙特卡罗仿真（随机采样）的滤波方法。另外，基于 Klamann 的离散 H_∞ 滤波是很多学者的

研究方向, H_∞ 滤波技术应用基于函数线性化近似的滤波方法和基于统计线性化理论的滤波方法, 可使非线性系统噪声不确定性对滤波算法的影响得到降低, 本文也将其作为研究方向。

1.4.2 基于函数线性化近似的滤波方法

只适用于线性系统的 KF 理论, 不能直接在非线性系统应用。Sunahara 和 Bucy 等提出了扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 理论, 将 KF 进一步推广到非线性领域^[79-80]。基于泰勒级数将非线性系统展开, EKF 取一阶截断近似原非线性的状态方程和测量方程, 在此基础上应用 KF。EKF 简单易于实现, 但是引入了模型线性化误差。另外, 在 EKF 中, 必须计算系统的雅克比矩阵, 对于高维系统, 由雅克比矩阵带来的复杂的计算问题限制了 EKF 的应用。

为提高估计精度, 减小线性化误差, Jazwinski、Henrikson、Wishner 等提出多种二阶的广义卡尔曼滤波方法^[81-83], 仿真结果表明二阶 EKF 能使滤波性能得到改进。二阶 EKF 考虑了二次泰勒展开项, 减少了线性化误差, 但是增加了运算量, 很难应用于实际。

一种变增益的 EKF 被提出^[84], 并给出使这种滤波器均方误差指数有界的一个充分条件。一种新的 L-D 分解算法也被提出^[85], 在保证 EKF 精度不变的前提下, 结果表明分解算法增强了滤波器的实时处理能力。为解决动态系统的故障检测问题, Ruokonen 提出了并行 KF 技术^[86], 保证了在任意给定的阈值条件下决策过程的渐近稳定性。

为提高 EKF 处理强非线性系统的估计性能。一种耦合卡尔曼滤波 (Interlaced Kalman Filtering, IKF) 方法被提出^[87]。IKF 将非线性模型分解为两个等价的伪线性模型, 分别描述动态系统状态向量中的线性项和非线性项。同时运行这两个卡尔曼滤波器, 最后综合二者的估计结果。在此基础上, 一种次优的广义耦合卡尔曼滤波器 (EIKF) 被提出^[88], 并被用于解决无陀螺小卫星的姿态确定和角速率估计的问题。在不对模型线性化的前提下, IKF 可得到了状态的次优估计, 既具有 KF 高效、简单和收敛速度快等优点, 又避免 EKF 固有的问题, 是近年非线性滤波领域的一个重大进展。

基于 Sage-Husa 噪声时变估计器的自适应滤波方法相继提出用于补偿时变噪声或不准确噪声特性, 如直接或间接加权增益矩阵^[89]; 预测、估计及加权动态噪声方差^[90]; 预测、估计及限制误差协方差^[91]等。Yoshimura 还提出了虚拟噪声补偿技术算法来补偿模型线性化误差^[92]。

1.4.3 基于统计线性化理论的滤波方法

基于统计线性化理论的滤波方法统称为 Sigma 点卡尔曼滤波 (Sigma Points Kalman Filter, SPKF)。根据统计的方法不同可分为三类: 第一类方法是寻找非线性函数线性近似, 线性化非线性模型, 通过插值多项式近似得到了滤波器; 第二类方法是基于通过 UT 变换一组确定的点集来表征状态的统计特性 (如均值和方差等), 能直接应线性模型来求解; 第三类从数值积分的角度分析。

1997 年, 挪威学者 Schei 提出用中心差分方程代替泰勒展开式中的导数运算来提高 EKF 的性能, 得到中心插值滤波 (Central Difference Kalman Filter, CDKF)^[93], 作为插值滤波方法的起源。在此基础上, 2000 年丹麦学者 Nørgaard 等系统阐述和建立了基于插值多项式的分开插值滤波 (Divided Difference Filter, DDF) 理论^[94]。将非线性函数用 Stirling's 插值公式按多项式展开, 取一阶多项式得到的 DDF1, 相当于 EKF, 取二阶多项式得到 DDF2。由于 DDF 不需求系统的雅克比矩阵, 无导数运算, 当非线性函数不连续且存在奇异点 (无导数存在) 时, DDF 也能进行状态估计, 易于实现。但是, 由于 DDF 涉及多个矩阵的 Cholesky 分解和 Householder 三角化运算, 增加了算法的复杂性, 其计算量高于 EKF。

与对非线性函数的近似相比, Julier 和 Uhlmann 认为对高斯分布的近似更为简单, 提出了无轨迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman Filter, UKF)^[95]。UKF 的核心是 Unscented 变换 (UT), 通过在随机变量周围仔细选择采样点集合 (Sigma 点), 对 Sigma 点经过非线性变换后得到新的采样点, 计算后验分布的均值和协方差阵时使用加权和的办法。UKF 可不受系统具体形式的限制。对于线性系统, EKF 和 UKF 具有同样的估计精度; 而对于非线性系统, UKF 方法具有二阶的精度, 对于高斯噪声可以精确到三阶, EKF 只具有一阶的精度^[96-97]。

Julier 提出一种对尺度伸缩 Sigma 点的方法解决采样点的代表性降低的问题^[98], 增加了参数 α 和 β 用于调节尺度伸缩。通过调节 β 来融入高阶信息, 但算法并没有在本质上提高滤波器的精度。对于高斯分布, 其奇数阶中心矩均为零, 而由协方差表示高于二阶的偶数阶中心矩。在此基础上, Tenne 提出了高阶的 UKF^[99], 其思想是先直接计算高斯分布的高阶矩, 然后由已知的协方差信息获得等价关系计算 Sigma 点及权值。但该算法应用于二阶系统已相当复杂, 高维系统难度更大。而文献[97]提出用一种称为超立方体代表点的多元分布代表点来替代 UT 中的 Sigma 点的采样方法, 并使用均方差准则来度量确定性样本集合的代表性。与 UT 相比, 这种超立方体代表点的

方法在均方差准则下使估计误差降低。但是，这种方法需要的代表点数随着维数的增加按几何级数增长，会大大增加计算量。

从数值积分的角度分析^[100]，统计线性化理论的滤波问题实质是一个确定性函数与高斯分布乘积的求积分问题，基于不同的求积分方法，提出了相应的滤波算法，同时对原有方法的改进不断被提出，近两年，学者 Ienkaran Arasaratnam 分别利用 Gauss-Hermite 求积分和求容积的方法提出了积分卡尔曼滤波（Quadrature Kalman Filters, QKF）^[101]和容积卡尔曼滤波（Cubature Kalman Filters, CKF）^[102]，仿真结果表明在低维问题上 QKF 性能优于 UKF，但高维系统时，有维数灾难的问题；CKF 计算负担比 UKF 小，且精度相当。

1.4.4 基于蒙特卡罗仿真的滤波算法

前面介绍了前两类非线性滤波方法都是基于高斯假设，它们或是通过对非线性函数近似，或是对高斯分布近似，提出的是非线性高斯条件下的动态系统的解决方法。对于非线性非高斯条件下动态系统的状态估计问题，基于蒙特卡罗仿真的粒子滤波（Particle Filter, PF）提供了很好的解决方案^[103]。

早在 20 世纪 50 年代，在物理和统计学中就已使用基于序贯重要性采样（Sequential Importance Sampling, SIS）的蒙特卡罗方法。60 年代后期，该方法应用于自动控制领域。70 年代，学者们对此进行了深入地研究^[104]，但均采用 SIS 方法，粒子退化问题比较严重。90 年代初 Gordon 提出了重要性采样重采样（Sampling Importance Resampling, SIR）粒子滤波^[103]，将重采样引入到 SIS 中，在一定程度上缓解了 SIS 的退化问题。

随后，PF 得到飞速发展。为了得到好的重要性函数，学者们相继提出了辅助粒子滤波^[105]，扩展卡尔曼粒子滤波^[106]，用 UKF 方法获得后验概率分布的无轨迹粒子滤波（UPF）^[107]，高斯粒子滤波（GPF）^[108]，以及高斯和粒子滤波（GSPF）^[109]，大大改善了 PF 的性能。

作为粒子滤波的改进算法，高斯粒子滤波（GPF）使用高斯概率密度近似状态的后验概率密度，更新状态的均值和协方差矩阵时使用重要性采样方法，免去了重采样步骤，提高了算法的计算效率和并行性，Bolic 实现了 GPF 的 VLSI 硬件结构^[110]。但 GPF 使用蒙特卡罗模拟采样，仍需要大量的随机样本来计算预测和更新的均值与协方差矩阵。针对这些问题，不少学者提出了改进的 GPF 算法。文献[111-112]提出了采用 UKF 来获取 GPF 的重要性函数的无轨迹高斯粒子滤波 UGPF（Unscented GPF）。

1.4.5 H_∞ 非线性滤波算法

鲁棒滤波方法为估计理论提供了一种新的思路^[113]。鲁棒滤波方法中发展较快的一种是 H_∞ 滤波方法，该方法保证滤波器对系统模型及外部干扰的鲁棒性能，但牺牲滤波器的平均估计精度。也就是说，KF 方法保证了滤波器的平均估计性能最优，而 H_∞ 滤波方法则保证了滤波器在最坏情况下的滤波性能。 H_∞ 滤波理论研究热点是在保证滤波器鲁棒性的同时，进一步使他性能得到提高。

对于非线性系统，在 H_∞ 滤波方法的基础上，基于泰勒级数展开的 H_∞ 扩展卡尔曼滤波方法 (H_∞ Extended Kalman Filter, H_∞ EKF) 相继被提出^[114-115]，从而将从 H_∞ 滤波推广到非线性估计领域。但在线性化过程中 H_∞ EKF 承袭了对泰勒级数展开取一阶截断的方法，因此继承了 EKF 精度较低的缺点，使得 H_∞ EKF 的均值与方差在递推估计仅具有一阶精度，且忽略了系统状态和噪声的随机分布特性。

针对 H_∞ EKF 的不足，侯代文将统计线性化技术应用到鲁棒滤波系统，提出了 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波 (H_∞ UKF)，该方法用 UT 变换技术减小了线性化误差，用 H_∞ 滤波方法降低恶劣条件下系统噪声不确定性对滤波性能的影响。仿真结果表明， H_∞ UKF 比 UKF 能以较高精度对说话人进行有效跟踪，具有一定的工程应用价值^[116]。

1.5 非线性滤波在初始对准中的应用

目前，基于线性模型的静基座初始对准技术已经比较成熟，通过两位置、多位置对准和卡尔曼滤波已经能够达到较高的精度。当前研究的热点是非线性误差模型下的初始对准问题^[117-129]。

针对初始对准过程中，方位失准角先验信息的不确定性较高，Dmitriyev 推导出了非线性初始对准模型，来描述角误差^[118]，并提出一种基于后验概率分段高斯近似的非线性滤波方法，用于该误差模型下的初始对准，并获得了较好的对准效果。由于分段数目的增加，运算量增大。

王丹力等将扩展卡尔曼滤波、二次滤波和迭代滤波应用于上述含有非线性角误差描述的初始对准模型^[120]，结果表明，扩展卡尔曼滤波可以使方位对准的精度得到提高，而二次滤波和迭代滤波的估计精度又比扩展卡尔曼滤波高。在对非线性模型线性化时，陈兵舫等将泰勒展开高阶项作为外部干扰输入，得到 H_∞ 滤波器。与二次滤波相比，大为减少计算量且提高精度^[121]。

周战馨、丁杨斌等将 UKF 方法应用于惯导系统大方位失准角的初始对准^[122-123]。仿真结果表明, UKF 直接采用非线性误差模型, 与 EKF 相比提高了滤波精度, 并指出 UKF 应用于强非线性系统时的优势更为明显, 而且对噪声的有较强的适应能力。在静基座初始对准中张红梅等应用了计算负担小的 SUKF^[124]。结果表明, 与 EKF 相比, SUKF 的收敛速度较快和估计精度较高。

熊凯、丁杨斌等将粒子滤波应用于捷联惯导系统非线性初始对准问题^[125-126]。研究表明, 粒子滤波能获得较高的估计精度。针对 PF 实时性较差, 当粒子滤波收敛后切换到 EKF, 该方案可在提高对准精度的情况下有效提高初始对准速度。根据 Rao-Blackwellization 定理, Doucet 等将系统状态分为线性部分和非线性部分, 使用卡尔曼滤波处理线性部分, 使用粒子滤波处理非线性部分, 利用卡尔曼滤波和粒子滤波各自的优点, 提高了精度, 减少了计算负担, 加快了收敛速度^[127]。

为避免晃动基座的粗对准问题, 夏家和提出了基于捷联惯导系统非线性误差模型的直接精对准算法^[128]。推导了捷联惯导的非线性速度误差方程和姿态误差方程, 基于速度测量信息给出了非线性对准模型, 通过 UKF 算法估计失准角完成摇摆状态下的精对准。通过计算机仿真和摇摆台试验对算法进行了验证分析, 仿真结果表明该方法可保证模型的工作精度。为了减少滤波计算量, 周菊花将一种简化的 UKF (RBAUKF) 方法应用于晃动基座 SINS 初始对准^[129], 采用较少的采样点数目和简化的滤波更新算法, 避免对非线性方程的线性化。仿真结果表明, RBAUKF 与 EKF 相比, 可在较短时间内完成初始对准, 具有更高的精度。上述研究仅限于 UKF, 其他非线性滤波算法在晃动基座初始对准上的应用还需要进一步深入研究。

1.6 本文的主要研究内容

初始对准是捷联系统的关键技术之一。论文对非线性非高斯的初始对准的研究, 以晃动基座初始对准为例, 建立非线性模型, 采用两种噪声模型近似初始对准的环境, 结合相应的滤波方法讨论了不同滤波方法在两种噪声模型下的性能。本文的主要内容如下:

第 1 章是绪论, 主要介绍课题的背景和意义, 包括捷联惯导技术的发展及其关键技术之一: 初始对准技术的现状和方法, 估计理论的发展历程, 非线性滤波理论的研究现状, 非线性滤波理论在初始对准中的应用现状, 最后提出了本论文的研究方向, 介绍全文的组织安排。

第 2 章介绍了捷联惯导基本原理，推导了捷联惯导的更新方程，在此基础上推导了晃动基座初始对准用误差方程，介绍了初始对准基本原理，引入了适合晃动基座的惯性凝固粗对准方法，并仿真验证了算法的有效性，最后介绍了仿真环境及滤波器初值，为后续章节奠定基础。

第 3 章介绍了 EKF 和三种 SPKF 算法：DDF2、UKF、CKF，通过理论分析和仿真验证研究了三种 SPKF 算法的性能，应用自适应无轨迹卡尔曼滤波（AUKF）到晃动基座初始对准中，仿真结果表明 AUKF 比 UKF 收敛快，稳态误差小，在分裂合并无轨迹高斯和滤波算法的基础上提出了一种自适应分裂合并无轨迹高斯和滤波算法（ASMUGSF），仿真结果表明 ASMUGSF 总体性能优于 UKF。

第 4 章介绍了 H_{∞} 滤波算法的基本原理，在此基础上推导了 H_{∞} 无轨迹卡尔曼滤波算法（ H_{∞} UKF），并推导了 H_{∞} UKF 和 UKF 之间的关系，还详细推导了 H_{∞} 无轨迹信息滤波算法（ H_{∞} UIF），得到了 H_{∞} UKF 的平滑算法，结合仿真结果分析了 H_{∞} UKF 的性能。针对 H_{∞} UKF 的不足，提出了 UKF/ H_{∞} UKF 的混合滤波，通过仿真试验对比分析混合滤波的性能。

第 5 章介绍了 GPF，基于 RQMC 提出了一种新型的高斯粒子滤波算法 RQMC-GPF，不同噪声仿真试验验证了算法的有效性和正确性。将 CKF 与 GPF 结合提出了另一种新型的高斯粒子滤波算法——容积高斯粒子滤波（CGPF），通过仿真试验分析了 CGPF 的性能。

第 6 章选取 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_{∞} UKF、CGPF 结合惯性凝固粗对准方法，对干扰车载基座的激光陀螺捷联惯导系统进行初始对准试验研究。通过与三种解析粗对准法的对比试验，再次验证了惯性凝固粗对准方法的有效性。详细分析了 4 种滤波算法在 3 组共 30 个数据中的精对准试验，并参照仿真试验的结果，分析了 4 种算法的性能。

最后总结了本文的工作和创新点，并提出了进一步的研究方向。

第 2 章 捷联惯导系统及初始对准基本原理

2.1 引言

捷联惯导系统 (SINS) 省去了平台框架以及和其相连的伺服装置, 将陀螺和加速度计直接固联在运动载体上, 惯性器件同时经载体的线振动和角振动, 工作环境恶劣, 动态误差较大。另外姿态矩阵 (数学平台) 以及导航参数解算需实时计算, 所有导航解算都会存在算法误差。SINS 的误差是累积的, 在系统中姿态矩阵初始值的误差会一直随系统模型传播, 可以通过提高初始对准的精度来减少。

由于捷联惯导系统的误差模型本质上是非线性的, 直接建立非线性误差模型, 可以使约束条件减少, 使误差模型能更准确地表达误差的传播特性, 有助于分析和提高捷联惯导系统的性能。文中基于 Dmitriyew 等提出的采用角误差描述的非线性误差模型^[118], 建立了晃动基座初始对准的非线性误差模型。

在 2.2 节, 基于惯导微分方程推导了捷联惯导系统的更新方程; 在 2.3 节, 在晃动基座条件下给出了初始对准的非线性误差模型; 在 2.4 节, 介绍捷联惯导系统初始对准的基本原理, 并详细介绍了适用于晃动基座的粗对准算法; 在 2.5 节, 介绍初始对准的相关仿真条件; 在 2.6 节, 总结本章的内容。

2.2 捷联惯导系统的更新方程

不论是平台惯导系统还是捷联惯导系统, 其基本工作原理都是相同的, 只不过实现方式有所不同而已。平台惯导系统与捷联惯导系统的主要区别在于后者去掉了复杂的机械式框架结构, 陀螺仪和加速度计直接安装在载体上, 加速度计测得的信号是载体相对于惯性空间的加速度在载体坐标系各轴上的分量。因此根据陀螺仪给出的载体运动信息, 必须在载体计算机中建立起导航坐标系, 并采用加速度计的输出信息以此为基础进行相应的坐标变换, 从而获得导航坐标系内的载体运动加速度。

SINS 的原理如图 2.1 所示。陀螺仪和加速度计直接安装在载体上, 测得的输出信号是沿载体的载体坐标系各轴相对于惯性空间的角速率和线加速度。SINS 主要是建立姿态矩阵, 对陀螺仪输出信号进行处理, 同时对加速度计测量值进行坐标变换, 完成姿态矩阵的更新和导航参数的解算过程^[130]。

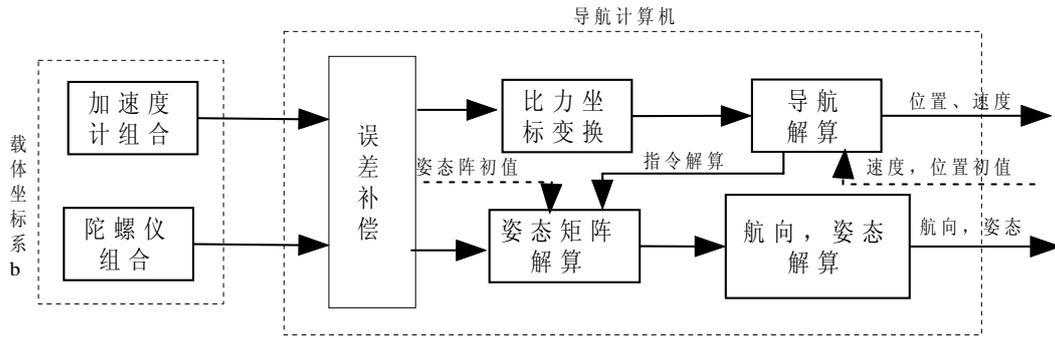


图 2.1 捷联惯导系统原理框图

由图 2.1 还可看出 SINS 的算法主要由姿态更新算法、速度更新算法、位置更新算法组成。在所有捷联算法中，姿态更新算法是 SINS 算法的核心，其计算精度直接影响姿态角的提取和导航计算的精度。捷联导航计算机为完成解算任务需解算以下导航微分方程^[118]：

$$\dot{C}_b^n = C_b^n [\omega_{ib}^b \times] - [\omega_{in}^n \times] C_b^n \quad (2.2.1)$$

$$\dot{V}^n = C_b^n f - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n \quad (2.2.2)$$

$$\dot{\lambda} = V_E \sec L / (R_N + H) \quad (2.2.3)$$

$$\dot{L} = V_N / (R_M + H) \quad (2.2.4)$$

$$\dot{H} = V_U \quad (2.2.5)$$

式 (2.2.1) 和 (2.2.2) 分别为姿态和速度微分方程，式 (2.2.3)、(2.2.4)、(2.2.5) 为位置微分方程。

虽然论文研究的重点在于 SINS 的初始对准问题，然而由于在初始对准仿真过程中涉及到捷联解算的问题，这里有必要对其作简单介绍。初始对准的精度将受到捷联解算好坏的直接影响，所以设计一个好的算法是非常必要的。兼顾精度的要求和仿真计算量，姿态更新算法用等效旋转矢量三子样算法，速度更新算法用三子样算法补偿划桨效应，位置相对变化较慢直接用一阶欧拉法积分法。下面首先对本论文使用的坐标系和相关符号做简单介绍^[130]。

2.2.1 坐标系说明

1 惯性坐标系 (*i*系)

惯性坐标系是牛顿定律在其中成立的坐标系。经典力学中，研究物体运动的时候，

选取静止或匀速直线运动的参考系，牛顿力学定律才能成立，常将相对恒星确定的参考系称为惯性空间。常用的惯性坐标系有日心惯性坐标系、地心惯性坐标系等。

2 地球坐标系（ e 系）

地球坐标系是固连在地球上的坐标系，该坐标系随地球一起转动，即相对惯性坐标系以地球自转角速率 ω_e 旋转。地球坐标系的原点在地心， z 轴沿地球自转轴的方向， x 在赤道平面内，与零度子午线相交， y 也在赤道平面内，与 z 、 x 构成右手直接坐标系。

3 载体坐标系（ b 系）

载体坐标系原点与载体质心重合，对于飞机、舰船等巡航载体， x 沿载体横轴向右， y 沿载体纵轴向前， z 沿载体竖轴向上。

4 平台坐标系（ c 系）

对于平台惯导系统，平台坐标系描述系统中平台指向的坐标系，它与平台固连。对于捷联惯导系统，平台坐标系表示由计算姿态阵所确定的数学平台，即计算坐标系，其功能与平台系统的平台类似。

5 导航坐标系（ n 系）

导航坐标系是惯导系统在求解导航参数时所采用的坐标系。论文所讨论的捷联系统均以地理坐标系为编排。地理坐标系，也称为当地垂线坐标系，原点位于运载体所在点， z 轴沿的当地地理垂线的方向， x 、 y 轴在当地水平面内沿当地经线和纬线的切线方向。根据坐标轴方向的不同，地理坐标系的 x 、 y 、 z 的方向可选为“东北天”，“北东地”，“北西天”等右手直角坐标系。论文中地理坐标系取为“东北天（ENU）”地理坐标系， x 轴指向东， y 轴指向北， z 轴垂直于当地水平面，沿当地垂线向上。

2.2.2 符号说明

r^a ：表示向量 r 在 a 坐标系中的投影。

ω_{ab}^c ： b 系相对 a 系转动的角速度在 c 系中的投影。

C_a^b ：表示 a 系到 b 系的坐标变换矩阵。这里 a 和 b 可以为 i 、 e 、 n 、 b 等坐标系。

$[\varphi \times]$ ：表示向量 $[\varphi_x \quad \varphi_y \quad \varphi_z]$ 的反对称矩阵 $[\varphi \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$ 。

R_e ：地球长轴半径， $R_e = 6378.096km$ 。

e ：为地球的椭圆度， $e = 1/295$ 。

R_N , R_M : 分别当地子午面内的主曲率半径和与子午面垂直的平面内的主曲率半径。

L , λ , H : 分别为纬度, 经度, 高度。

ω_{ie} , g : 分别地球自转角速度矢量和重力加速度矢量。

V_e^n : 相对地球的速度在东北天坐标系中的投影。

V_E , V_N , V_U : 表示地速 V_e^n 的东、北、天分量。

2.2.3 姿态矩阵定义

姿态矩阵的实时求解是捷联系统的特殊性问题。姿态矩阵就是实现由载体坐标系 (b 系) 到导航坐标系 (n 系) 坐标转换的方向余弦矩阵 C_b^n , 它起到了平台的作用, 因此可以称为数学平台。选取当地地理坐标系作为导航坐标系, n 系到 b 系的坐标转换关系如图 2.2 所示, 它可以表示成如下三次转动

$$Ox_n y_n z_n \xrightarrow{\psi}_{oz_n} Ox_{b1} y_{b1} z_{b1} \xrightarrow{\theta}_{ox_{b1}} Ox_{b2} y_{b2} z_{b2} \xrightarrow{\gamma}_{oy_{b2}} Ox_b y_b z_b$$

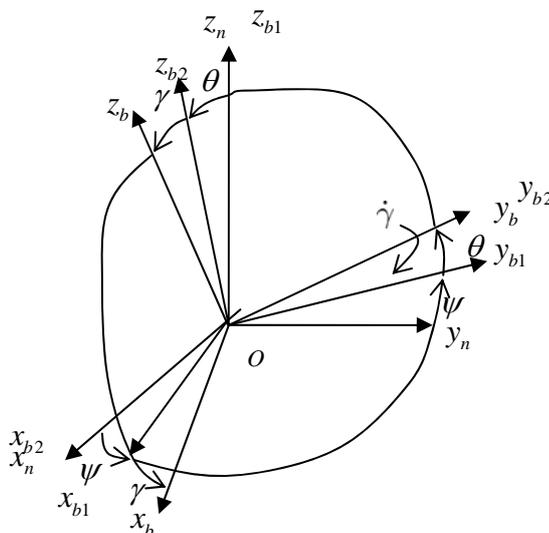


图 2.2 导航坐标系到载体坐标系的坐标变换关系

其中 ψ 、 θ 、 γ 分别为方位角、俯仰角和横滚角。

根据图 2.2 所示的转动可得到 n 系到 b 系的坐标变换关系为:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = C_n^b \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

因为方向余弦矩阵为正交矩阵, 所以有:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = (C_n^b)^{-1} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = (C_n^b)^T \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = C_b^n \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

最后，得到 b 系到 n 系坐标转换的方向余弦矩阵，即姿态矩阵为：

$$\begin{aligned} C_b^n &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

由上式可知，姿态矩阵的元素是 ψ 、 θ 、 γ 的函数，由 C_b^n 的元素可以确定 ψ 、 θ 、 γ 的主值 ψ_m 、 θ_m 、 γ_m ，计算公式为：

$$\psi_m = \arctan\left(\frac{C_{12}}{C_{22}}\right) \quad \theta_m = \arcsin(C_{32}) \quad \gamma_m = -\arctan\left(\frac{C_{31}}{C_{33}}\right) \quad (2.2.9)$$

其中，俯仰角 θ 和横滚角 γ 的定义域均为 $(-0.5\pi, 0.5\pi)$ ，由于它们的定义域与反正弦函数及反正切函数的主值域一致，所以的俯仰角 θ 和横滚角 γ 的真值即为主值。方位角 ψ 的定义域为 $(-\pi, \pi)$ ，遵循右手法则，它的定义域与反正切函数的主值域不一致，所以方位角 ψ 的真值由 C_b^n 中相关元素判断在哪个象限^[130]。

2.2.4 姿态更新算法

实际系统的姿态更新实现时，一般不直接解算式 (2.2.1)，而是采用四元数算法，至于四元数与姿态矩阵的关系，可参考文献[130]，本文不再详细论述。下面直接给出四元数微分方程为：

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{2} Q(t) \otimes \omega(t) \quad (2.2.10)$$

式中 $\omega(t)$ 是由 $\omega_{nb}^b(t)$ 构造的零标量四元数。 $\omega_{nb}^b(t)$ 表示载体坐标系相对地理坐标系的角速度在载体坐标系上的投影。 $Q(t)$ 为与 C_b^n 对应的四元数。

其等效的矩阵形式为：

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{2} M'(\omega_{nb}^b) Q(t) \quad (2.2.11)$$

式中：

$$M'(\omega_{nb}^b) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbx}^b & -\omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b \\ \omega_{nbx}^b & 0 & \omega_{nbz}^b & -\omega_{nby}^b \\ \omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b & 0 & \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b & -\omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

类似矩阵微分方程，可用毕卡逼近法求解四元数微分方程，得解析表达式如下：

$$Q(t_k) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} M'(\omega_{nb}^b) dt} Q(t_{k-1}) \quad (2.2.13)$$

但实际系统中 ω_{nb}^b 只有在短时间内方向不变时，以上指数积分才能成立，否则，将引入不可交换性误差，故应采用等效转动矢量算法求解。

$$Q(t_k) = Q(t_{k-1}) \otimes q(h) \quad (2.2.14)$$

式中：

$$q(h) = \cos \frac{|\Phi|}{2} + \frac{\Phi}{|\Phi|} \sin \frac{|\Phi|}{2} \quad (2.2.15)$$

Φ 为等效旋转矢量， $|\Phi|$ 为 Φ 的模； $q(h)$ 称为 $[t_{k-1}, t_k]$ 时间段内的姿态变化四元数。等效旋转矢量 Φ 的微分方程为：

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b) \quad (2.2.16)$$

根据每个计算周期采样数的不同，等效转动矢量可分为单子样算法、双子样算法和三子样等。下面直接给出三子样旋转矢量的优化算法^[130]：

$$\Phi(h) = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \frac{9}{20} \Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + \frac{27}{40} \Delta\theta_2 \times (\Delta\theta_3 - \Delta\theta_1) \quad (2.2.17)$$

上式中， $\Delta\theta_1$ 、 $\Delta\theta_2$ 、 $\Delta\theta_3$ 分别为 $[t_{k-1}, t_{k-1} + h/3]$ 、 $[t_{k-1} + h/3, t_{k-1} + 2h/3]$ 、 $[t_{k-1} + 2h/3, t_k]$ 时间段内的角增量（已补偿过位置速率及地球自转角速度）。获得采样值后，依次根据式（2.2.17）、（2.2.15）和（2.2.14）就可以对姿态四元数进行更新。由于导航坐标系也在缓慢旋转，因此对姿态四元数若干步后需作适当修正。

另外由于计算的舍入误差和截断误差，使计算的姿态四元数范数不再等于 1，即计算的姿态四元数失去规范性，因此在每计算适当步数后，都应该周期性地对姿态四元数进行规范化处理。用 $\hat{Q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ 表示计算得到的四元数，则规范化的姿态四元数为：

$$\bar{Q} = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (2.2.18)$$

陀螺输出为角增量时上述算法适合。若陀螺输出为角速率，需要提取角增量，这

一定程度上使这种算法的精度受到限制。因此仿真时为了保证角增量提取的精度，需以相对较快的频率来产生角速率输出以便提高输出的角增量的精度。

2.2.5 速度更新算法

速度方程为式 (2.2.2) 所示，对其积分得：

$$V^n(t_k) = V^n(t_{k-1}) + C_b^n(t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_b^{b(t)} f^b dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} [g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n(t_{k-1})] dt \quad (2.2.19)$$

即：

$$V^n(t_k) = V^n(t_{k-1}) + \Delta V_{sf}^n(t_k) + \Delta V_{g/gor}^n(t_k) \quad (2.2.20)$$

$$\Delta V_{sf}^n(t_k) = C_b^n(t_{k-1}) \Delta V_{sf}^b(t_k) \quad (2.2.21)$$

$$\Delta V_{sf}^b(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_b^{b(t)} f^b dt \quad (2.2.22)$$

$$\Delta V_{g/gor}^n(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n(t_{k-1})] dt \quad (2.2.23)$$

上式中， V^n 为载体相对地理坐标系的速度即地速； f^b 为载体的比力； g^n 为重力加速度。式 (2.2.20) 即为速度更新的递推方程。由式 (2.2.21)、(2.2.22) 和 (2.2.23) 知，要完成速度更新计算，就要实时计算出 $\Delta V_{sf}^b(t_k)$ 和 $\Delta V_{g/gor}^n(t_k)$ ，下面将给出 $\Delta V_{sf}^b(t_k)$ 和 $\Delta V_{g/gor}^n(t_k)$ 的实时算法^[130]。

(1) $\Delta V_{g/gor}^n(t_k)$ 的计算

由式 (2.2.23) 知：

$$\begin{aligned} \Delta V_{g/gor}^n(t_k) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} [g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n(t_{k-1})] dt \\ &\approx \{g^n(t_{k-1}) - [2\omega_{ie}^n(t_{k-1}) + \omega_{en}^n(t_{k-1})] \times V^n(t_{k-1})\} \times T \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

式中， T 是采样周期， $g^n(t_{k-1})$ 、 $\omega_{ie}^n(t_{k-1})$ 、 $\omega_{en}^n(t_{k-1})$ 可由下式计算，即：

$$\begin{cases} g^n = [0 \quad 0 \quad -g(t_{k-1})]^T \\ g(t_{k-1}) = 9.7803267714[1 + 5.27094 \times 10^{-3} \sin^2 L(t_{k-1}) \\ + 2.32718 \times 10^{-5} \sin^4 L(t_{k-1}) - 3.086 \times 10^{-6} \cdot H(t_{k-1})] \end{cases} \quad (2.2.25)$$

$$\omega_{ie}^n(t_{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L(t_{k-1}) \\ \omega_{ie} \sin L(t_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

$$\omega_{en}^n(t_{k-1}) = \begin{bmatrix} -V_N(t_{k-1})/(R_M + H(t_{k-1})) \\ V_E(t_{k-1})/(R_N + H(t_{k-1})) \\ V_E(t_{k-1}) \tan L(t_{k-1})/(R_N + H(t_{k-1})) \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

(2) $\Delta V_{sf}^b(t_k)$ 的计算

由式 (2.2.22) 知,

$$\Delta V_{sf}^b(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_{b(t)}^{b(t_{k-1})} f^b dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [I + [\Phi_k \times]] f^b dt \quad (2.2.28)$$

上式中, Φ_k 为 $[t_{k-1}, t_k]$ ($t_{k-1} < t < t_k$) 上载体转动的等效旋转矢量。且有:

$$\Phi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega_{ib}^b(\tau) d\tau \quad (2.2.29)$$

若速度更新周期 $[t_{k-1}, t_k]$ 内有:

$$\begin{cases} \Delta\theta_k(i) = \int_{t_{k-1} + \frac{i-1}{3}h}^{t_{k-1} + \frac{i}{3}h} \omega_{ib}^b(t) dt \\ \Delta V_k(i) = \int_{t_{k-1} + \frac{i-1}{3}h}^{t_{k-1} + \frac{i}{3}h} f^b(t) dt \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.30)$$

上式中, $\Delta\theta_k(i)$ 为陀螺输出的角增量, $\Delta V_k(i)$ 为加速度计输出的速度增量。则有:

$$\Delta V_{sf}^b(t_k) = \sum_{i=1}^3 \Delta V_k(i) + \Delta V_{rot}^b(t_k) + \Delta V_{scul}^b(t_k) \quad (2.2.31)$$

$$\Delta V_{rot}^b(t_k) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \Delta\theta_k(i) \right] \times \left[\sum_{i=1}^3 \Delta V_k(i) \right] \quad (2.2.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{scul}^b(t_k) &= \Delta\theta_k(1) \times \left[\frac{9}{20} \Delta V_k(3) + \frac{27}{20} \Delta V_k(2) \right] \\ &+ \Delta\theta_k(2) \times \left[\frac{27}{20} \Delta V_k(3) - \frac{27}{20} \Delta V_k(1) \right] \\ &+ \Delta\theta_k(3) \times \left[-\frac{9}{20} \Delta V_k(1) - \frac{27}{20} \Delta V_k(2) \right] \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

式中, ΔV_{rot}^b 称为速度旋转补偿项, ΔV_{scul}^b 称为速度划船补偿项。

2.2.6 位置更新算法

直接从位置更新微分方程式 (2.2.3)、(2.2.4) 和 (2.2.5) 获得位置更新一阶近似算式:

$$L(t_k) = L(t_{k-1}) + \frac{T \cdot \mathbf{V}_N(t_{k-1})}{R_M + H(t_{k-1})} \quad (2.2.34)$$

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}) + \frac{T \cdot V_E(t_{k-1})}{R_N + H(t_{k-1})} \sec L(t_{k-1}) \quad (2.2.35)$$

$$H(t_k) = H(t_{k-1}) + T \cdot V_U(t_{k-1}) \quad (2.2.36)$$

或者，由于在解算 t_k 时刻位置时， t_k 时刻的速度 $V^n(t_k)$ 已经从速度更新算法中计算出来了，因此可采用两个时刻速度的平均值 $(V^n(t_k) + V^n(t_{k-1}))/2$ 来实现位置更新，精度会更高一些，即：

$$L(t_k) = L(t_{k-1}) + \frac{T \cdot (V_N(t_{k-1}) + V_N(t_k))}{2(R_M + H(t_{k-1}))} \quad (2.2.37)$$

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}) + \frac{T \cdot (V_E(t_{k-1}) + V_E(t_k))}{2(R_N + H(t_{k-1}))} \sec L(t_{k-1}) \quad (2.2.38)$$

$$H(t_k) = H(t_{k-1}) + \frac{T \cdot (V_U(t_{k-1}) + V_U(t_k))}{2} \quad (2.2.39)$$

2.3 捷联惯导系统的误差方程

通常将 SINS 看成是一个理想系统来分析其工作原理。由于 SINS 无论在结构安装、元部件特性或其它工程环节中都不可避免地存在误差，这些都必然会产生影响 SINS 性能的误差。对 SINS 的误差进行分析，对系统设计和器件选型有帮助，在实际中可研究限制系统性能的关键因素，并适当进行相应的改进。在 SINS 误差分析的基础上进行 SINS 初始对准的研究，建立相应误差量的动态误差方程即 SINS 误差模型，才能建立初始对准模型。因此，要弄清 SINS 系统初始对准原理和其他一些相关问题，首先需分析 SINS 的误差方程^[131]。

2.3.1 姿态误差方程

类似于 n 系到 b 系的坐标转换关系， n 系经过三次转动得到 c 系，即：

$$Ox_n y_n z_n \xrightarrow{\phi_U} Ox_{c1} y_{c1} z_{c1} \xrightarrow{\phi_E} Ox_{c2} y_{c2} z_{c2} \xrightarrow{\phi_N} Ox_c y_c z_c$$

当水平失准角 ϕ_E 、 ϕ_N 为小角度，而方位失准角为大角度时，由于 $\sin \phi_E \approx \phi_E$ ， $\cos \phi_E \approx 1$ ， $\cos \phi_N \approx 1$ ， $\sin \phi_N \approx \phi_N$ ，可以得到下列方向余弦矩阵：

$$C_n^{c1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_U & \sin \phi_U & 0 \\ -\sin \phi_U & \cos \phi_U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

$$C_{c1}^{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_E & \sin \phi_E \\ 0 & -\sin \phi_E & \cos \phi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi_E \\ 0 & -\phi_E & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

$$C_{c2}^c = \begin{bmatrix} \cos \phi_N & 0 & -\sin \phi_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_N & 0 & \cos \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_N & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

因此， n 系到 c 系的方向余弦矩阵为：

$$\begin{aligned} C_n^c &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_N & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi_E \\ 0 & -\phi_E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_U & \sin \phi_U & 0 \\ -\sin \phi_U & \cos \phi_U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_U & \sin \phi_U & -\phi_N \\ -\sin \phi_U & \cos \phi_U & \phi_E \\ \phi_N \cos \phi_U + \phi_E \sin \phi_U & \phi_N \sin \phi_U - \phi_E \cos \phi_U & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_U & \sin \phi_U & -\phi_N \\ -\sin \phi_U & \cos \phi_U & \phi_E \\ \bar{\phi}_N & -\bar{\phi}_E & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

其中， $\bar{\phi}_N = \phi_N \cos \phi_U + \phi_E \sin \phi_U$ ， $\bar{\phi}_E = -(\phi_N \sin \phi_U - \phi_E \cos \phi_U)$ 。

c 系相对 n 系的角速度 $\omega_{nc}^c = [\omega_{ncx}^c \quad \omega_{ncy}^c \quad \omega_{ncz}^c]^T$ 为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{ncx}^c \\ \omega_{ncy}^c \\ \omega_{ncz}^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_N & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi_E \\ 0 & -\phi_E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_N & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_N \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\phi_N \dot{\phi}_U + \dot{\phi}_E \\ \phi_E \dot{\phi}_U + \dot{\phi}_N \\ \dot{\phi}_U + \phi_N \dot{\phi}_E \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi}_E \\ \dot{\phi}_N \\ \dot{\phi}_U \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

从而有：

$$\dot{\phi} = [\omega_{ncx}^c \quad \omega_{ncy}^c \quad \omega_{ncz}^c]^T \quad (2.3.6)$$

由 Possino 方程，有方向余弦矩阵 C_c^n 的微分方程为：

$$\dot{C}_c^n = C_c^n [\omega_{nc}^c \times] \quad (2.3.7)$$

C_c^n 的微分方程还可以表示为：

$$\dot{C}_c^n = C_c^n [\omega_{ic}^c \times] - [\omega_{in}^n \times] C_c^n \quad (2.3.8)$$

以上两式右边相等，即：

$$C_c^n [\omega_{nc}^c \times] = C_c^n [\omega_{ic}^c \times] - [\omega_{in}^n \times] C_c^n \quad (2.3.9)$$

上式左右两边同时乘以 C_n^c ，从而得到：

$$[\omega_{nc}^c \times] = [\omega_{ic}^c \times] - C_n^c [\omega_{in}^n \times] C_c^n \quad (2.3.10)$$

根据向量与其反对称阵的对应关系，由上式可得：

$$\omega_{nc}^c = \omega_{ic}^c - C_n^c \omega_{in}^n \quad (2.3.11)$$

又因为：

$$\omega_{ic}^c = \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + C_b^c \varepsilon^b \quad (2.3.12)$$

所以有：

$$\begin{aligned} \omega_{nc}^c &= \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + C_b^c \varepsilon^b - C_n^c \omega_{in}^n \\ &= (\mathbf{I} - C_n^c) \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + C_b^c \varepsilon^b \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

将式 (2.3.6) 代入式 (2.3.13)，得到姿态误差方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= (\mathbf{I} - C_n^c) \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + C_b^c \varepsilon^b \\ &= (\mathbf{I} - C_n^c) (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) + (\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) + C_b^c \varepsilon^b \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

2.3.2 速度误差方程

定义速度误差为 $\delta V^n = \hat{V}^n - V^n$ ，由 SINS 的速度微分方程式 (2.2.2) 可得：

$$\delta \dot{V}^n = \delta f^n - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n + \delta g^n \quad (2.3.15)$$

因为

$$\begin{aligned} \delta f^n &= \hat{f}^n - f^n = C_b^c \tilde{f} - f^n = C_b^c (C_n^b f^n + \nabla^b) - f^n \\ &= (C_n^c - \mathbf{I}) f^n + C_b^c \nabla^b \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

通常将重力向量作为已知量，即 $\delta g^n = 0$ ，将式 (2.3.16) 代入式 (2.3.15)，得到速度误差方程为：

$$\delta \dot{V}^n = (C_n^c - \mathbf{I}) f^n - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n + C_b^c \nabla^b \quad (2.3.17)$$

2.3.3 初始对准的非线性状态方程及测量方程

由于晃动基座下初始对准过程中通常不考虑位置误差的影响，即 $\delta\omega_{ie}^n = 0$ ，初始对准非线性状态方程为：

$$\begin{cases} \delta \dot{V}^n = (C_n^c - \mathbf{I}) f^n - \delta\omega_{en}^n \times V^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n + C_b^c \nabla^b \\ \dot{\phi} = (\mathbf{I} - C_n^c) (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) + \delta\omega_{en}^n + C_b^c \varepsilon^b \end{cases} \quad (2.3.18)$$

将式 (2.3.4) 代入式 (2.3.18) 并展开，并定义系统的状态向量为

$x = [\delta V_E, \delta V_N, \phi_E, \phi_N, \phi_U, \nabla_E, \nabla_N, \varepsilon_E, \varepsilon_N, \varepsilon_U]$, 可得滤波用状态方程为:

$$f(x) = \begin{cases} (\cos \phi_U - 1)f_E + \sin \phi_U f_N + \delta V_E V_N \frac{\tan L}{R_N + H} - \phi_N f_U + \delta V_N (2\omega_{ie} \sin L + V_E \frac{\tan L}{R_N + H}) + \nabla_E \\ -\sin \phi_U f_E + (\cos \phi_U - 1)f_N + \phi_E f_U - 2\delta V_E (\omega_{ie} \sin L + V_E \frac{\tan L}{R_N + H}) + \nabla_N \\ -(1 - \cos \phi_U) \frac{V_N}{R_M + H} - \sin \phi_U (\omega_{ie} \cos L + \frac{V_E}{R_N + H}) + \phi_N (\omega_{ie} \sin L + V_E \frac{\tan L}{R_N + H}) - \frac{\delta V_N}{R_N + H} - \varepsilon_E \\ -\sin \phi_U \frac{V_N}{R_M + H} + (1 - \cos \phi_U) (\omega_{ie} \cos L + \frac{V_E}{R_N + H}) - \phi_E (\omega_{ie} \sin L + V_E \frac{\tan L}{R_N + H}) + \frac{\delta V_E}{R_N + H} - \varepsilon_N \\ (\phi_N \cos \phi_U + \phi_E \sin \phi_U) \frac{V_N}{R_M + H} + \delta V_E \frac{\tan L}{R_N + H} + (-\phi_N \sin \phi_U + \phi_E \cos \phi_U) (\omega_{ie} \cos L + \frac{V_E}{R_N + H}) - \varepsilon_U \\ 0_{5 \times 1} \end{cases} \quad (2.3.19)$$

其中, $\nabla_E = C_{11} \nabla_x + C_{12} \nabla_y$, $\nabla_N = C_{21} \nabla_x + C_{22} \nabla_y$, $\varepsilon_E = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z$, $\varepsilon_N = C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \varepsilon_z$, $\varepsilon_U = C_{31} \varepsilon_x + C_{32} \varepsilon_y + C_{33} \varepsilon_z$, ∇_x 、 ∇_y 分别是捷联惯性导航系统中 x 向和 y 向加速度计的偏差, ε_x 、 ε_y 、 ε_z 分别是捷联惯性导航系统中 x 、 y 、 z 向陀螺仪的常值漂移。

测量方程是 SINS 和高精度差分 GPS 的东向、北向速度误差, 则初始对准的非线性滤波用状态空间模型可写为:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + w \\ y = H_{2 \times 10} x + v \end{cases} \quad (2.3.20)$$

其中, w 是过程噪声; v 是测量噪声; $H_{2 \times 10} = [I_{2 \times 2} \quad 0_{2 \times 8}]$ 是线性测量矩阵。

2.4 初始对准基本原理

在进入导航工作之前, 捷联导航系统需要在计算机中建立一个能够准确的描述载体坐标系 b 与导航坐标系 n 的姿态变换阵 C_b^n , 以便在此基础上通过前面介绍的更新方程得到正确的导航参数。SINS 初始对准的目的就是力图建立这样一个姿态变换阵。

数学平台的误差方程是 SINS 初始对准的基础, 对准过程不但用到了陀螺仪的输出信息, 还利用了加速度计的输出信息。加速度计的测量精度决定水平对准精度, 等效东向陀螺仪的漂移大小决定方位对准精度。因此, 为提高 SINS 的初始对准精度, 首先必须实施对惯性仪表误差进行补偿的有效措施。在 SINS 中, 惯性仪表直接固联在载体上, 代替物理平台是计算数学平台, 初始对准的过程就是确定初始时刻从载体

坐标系到导航坐标系的初始姿态矩阵 C_b^n 的过程。初始对准过程分为粗对准和精对准两个阶段，首先进行粗对准，其特点是对准速度快，但对准精度较低，仅为进一步的精对准提供基本满足要求的初始姿态矩阵 \hat{C}_b^n ；在精对准阶段，通过处理惯性仪表的输出信息以及外测量信息，精确的估计出计算姿态矩阵与真实姿态矩阵的失准角，从而建立起准确的初始姿态矩阵 C_b^n 。

2.4.1 粗对准

对于粗对准来说，要求尽快地获得某一精度范围内的数学平台，粗对准的主要指标是尽可能地缩短对准时间。为了解决晃动基座条件下粗对准的问题，避免只能在静基座下进行粗对准的限制，本方案采用惯性凝固粗对准方法^[132]。这种方法考虑了干扰角速度和干扰加速度的影响。

首先，定义一个新的坐标系名称：惯性凝固坐标系 i_{b_0} ，它是在 t_0 时刻将载体坐标系 b 经惯性凝固后得到，其中， t_0 为粗对准的起始时刻。捷联矩阵可以表示为：

$$C_b^n = C_e^n C_i^e C_{i_{b_0}}^i C_b^{i_{b_0}} \quad (2.4.1)$$

式 (2.4.1) 中 C_e^n 为导航坐标系 n 到地球坐标系 e 之间的位置矩阵，可由载体所在点的经度 λ 、纬度 L 来确定：

$$C_e^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin L & \cos L \\ 0 & -\cos L & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

经过整理可得：

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin L \cos \lambda & \sin L \sin \lambda & \cos L \\ \cos L \cos \lambda & -\cos L \sin \lambda & \sin L \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

式 (2.4.1) 中 C_i^e 为地球坐标系 e 和惯性坐标系 i 之间的方向余弦矩阵，可由时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 确定：

$$C_i^e = \begin{bmatrix} \cos \omega_{ie} \Delta t & \sin \omega_{ie} \Delta t & 0 \\ -\sin \omega_{ie} \Delta t & \cos \omega_{ie} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

$C_b^{i_{b_0}}$ 为惯性凝固坐标系 i_{b_0} 和载体坐标系 b 之间的方向余弦矩阵，这个矩阵可以利用陀螺和加速度计的输出，通过四元数更新求解获得，递推更新计算的初始矩阵是单位矩阵：

$$C_b^{i_{b_0}}(t_0) = I \quad (2.4.5)$$

$C_{i_{b_0}}^i$ 为惯性坐标系 i 与惯性凝固坐标系 i_{b_0} 之间的方向余弦矩阵。根据式 (2.4.3) 和式 (2.4.4)，可以直接对矩阵 C_e^n 和 C_i^e 进行估算，通过四元数更新算法可以计算 $C_b^{i_{b_0}}$ 。所以，惯性凝固粗对准问题就转化为求解矩阵 $C_{i_{b_0}}^i$ 。

有风的晃动条件下，存在较大幅度摇摆和垂荡、纵荡、横荡运动。此时，加速度计的输出 \tilde{f}^b 投影到惯性凝固坐标系 i_{b_0} 为：

$$\tilde{f}^{i_{b_0}} = C_b^{i_{b_0}} \tilde{f}^b \quad (2.4.6)$$

加速度计输出比力 \tilde{f}^b 包括三部分：重力加速度 g^b ，垂荡、纵荡、横荡产生的干扰加速度 a_D^b ，加速度计的零位误差 ∇^b ，即：

$$\tilde{f}^b = g^b + a_D^b + \nabla^b \quad (2.4.7)$$

在式 (2.4.7) 中，由于加速度计的零位误差是小量，所以，可以忽略掉这部分的影响。

在式 (2.4.1) 中，载体坐标系和惯性凝固坐标系间的方向余弦矩阵可以写为：

$$C_b^{i_{b_0}} = C_i^{i_{b_0}} C_b^i \quad (2.4.8)$$

在 $\Delta t = t - t_0$ 内，对式 (2.4.7) 进行积分：

$$\int_{t_0}^{t_k} \tilde{f}^{i_{b_0}} dt = \int_{t_0}^{t_k} C_b^{i_{b_0}} \tilde{f}^b dt \quad (2.4.9)$$

记：

$$\tilde{v}^{i_{b_0}} = \int_{t_0}^{t_k} \tilde{f}^{i_{b_0}} dt \quad (2.4.10)$$

考虑到式 (2.4.7)、式 (2.4.8) 有：

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{i_{b_0}} &= \int_{t_0}^{t_k} (C_b^{i_{b_0}} g^b + C_b^{i_{b_0}} a_D^b) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_k} (C_i^{i_{b_0}} C_b^i g^b + C_b^{i_{b_0}} a_D^b) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_k} (C_i^{i_{b_0}} g^i) dt + \int_{t_0}^{t_k} (C_b^{i_{b_0}} a_D^b) dt \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

式 (2.4.11) 中的第二项为：

$$\int_{t_0}^{t_k} (C_b^{i_{b_0}} a_D^b) dt = \int_{t_0}^{t_k} (a_D^{i_{b_0}}) dt \quad (2.4.12)$$

当载体受到线性位移运动干扰时，例如：垂荡、纵荡、横荡运动。这种干扰加速度近似为周期变化，因此在一段较长时间段内这种干扰加速度的积分值为 0。

于是，式 (2.4.11) 可以简化为：

$$\tilde{v}^{i_{b_0}} = C_i^{i_{b_0}} v^i \quad (2.4.13)$$

又因为:

$$g^i = C_e^i C_n^e g^n \quad (2.4.14)$$

将式 (2.2.3) 和式 (2.4.4) 代入式 (2.4.14) 中, 可以得到:

$$g^i = \begin{bmatrix} -g \cos L \cos[\lambda + \omega_{ie}(t - t_0)] \\ -g \cos L \sin[\lambda + \omega_{ie}(t - t_0)] \\ -g \sin L \end{bmatrix} \quad (2.4.15)$$

在时间段 t_0 到 t_k 内, 对式 (2.4.15) 进行积分得到:

$$v^i(t_k) = \begin{bmatrix} \frac{g \cos L [\sin(\lambda + \omega_{ie}\Delta t) - \sin \lambda]}{\omega_{ie}} \\ \frac{g \cos L [\cos \lambda - \cos(\lambda + \omega_{ie}\Delta t)]}{\omega_{ie}} \\ g \sin L \Delta t \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

其中, 积分区间为 $\Delta t = t_k - t_0$ 。

同时, 对式 (2.4.15) 在时间段 $t_0 \sim t_k$ 内积分:

$$\tilde{v}^{i_{b_0}} = \int_{t_0}^{t_k} \tilde{f}^{i_{b_0}} dt = \int_{t_0}^{t_k} C_b^{i_{b_0}} \tilde{f}^b dt \quad (2.4.17)$$

利用四元数更新算法可以递推计算 $C_b^{i_{b_0}}$, 加速度计输出 \tilde{f}^b 可以直接得到, 这样, 就可以进行积分运算计算 $\tilde{v}^{i_{b_0}}$ 。

在式 (2.4.13) 中, 分别在 t_{k_1} 时刻和 t_{k_2} 时刻计算 $\tilde{v}^{i_{b_0}}$ 和 v^i , t_{k_1} 时刻和 t_{k_2} 时刻之间的关系为 $t_0 < t_{k_1} < t_{k_2}$ 。于是, 可以构造下式:

$$\begin{cases} \tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_1}) = C_i^{i_{b_0}} v^i(t_{k_1}) \\ \tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_2}) = C_i^{i_{b_0}} v^i(t_{k_2}) \end{cases} \quad (2.4.18)$$

计算 $C_i^{i_{b_0}}$ 中的 9 个未知元素需要 9 个方程。通过式 (2.4.18) 中的 2 个三维向量可以获得 6 个方程, 所以, 还需要 3 个方程。根据传统粗对准方法, 利用 $\tilde{v}^{i_{b_0}}$ 和 v^i 进行叉乘, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_1}) \times \tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_2}) &= [C_i^{i_{b_0}} v^i(t_{k_1})] \times [C_i^{i_{b_0}} v^i(t_{k_2})] \\ &= C_i^{i_{b_0}} v^i(t_{k_1}) \times v^i(t_{k_2}) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

由式 (2.4.18) 和式 (2.4.19), 可得:

$$C_i^{i_{b_0}} = \begin{bmatrix} [v^i(t_{k_1})]^T \\ [v^i(t_{k_2})]^T \\ [v^i(t_{k_1}) \times v^i(t_{k_2})]^T \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} [\tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_1})]^T \\ [\tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_2})]^T \\ [\tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_1}) \times \tilde{v}^{i_{b_0}}(t_{k_2})]^T \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

v^i 可以通过式 (2.4.16) 计算得到, \tilde{v}^{b_0} 可以通过式 (2.4.17) 计算得到, 再由式 (2.4.20) 可以计算出 $C_i^{b_0}$ 。通过式 (2.2.3) 和式 (2.4.4) 可以直接计算出 C_e^n 和 C_i^e 。利用四元数更新算法, 可以递推计算出 $C_b^{i_0}$, 最后, 将它们带入到式 (2.4.1) 中计算出捷联姿态矩阵。

采用 2.5 节设置的仿真条件, 在白噪声环境中, 采用惯性凝固粗对准方法, 共进行了 50 次粗对准仿真试验, 每次仿真时间为 180 秒。且取 $t_{k1} = 50s$ 、 $t_{k2} = 180s$, 晃动基座下的仿真曲线如图 2.3、图 2.4 和图 2.5 所示。

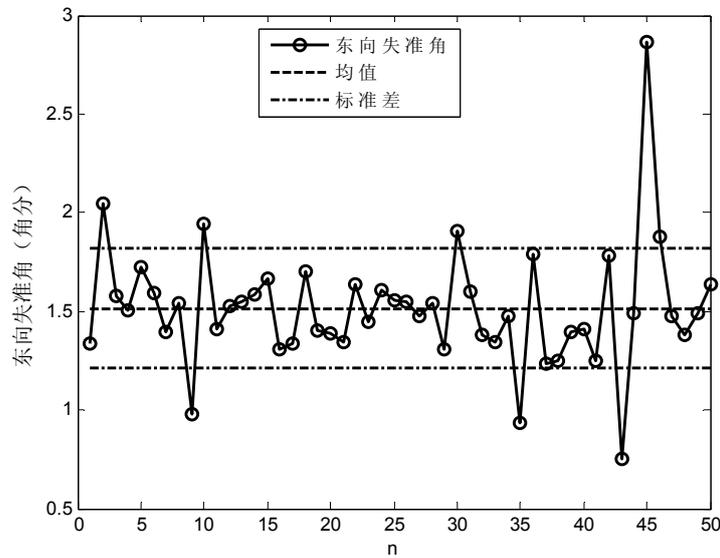


图 2.3 东向失准角

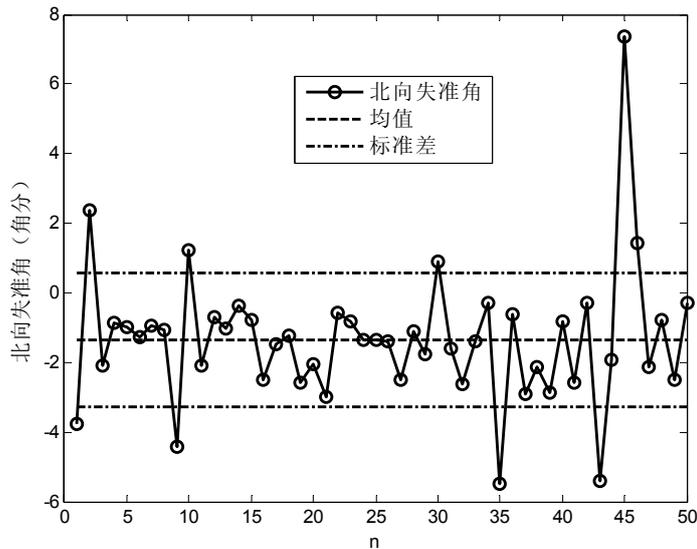


图 2.4 北向失准角

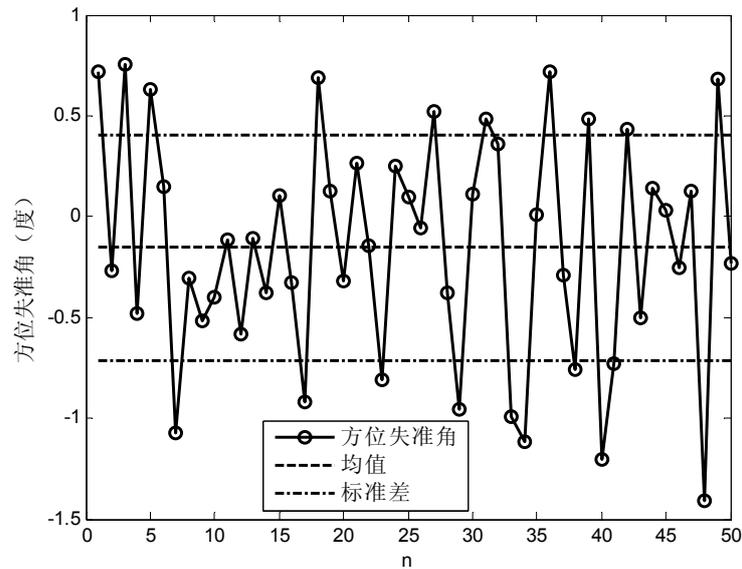


图 2.5 方位失准角

由图可以看出：由 50 个样本的东向、北向、方位失准角的均值分别为： $1.515'$ 、 $-1.347'$ 、 -0.1545257° ，东向、北向、方位失准角的标准差分别为： $0.305'$ 、 $1.927'$ 、 0.5575518° 。水平精度已经达到精对准的要求，不论外界条件如何恶劣，方位失准角都不会超过 1.5° ，因此，这种粗对准法无论载体处于静基座，还是载体的三轴存在垂荡、纵荡、横荡以及高频干扰的晃动基座，都能使粗对准后三个误差失准角达到进行精对准的前提条件，精对准在此基础上可进行。

相对于解析式粗对准、水平调平+方位估算，惯性凝固粗对准方法更有优势，粗对准时间适中，能适用于大晃动摇摆环境，具有较强的抗干扰能力，特别对于干扰线速度通过经时间进行积分，抑制效果更明显，所以此方法更具有通用性^[132]。

2.4.2 精对准

在粗对准的基础上通过寻找一个更接近 C_b^n 的捷联姿态矩阵 C_b^n 来替换粗对准结束后的姿态矩阵 C_b^n 是精对准的目的，对准精度是主要指标是精对准后的姿态矩阵 C_b^n 比粗对准结束时的姿态矩阵 C_b^n 能更精确的描述载体坐标系 b 与导航标系 n 的变换关系，精对准的过程就是 n_1 系自动趋进 n 系的过程。此外，在粗对准中没有考虑加速度计和陀螺的测量误差，由于加速度计误差和陀螺漂移均为随机误差，为了提高对准精度，必须在精对准过程中加以考虑。为进一步补偿陀螺漂移率和标定刻度系数，一般在精对准过程中要进行陀螺的测漂和定标，来提高精对准的精度。精对准阶段，通过处理惯性仪表的输出信息及外测量信息，精确估计出计算导航坐标系与真实导航坐标系之

间的失准角，从而建立起准确的初始捷联姿态矩阵。精对准结束时的精度就是捷联惯导系统进入导航工作状态时的初始精度。

对平台惯导系统，无论是用水平对准回路实现水平对准，还是用方位对准回路完成方位对准，都是基于经典控制理论的频域分析法的初始对准方法，都是将载体的干扰运动取为常值，但载体上的实际干扰运动往往都是随机的。在 SINS 初始对准中，如何消除载体的干扰运动所引起的误差是最突出的问题，数字滤波器的设计解决是这一问题的重要途径，将现代数字滤波技术应用于捷联惯导系统的精对准是较理想的方案。

由于各种外部干扰因素较强，晃动基座上的捷联惯导系统在粗对准后仍会得到方位角为大失准角，基于失准角均为小角度假设建立的线性对准模型已不能准确描述系统的动态误差传播特性，传统的 KF 算法也不能满足对准精度的要求，因此对于 SINS 来说，研究基于大失准角非线性模型的非线性滤波方法的对准技术是十分必要，将在后续章节中详细研究非线性滤波方法在晃动基座下初始对准中的应用^[130]。

2.5 初始对准仿真方案

2.5.1 总体仿真方案

在特定的仿真环境设置下，轨迹发生器生成加速度计和陀螺的信号，在粗对准的基础上经过捷联解算获得载体姿态、速度和位置。滤波器的观测量是捷联速度与 GPS 仿真器的速度差。初始对准状态方程的参数是加速度计信号，捷联姿态、速度和位置。在上述信息的基础上，使用不同的非线性滤波算法完成初始对准，估计出三个失准角。原理如图 2.6 所示。

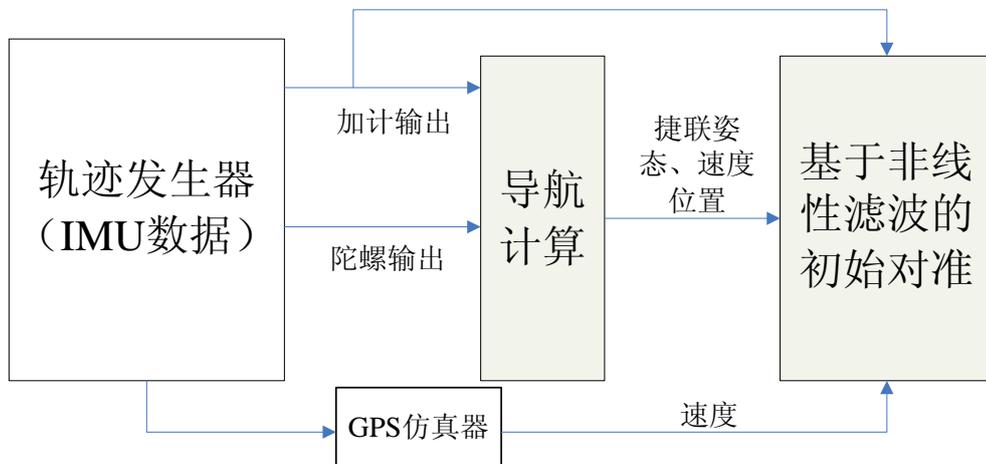


图 2.6 初始对准原理图

2.5.2 晃动基座的仿真

为验证滤波算法的有效性，并考虑到本实验室的型号产品和科研多是针对车载基座，在仿真中，与文献[133]相比，天向线速度的幅值由 0.3m 降为 0.03m，其余保持不变。以期用恶劣的仿真条件验证算法的有效性，待将算法应用到晃动幅值较小的车载基座试验中仍能保持其特性不表。晃动基座仿真环境具体设置如下：

(1) 在晃动条件下，载体的方位角 ψ 、俯仰角 θ 、横滚角 γ 做周期变化：

$$\psi = 30^\circ + 5^\circ \cos\left(\frac{2\pi t}{7} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.5.1)$$

$$\theta = 7^\circ \cos\left(\frac{2\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.5.2)$$

$$\gamma = 10^\circ \cos\left(\frac{2\pi t}{6} + \frac{\pi}{7}\right) \quad (2.5.3)$$

(2) 由横荡、纵荡和垂荡引起的线速度为：

$$V_{D_i} = A_{D_i} \omega_{D_i} \cos(\omega_{D_i} t + \phi_{D_i}), i = x, y, z \quad (2.5.4)$$

取 $A_{D_x} = 0.02\text{m}$ ， $A_{D_y} = 0.03\text{m}$ ， $A_{D_z} = 0.03\text{m}$ ； $\omega_{D_i} = 2\pi / T_{D_i}$ ， $T_{D_x} = 7\text{s}$ ， $T_{D_y} = 6\text{s}$ ， $T_{D_z} = 8\text{s}$ 。 ϕ_{D_i} 为 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布的随机相位。

(3) 存在高频震动引起的线速度为：

$$V_{DH_i} = \frac{A_{DH_i}}{2\pi f_{DH_i}} \cos(2\pi f_{DH_i} t + \phi_{DH_i}), i = x, y, z \quad (2.5.5)$$

取 $A_{DH_x} = 4.8\text{g}$ ， $A_{DH_y} = 3.8\text{g}$ ， $A_{DH_z} = 4\text{g}$ ； $f_{DH_x} = 300\text{Hz}$ ， $f_{DH_y} = 250\text{Hz}$ ， $f_{DH_z} = 400\text{Hz}$ 。 ϕ_{DH_i} 为 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布的随机相位。

2.5.3 惯性器件的误差仿真

为验证非线性滤波算法的有效性，惯性器件的误差分为白噪声误差和一阶马尔科夫噪声误差。

(1) 白噪声误差

为不失一般性，仿真时选取中等精度的惯性器件，具体参数为：

陀螺的常值漂移为 $0.02^\circ/\text{h}$ ，陀螺随机游走系数为 $0.01^\circ/\sqrt{\text{h}}$ ，加速度计常值偏置误差为 $100 \times 10^{-6}\text{g}$ ，加速度计测量白噪声标准差为 $50 \times 10^{-6}\text{g}$ ，不考虑其它误差项。

(2) 一阶马尔科夫噪声误差

仅考虑随时间漂移误差。假设三个陀螺误差模型相同，取陀螺漂移为：

$$\varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_r + w_g \quad (2.5.6)$$

式中， ε_b 为随机常数， ε_r 为一阶马尔科夫过程， w_g 为零均值高斯白噪声，其方差为 $(0.01^\circ / \sqrt{h})^2$ 。

数学模型为：

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_b = 0 \\ \dot{\varepsilon}_r = -\frac{\varepsilon_r}{T_r} + w_r \end{cases} \quad (3.5.7)$$

式中， $T_r = 3600s$ ； w_r 是零均值白噪声，其方差为 $(0.1^\circ / h)^2$ 。

假设加速度计在三个轴向的误差结构相同，考虑为一阶马尔科夫过程，则有：

$$\dot{\nabla}_a = -\frac{\nabla_a}{T_a} + w_a \quad (2.5.8)$$

式中， $T_a = 900s$ ； w_a 是零均值高斯白噪声，其方差为 $(1 \times 10^{-4} g)^2$ 。

2.5.4 滤波器初始值

如无特殊说明，后续三章的非线性滤波器的初始状态、协方差、过程噪声方差和测量噪声方差均相同，分别为：

$$\begin{aligned} x_0 &= [0, 0, 1^\circ, 1^\circ, 10^\circ, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ P_0 &= \text{diag}\{(0.2m/s)^2, (0.2m/s)^2, (1^\circ)^2, (1^\circ)^2, (15^\circ)^2, (2 \times 10^{-4}g)^2, (2 \times 10^{-4}g)^2, \\ &\quad (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2\} \\ Q &= \text{diag}\{(5 \times 10^{-4}g)^2, (5 \times 10^{-4}g)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ R &= \text{diag}\{(0.1m/s)^2, (0.1m/s)^2\} \end{aligned}$$

式中， $\text{diag}\{\bullet\}$ 表示对角矩阵。

2.6 本章小结

在本章中，给出了捷联惯导系统的更新方程和晃动基座初始对准问题的非线性误差模型，介绍了初始对准的基本原理，并详细介绍了适用于晃动基座的惯性系粗对准算法，用仿真验证了算法的有效性。最后介绍了本论文中晃动基座初始对准的仿真环境和滤波器的相关初值，为后续三章奠定基础。

第 3 章 Sigma 点卡尔曼滤波在初始对准中的应用

3.1 引言

实际系统一般都是非线性的，很难找到一种严格的递推算法对其进行理论分析，通常用近似方法解决非线性滤波问题。近十年的研究热点是 Sigma 点卡尔曼滤波算法 (SPKF)，根据近似方法可分为三类。第一类方法是寻找非线性函数线性近似，线性化非线性模型，通过插值多项式近似得到了插值滤波，例如 DDF。第二类方法是相对近似非线性函数本身而言，更容易近似基于非线性函数概率分布，通过 UT 变换一组确定的点集来表征状态的统计特性——均值和方差等，能直接应非线性模型来求解，即无轨迹卡尔曼滤波 (UKF)。第三类从数值积分的角度分析^[100]，其实质是一个确定性函数与高斯分布乘积的求积分问题，利用不同的求积分方法，提出了各种形式的滤波算法，对原有方法的改进不断被提出，例如 2009 年提出的容积 Kalman 滤波 (Cubature Kalman Filter, CKF) 是一种独立于 EKF、DDF 和 UKF 算法体系的新的滤波策略^[102]。

对于捷联惯导系统，采用滤波技术进行初始对准估计的基础是准确地建立误差方程，当系统模型存在误差时，会影响滤波的精度，甚至使滤波算法发散，在第二章建立了晃动基座下初始对准的非线性误差模型。本章分析了三类 SPKF 算法在上述模型上的性能，并把两种新型的 SPKF 应用到非线性初始对准上，结合两种的噪声仿真环境，分析了算法的性能。

在 3.2 节，讨论贝叶斯原理实现状态估计的过程；在 3.3 节，比较分析了三类 SPKF 的算法性能，并用仿真算例验证理论分析；在 3.4 节，在晃动基座初始对准中，应用了带噪声估计器的自适应 UKF (AUKF)，讨论其在不同噪声环境下初始对失准问题；在 3.5 节，在晃动基座初始对准中，提出一种新的 SPKF 滤波方法——自适应分裂合并的无轨迹高斯和滤波 (ASMUGSF)，并讨论其在不同噪声环境下初始对失准问题。在 3.6 节总结本章内容。

3.2 贝叶斯递归估计

3.2.1 贝叶斯递归解

根据第二章误差模型的形式，本文对非线性滤波算法的讨论均基于如下具有加性

噪声的离散非线性高斯系统:

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} & (1) \\ y_k = h_k(x_k) + v_k & (2) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

式中, $x_k \in \mathfrak{R}^{n_x}$ 、 $y_k \in \mathfrak{R}^{n_y}$ 分别为状态向量和测量向量; (1)、(2) 分别为二阶可微的状态方程与测量方程; $w_k \in \mathfrak{R}^{n_w}$ 、 $v_k \in \mathfrak{R}^{n_v}$ 分别是过程噪声和测量噪声, 过程噪声和测量噪声是互不相关的零均值白噪声, 且满足 $E(w_k) = 0$, $E(v_k) = 0$, $E(w_k w_k^T) = Q_k$, $E(v_k v_k^T) = R_k$, $E(w_k v_k^T) = 0$ 。

对上述系统状态空间模型应用贝叶斯规则, 系统状态的后验概率密度函数可以分解为如下形式:

$$p(x_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_{1:k} | x_k) p(x_k)}{p(y_{1:k})} = \frac{p(y_k | y_{1:k-1}, x_k) p(y_{1:k-1} | x_k) p(x_k)}{p(y_k | y_{1:k-1}) p(y_{1:k-1})} \quad (3.2.2)$$

由于 $p(y_{1:k-1} | x_k) = p(x_k | y_{1:k-1}) p(y_{1:k-1}) / p(x_k)$, 将其代入式 (3.2.2) 中, 得到:

$$p(x_k | y_{1:k}) = p(y_k | y_{1:k-1}, x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) / p(y_k | y_{1:k-1}) \quad (3.2.3)$$

根据系统测量方程, k 时刻的测量信息 y_k 依赖于当前系统状态 x_k , 则上式可进一步写为:

$$p(x_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1})}{\int p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) dx_k} \quad (3.2.4)$$

上式中分母为分子项的积分函数, 使后验概率分布函数积分为 1, 故可设归一化因子 $C_k = (\int p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) dx_k)^{-1}$, 则后验概率密度函数为:

$$p(x_k | y_{1:k}) = C_k p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) = C_k p(y_k | x_k) \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \quad (3.2.5)$$

根据系统状态空间模型 (3.2.1), 可得系统状态先验分布和似然概率分布为:

$$p(x_k | x_{k-1}) = \int \delta(x_k - f_{k-1}(x_{k-1})) p(w_{k-1}) dw_{k-1} \quad (3.2.6)$$

$$p(y_k | x_k) = \int \delta(y_k - h_k(x_k)) p(v_k) dv_k \quad (3.2.7)$$

其中 $\delta(\bullet)$ 为 Dirac-delta 函数。

根据式 (3.2.5), 由系统 $k-1$ 时刻的后验概率密度函数 $p(x_{k-1} | y_{1:k-1})$ 与系统状态传递模型计算得到系统状态的先验概率密度函数 $p(x_k | x_{k-1})$, 结合系统测量方程得到的似然概率分布函数 $p(y_k | x_k)$, 递推计算系统 k 时刻的后验概率密度函数 $p(x_k | y_{1:k})$ [68]。

3.2.2 高斯贝叶斯递归解

若系统随机变量满足正态假设，以状态估计的均方误差达到最小作为最优估计准则，滤波过程的实现包括一步预测和测量修正两个阶段。不管条件密度函数 $p(x_k | y_k)$ 的特性如何，最小均方估计就是条件均值 $\mu_{x|y} = E[x | y]$ 。在本小节中，下面推导公式中的符号 $f(\bullet)$ 和 $h(\bullet)$ 表示线性系统的状态过程及测量过程。

一步预测是根据 $k-1$ 时刻的状态估计预测 k 时刻的状态，即根据所有过去时刻的测量信息 $y_{1:k-1} = [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}]$ 对 x_k 作最小方差估计：

$$\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k | y_{1:k-1}] \quad (3.2.8)$$

用误差协方差阵来描述状态估计的优劣，即：

$$P_{k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T] \quad (3.2.9)$$

获得 k 时刻的测量信息 y_k 后，对预测估计值进行修正，则由 (3.2.5) 可导出系统状态后验概率分布的均值 \hat{x}_k 和协方差矩阵 \hat{P}_k 的递归更新关系式为^[69]：

$$\hat{x}_k = E[x_k | y_{1:k}] = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_k) \quad (3.2.10)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - K_k P_{yy} K_k^T \quad (3.2.11)$$

$$K_k = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_k)^T] E[(y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T]^{-1} = P_{xy} P_{yy}^{-1} \quad (3.2.12)$$

$$P_{xy} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_k)^T] \quad (3.2.13)$$

$$P_{yy} = E[(y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T] \quad (3.2.14)$$

式中， $\hat{x}_{k|k-1}$ 和 $P_{k|k-1}$ 分别为系统状态先验概率分布的均值和协方差矩阵， \hat{y}_k 和 P_{yy} 为系统似然概率分布的均值和协方差矩阵。从 (3.2.10) ~ (3.2.14) 易知，贝叶斯递归解可分解为预测 $\hat{x}_{k|k-1}$ 加修正 $K_k(y_k - \hat{y}_k)$ 两部分，而状态预测误差和新息的互相关矩阵与新息自相关矩阵的比值就是修正增益。

3.3 Sigma 点卡尔曼滤波算法在初始对准中的应用

对于现实世界中的大多数非线性系统，则难以有效地处理多维积分项，从而造成该方法难以直接应用到很多情况中。为了解决这一问题，近四十年来提出了许多对贝叶斯递归估计最优解的逼近方法，其中应用最为广泛的是扩展卡尔曼滤波算法 (EKF)，该算法的核心在于应用状态转移方程和测量方程的一阶泰勒展开式来逼近

非线性系统，从而扩大扩展卡尔曼滤波算法的使用范围。然而 EKF 方法存在显著的缺点。为了克服 EKF 的缺点，学者们提出采用插值多项式（如 DDF）、UT 变换（UKF）和高斯积分（如 CKF）等精度更高的近似方法，在统计线性化理论基础上，将它们统一为 Sigma 点卡尔曼滤波（SPKF）方法。本节首先介绍扩展卡尔曼滤波（EKF），并简单分析其两个显著的缺点。

3.3.1 扩展卡尔曼滤波

EKF 围绕状态估计值 \hat{x}_{k-1} 将非线性函数 $f(\cdot)$ 展开成泰勒级数并取其一阶近似，围绕状态预测值 $\hat{x}_{k|k-1}$ 将非线性函数 $h(\cdot)$ 展成泰勒级数并取其一阶近似，从而得到非线性系统的近似线性化模型：

$$x_k \approx \Phi_{k|k-1} x_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.3.1)$$

$$y_k \approx H_k x_k + v_k \quad (3.3.2)$$

其中， $\Phi_{k|k-1}$ 和 H_k 分别为向量函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的 Jacobian 矩阵：

$$\Phi_{k|k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{n_x}} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^{n_x}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{n_x}}{\partial x^1} & \frac{\partial f^{n_x}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^{n_x}}{\partial x^{n_x}} \end{bmatrix}_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (3.3.3)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial x^1} & \frac{\partial h^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^1}{\partial x^{n_x}} \\ \frac{\partial h^2}{\partial x^1} & \frac{\partial h^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^2}{\partial x^{n_x}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h^{n_x}}{\partial x^1} & \frac{\partial h^{n_x}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial h^{n_x}}{\partial x^{n_x}} \end{bmatrix}_{x=\hat{x}_{k|k-1}} \quad (3.3.4)$$

由线性化模型（3.3.1）和（3.3.2）就可以根据高斯贝叶斯递归估计进行递推计算：

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (3.3.5)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k [y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}] \quad (3.3.6)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.3.7)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (3.3.8)$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] P_{k|k-1} \quad (3.3.9)$$

从 EKF 的递推过程, 可知 EKF 方法存在两个显著的缺点, 首先由于雅克比矩阵推导的复杂性, 在许多应用中使用 EKF 非常困难, 其次当系统非线性特征较强时, 而采样时间不足够小时, 使得一阶泰勒级数展开式的线性化误差过大, 会使系统状态的估计精度受到严重影响, 甚至导致滤波算法发散。相对于 EKF 方法在泰勒级数展开中仅有一阶精度, 基于统计线性化理论基础的 SPKF 可获得二阶或二阶以上的精度。

3.3.2 插值滤波

插值滤波 (DDF) 采用 Stirling's 多项式插值来近似非线性系统^[94], 实现线性化。插值多项式中无需导数运算, 只需进行函数运算, 比较容易实现滤波算法, 即使在导数不存在的奇异点上也能顺利进行状态估计。

DDF 的实现主要分为两部分: 首先, 应用插值多项式来近似条件均值与协方差阵; 然后, 应用 KF 的预测、测量修正两步结构得到 DDF 的递推算法。下面讨论以二阶插值近似为主, 即取插值多项式前三项近似非线性函数^[94]。

考虑形如 $y = f(x) \in \mathfrak{R}^{n_y}$ 的非线性函数以及多维随机变量 $x_k \in \mathfrak{R}^{n_x}$, 令均值为 $E[x] = \bar{x}$, 则非线性函数基于多维 Stirling's 插值公式的展开式为:

$$y \approx f(\bar{x} + \Delta x) = f(\bar{x}) + D_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} D_{\Delta x}^2 f + \frac{1}{3!} D_{\Delta x}^3 f + \dots \quad (3.3.10)$$

上式取前三项得到二阶插值公式来近似 $f(x)$ 为:

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + D_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} D_{\Delta x}^2 f \quad (3.3.11)$$

$$D_{\Delta x} f = \frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^{n_x} \Delta x_p \mu_p \delta_p \right) f(\bar{x}) \quad (3.3.12)$$

$$D_{\Delta x}^2 f = \frac{1}{h^2} \left(\sum_{p=1}^{n_x} \Delta x_p^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^{n_x} \sum_{q=1, q \neq p}^{n_x} \Delta x_p \Delta x_q (\mu_p \delta_p)(\mu_q \delta_q) \right) f(\bar{x}) \quad (3.3.13)$$

式中, h 是给定的变量步长。引入如下两个偏差分算子:

$$\delta_p f(\bar{x}) = f\left(\bar{x} + \frac{h}{2} e_p\right) - f\left(\bar{x} - \frac{h}{2} e_p\right) \quad (3.3.14)$$

$$\mu_p f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left(f\left(\bar{x} + \frac{h}{2} e_p\right) + f\left(\bar{x} - \frac{h}{2} e_p\right) \right) \quad (3.3.15)$$

式中, 算子 e_p ($p=1, 2, \dots, n_x$) 是 n_x 维欧氏空间 \mathfrak{R}^{n_x} 中的标准基向量。

把向量 x 的协方差阵记为:

$$P_x = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] \quad (3.3.16)$$

采用 Cholesky 方法对 P_x 进行三角形分解, 得到:

$$P_x = S_x S_x^T \quad (3.3.17)$$

对多维变量 x , 引入线性变换:

$$z = S_x^{-1}x \quad (3.3.18)$$

该线性变换把变量 x 中的元素解耦为 z 中互不相关的元素, 且满足:

$$E[(z - \bar{z})(z - \bar{z})^T] = I_{n_x} \quad (3.3.19)$$

定义关于矢量 z 的函数 \tilde{f} :

$$\tilde{f}(z) \equiv f(S_x z) = f(x) \quad (3.3.20)$$

函数 \tilde{f} 和 f 的泰勒级数近似公式相同, 但是, 利用式 (3.3.11) 来分别近似 \tilde{f} 和 f 时, 会得到两个不同的表达式。根据式 (3.3.14) 和式 (3.3.15) 可得:

$$2\mu_p \delta_p \tilde{f}(\bar{z}) = \tilde{f}(\bar{z} + h e_p) - \tilde{f}(\bar{z} - h e_p) = \tilde{f}(\bar{x} + h s_{x,p}) - \tilde{f}(\bar{x} - h s_{x,p}) \quad (3.3.21)$$

在式 (3.3.21) 中, $s_{x,p}$ 为矩阵中 S_x 的第 p 列, 而 $D_{\Delta z} f$ 、 $D_{\Delta z}^2 f$ 是不等同于 $D_{\Delta x} \tilde{f}$ 、 $D_{\Delta x}^2 \tilde{f}$ 的 (可用于分析比较 EKF 和 DDF 的估计精度)。

根据式 (3.3.11) 和式 (3.3.20), 函数 y 可被表示:

$$\begin{aligned} y = \tilde{f}(\bar{z} + \Delta z) &= \tilde{f}(\bar{z}) + D_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} D_{\Delta z}^2 \tilde{f} = \tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^{n_x} \Delta z_p \mu_p \delta_p \right) \tilde{f}(\bar{z}) \\ &+ \frac{1}{2h^2} \left(\sum_{p=1}^{n_x} \Delta z_p^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^{n_x} \sum_{q=1, q \neq p}^{n_x} \Delta z_p \Delta z_q (\mu_p \delta_p)(\mu_q \delta_q) \right) \tilde{f}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

2)

在式 (3.3.22) 中, Δz_p 是误差向量 $\Delta z = z - \bar{z}$ 的第 p 个元素。设 Δz 满足高斯分布且 $E[\Delta z] = 0$ 。若将 Δz 中任意元素的第 i 阶矩记为 σ_i , 则步长 h 的最优选择是 $h^2 = \sigma_4 = E[\Delta z^4]$ ^[94], 对于高斯分布有 $\sigma_4 = 3\sigma_2 = 3$ 。对式 (3.3.22) 取期望, 选择步长 h 为最优值, 得 \bar{y} 的二阶插值近似式为:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E \left[\tilde{f}(\bar{z}) + D_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} D_{\Delta z}^2 \tilde{f} \right] = E \left[\tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2!} D_{\Delta z}^2 \tilde{f} \right] \\ &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} f(\bar{x}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} \left(f(\bar{x} + h s_{x,p}) + f(\bar{x} - h s_{x,p}) \right) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

结合式 (3.3.18) 和式 (3.3.22), 得 P_{yy} 、 P_{xy} 的二阶插值近似式分别为:

$$\begin{aligned}
 P_{yy} &= \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^{n_x} \left(f(\bar{x} + hs_{x,p}) - f(\bar{x} - hs_{x,p}) \right) \left(f(\bar{x} + hs_{x,p}) - f(\bar{x} - hs_{x,p}) \right)^T \\
 &\quad + \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{p=1}^{n_x} \left(f(\bar{x} + hs_{x,p}) + f(\bar{x} - hs_{x,p}) - 2f(\bar{x}) \right) \\
 &\quad \times \left(f(\bar{x} + hs_{x,p}) + f(\bar{x} - hs_{x,p}) - 2f(\bar{x}) \right)^T
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

$$\begin{aligned}
 P_{xy} &= E \left[(x - \bar{x}) \left[\tilde{f}(\bar{z}) + D_{\Delta z} \tilde{f} - \tilde{f}(\bar{z}) \right]^T \right] = E \left[(S_x \Delta z) \left[D_{\Delta z} \tilde{f} \right]^T \right] \\
 &= \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^{n_x} s_{x,p} \left(f(\bar{x} + hs_{x,p}) - f(\bar{x} - hs_{x,p}) \right)^T
 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

若只取式 (3.3.22) 的一阶差分项, 可得关于均值、方差阵和协方差阵的一阶插值近似式, 若取式 (3.3.22) 到二阶差分项, 可得关于均值、方差阵和协方差阵的二阶插值近似式。本文中取到二阶差分项, 可得到二阶插值滤波 DDF2。

下面将根据式 (3.2.1) 所示的系统, 给出 DDF2 的实现过程^[94]。

首先, 引入四个平方根分解算子:

$$Q_{k-1} = S_w S_w^T, \quad R_k = S_v S_v^T, \quad \hat{P}_{k-1} = \hat{S}_x \hat{S}_x^T, \quad \bar{P}_k = \bar{S}_k \bar{S}_k^T \tag{3.3.26}$$

为区分函数 $h(\bullet)$ 和步长 h , 暂定 $g(\bullet) = h(\bullet)$, 根据式 (3.3.16) ~ (3.3.20), 定义如下八个含有均差的矩阵:

$$S_{x\hat{x}}^{(1)}(k-1) = \left\{ S_{x\hat{x}}^{(1)}(k-1)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \left(f_i(\hat{x}_{k-1} + h\hat{s}_{x,j}) - f_i(\hat{x}_{k-1} - h\hat{s}_{x,j}) \right) / 2h \right\} \tag{3.3.27}$$

$$S_{x\hat{x}}^{(2)}(k-1) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} \left(f_i(\hat{x}_{k-1} + h\hat{s}_{x,j}) + f_i(\hat{x}_{k-1} - h\hat{s}_{x,j}) - 2f_i(\hat{x}_{k-1}) \right) \right\} \tag{3.3.28}$$

$$S_{xw}^{(1)}(k-1) = \left\{ S_{xw}^{(1)}(k-1)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \left(f_i(\hat{x}_{k-1}, hs_{w,j}) - f_i(\hat{x}_{k-1}, -hs_{w,j}) \right) / 2h \right\} \tag{3.3.29}$$

$$S_{xw}^{(2)}(k-1) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} \left(f_i(\hat{x}_{k-1}, hs_{w,j}) + f_i(\hat{x}_{k-1}, -hs_{w,j}) - 2f_i(\hat{x}_{k-1}) \right) \right\} \tag{3.3.30}$$

$$S_{y\bar{x}}^{(1)}(k) = \left\{ S_{y\bar{x}}^{(1)}(k)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \left(g_i(\bar{x}_k + h\bar{s}_{x,j}) - g_i(\bar{x}_k - h\bar{s}_{x,j}) \right) / 2h \right\} \tag{3.3.31}$$

$$S_{y\bar{x}}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} \left(g_i(\bar{x}_k + h\bar{s}_{x,j}) + g_i(\bar{x}_k - h\bar{s}_{x,j}) - 2g_i(\bar{x}_k) \right) \right\} \tag{3.3.32}$$

$$S_{yv}^{(1)}(k) = \left\{ S_{yv}^{(1)}(k)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \left(g_i(\bar{x}_k, hs_{v,j}) - g_i(\bar{x}_k, -hs_{v,j}) \right) / 2h \right\} \tag{3.3.33}$$

$$S_{yv}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} \left(g_i(\bar{x}_k, hs_{v,j}) + g_i(\bar{x}_k, -hs_{v,j}) - 2g_i(\bar{x}_k) \right) \right\} \quad (3.3.34)$$

式中， $s_{w,j}$ 、 $s_{v,j}$ 、 $\hat{s}_{x,j}$ 、 $\bar{s}_{x,j}$ 分别表示平方根矩阵中 S_w 、 S_v 、 \hat{S}_x 、 \bar{S}_x 的第 j 列元素。

过程噪声方差 Q_{k-1} 与测量噪声方差 R_k 的平方根矩阵可事先得到，而协方差阵的平方根矩阵 \hat{S}_x 、 \bar{S}_x 在滤波循环中会不断地被更新和修正。

根据式 (3.3.23)，得状态一步预测的二阶插值近似式为：

$$\begin{aligned} \bar{x}_k = & \frac{h^2 - n_x - n_w}{h^2} f(\hat{x}_{k-1}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} \left(f(\hat{x}_{k-1} + h\hat{s}_{x,p}) + f(\hat{x}_{k-1} - h\hat{s}_{x,p}) \right) \\ & + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_w} \left(f(\hat{x}_{k-1}, hs_{w,p}) + f(\hat{x}_{k-1}, -hs_{w,p}) \right) \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

式中， n_x 、 n_w 分别为状态向量与过程噪声向量的维数。

根据式 (3.3.24) 并结合式 (3.3.27) ~ (3.3.30)，一步预测协方差阵以对称矩阵乘积形式表示为：

$$\bar{P}_k = \tilde{\tilde{S}}_x(k) \tilde{\tilde{S}}_x^T(k) \quad (3.3.36)$$

$$\tilde{\tilde{S}}_x(k) = \begin{bmatrix} S_{xx}^{(1)}(k-1) & S_{xw}^{(1)}(k-1) & S_{xx}^{(2)}(k-1) & S_{xw}^{(2)}(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.3.37)$$

式 (3.3.37) 的复合矩阵 $\tilde{\tilde{S}}_x(k)$ 并不是满足式 (3.3.36) 的预测协方差阵的平方根矩阵，满足式 (3.3.36) 的矩阵 $\bar{S}_x(k)$ 是 $n_x \times n_x$ 的三角方阵，而 $\tilde{\tilde{S}}_x(k)$ 是 $n_x \times 2(n_x + n_w)$ 维矩阵。 $\tilde{\tilde{S}}_x(k)$ 不能直接用于后面的计算，需要构造一个 $2(n_x + n_w) \times 2(n_x + n_w)$ 维的单位正交变换矩阵 T ，使得：

$$\tilde{\tilde{S}}_x(k)T = \begin{bmatrix} \bar{S}_x(k) & 0_{n_x \times 2(n_x + n_w)} \end{bmatrix} \quad (3.3.38)$$

式中， $\bar{S}_x(k)$ 是滤波器需要的三角形平方根矩阵。式 (3.3.38) 中的正交变换可通过改进的 Gram-Schmidt (MGS) 法^[134]来实现。

然后，考虑测量修正过程。首先引入平方根矩阵：

$$P_{yy} = S_y(k)S_y^T(k) \quad (3.3.39)$$

滤波增益矩阵表示为：

$$K_k = P_{xy}P_{yy}^{-1} = P_{xy} \left(S_y(k)S_y^T(k) \right)^{-1} \quad (3.3.40)$$

互协方差阵 P_{xy} 的计算公式为：

$$P_{xy} = E \left[(x_k - \bar{x}_k)(y_k - g(\bar{x}_k))^T \right] = \bar{S}_x(k)S_{yx}^{(1)}(k)^T \quad (3.3.41)$$

满足式 (3.3.39) 的 $S_y(k)$ 是不能直接获得，能够直接得到的是复合矩阵：

$$\tilde{S}_y(k) = \begin{bmatrix} S_{y\bar{x}}^{(1)}(k) & S_{yv}^{(1)}(k) & S_{y\bar{x}}^{(2)}(k) & S_{yv}^{(2)}(k) \end{bmatrix} \quad (3.3.42)$$

同式 (3.3.38)，需采用 MGS 法对 $\tilde{S}_y(k)$ 进行正交变换得到 $S_y(k)$ 。

得到 k 时刻的最新测量值 y_k 后，状态修正公式为：

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k [y_k - \bar{y}_k] \quad (3.3.43)$$

系统输出预测值 \bar{y}_k 的计算公式为：

$$\begin{aligned} \bar{y}_k = & \frac{h^2 - n_x - n_v}{h^2} g(\bar{x}_k) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} \left(g(\bar{x}_k + h\bar{s}_{x,p}) + g(\bar{x}_k - h\bar{s}_{x,p}) \right) \\ & + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_v} \left(g(\bar{x}_k, h\bar{s}_{v,p}) + g(\bar{x}_k, -h\bar{s}_{v,p}) \right) \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

式中， n_v 是测量噪声向量的维数。

根据式 (3.3.24) ~ (3.3.27)，协方差阵表示为：

$$\hat{P}_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] = \bar{P}_k - K_k P_{yy} K_k^T = \tilde{S}_x(k) \tilde{S}_x^T(k) \quad (3.3.45)$$

$$\tilde{S}_x(k) = \begin{bmatrix} \bar{S}_x(k) - K_k S_{y\bar{x}}^{(1)}(k) & K_k S_{yv}^{(1)}(k) & K_k S_{y\bar{x}}^{(2)}(k) & K_k S_{yv}^{(2)}(k) \end{bmatrix} \quad (3.3.46)$$

采用 MGS 法对复合矩阵 $\tilde{S}_x(k)$ 进行正交变换，得到满足式 (3.3.26) 的 $\hat{S}_x(k)$ 。

式 (3.3.35)、(3.3.37)、(3.3.40) ~ (3.3.44) 及式 (3.3.46) 构成了二阶插值滤波的递推过程，在滤波过程中需要采用 MGS 方法对式 (3.3.37)、(3.3.42) 及式 (3.3.46) 中的复合矩阵进行正交变换。

采用插值多项式近似非线性函数而得到插值滤波方法，虽然不要求系统可导，不需要计算系统的雅克比矩阵，但是与扩展卡尔曼滤波一样，总是存在模型线性化误差，从原理上函数线性化方法就存在不可消除的误差。因此，有必要寻找不需要线性化，能直接应用非线性模型进行滤波的方法。

3.3.3 无轨迹卡尔曼滤波

与 EKF 方法用泰勒级数近似非线性系统不同，无轨迹卡尔曼滤波 (UKF) 用一组确定性采样点表示系统状态的分布函数，并利用这组采样点捕获非线性滤波过程中统计特性。这里首先介绍无轨迹转换，它是构造无轨迹卡尔曼滤波器的基础。

(1) 无轨迹转换

无轨迹转换 (Unscented Transformation, UT) 是一种非线性变换方法，它计算随机变量经过非线性转换后的统计特性。其基本思想是相对于任意非线性系统函数的逼近，更容易近似其概率分布^[96]，即 UT 的基本思想是用一组确定的 Sigma 点来近似状

态变量的概率分布。具体方法如图 3.1 所示。UKF 假定状态满足高斯分布，因此只需逼近其统计均值和方差。

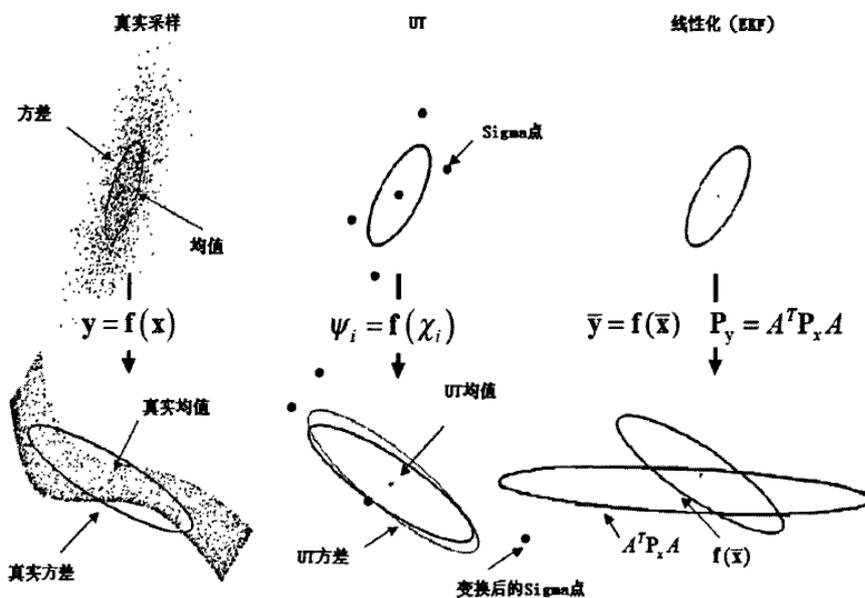


图 3.1 无迹转换示意图^[152]

考虑如下非线性变换：

$$y = f(x) \quad (3.3.47)$$

假设已知 n_x 维随机变量 x 的均值和协方差分别为 \bar{x} 和 P_x ，对式 (3.3.47) 进行滤波的目的是计算 y 的均值 \bar{y} 和方差 P_y 。

首先，构造需要的 Sigma 点。根据随机变量 x 的均值 \bar{x} 和协方差 P_x ，在 \bar{x} 的附近构造一组 Sigma 点 χ_i ：

$$\chi_i = \begin{cases} \bar{x} & i = 0 \\ \bar{x} + (\sqrt{(n_x + \kappa)P_x})_i & i = 1, \dots, n_x \\ \bar{x} - (\sqrt{(n_x + \kappa)P_x})_i & i = n + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (3.3.48)$$

$$W_i = \begin{cases} \frac{\kappa}{(n_x + \kappa)} & i = 0 \\ \frac{1}{2(n_x + \kappa)} & i = 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (3.3.49)$$

其中， W_i 为加权因子，其和为 1。 $\sqrt{(\bullet)}$ 通过协方差阵的 Cholesky 分解求得， $\sqrt{(\bullet)}_i$ 的下标 i 表示矩阵的第 i 列，是与 x 同型的列向量。 $\kappa > 0$ 为可调尺度参数，调整它可以提高逼近精度。显然，其样本均值为 \bar{x} 、方差为 P_x ，用这组 Sigma 点 χ_i 来近似高斯状态 x 的分布。

然后，利用 Sigma 点进行非线性传播。将 Sigma 点通过式 (3.3.50) 作非线性变换，产生一组变换样本点：

$$Y_i = f(\chi_i) \quad (3.3.50)$$

那么，变换样本点 Y_i 即可近似表示 y 的分布，由其可得 y 的均值和方差：

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i Y_i \quad (3.3.51)$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i (Y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{y})^T \quad (3.3.52)$$

$$P_{xy} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i (\chi_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})^T \quad (3.3.53)$$

根据式 (3.3.51) 和式 (3.3.52) 得到的均值和方差的精度至少能达到非线性函数泰勒展开式的二阶，对于高斯分布能达到三阶的精度^[96]。

UT 的比例参数 κ 决定了 Sigma 点的分布和它们的权值，直接使非线性系统的均值和方差的估计精度受影响，要得到好的高阶矩估计需选择合适的 κ 。对于为高斯分布的状态向量，由于可以由其均值和方差表示高斯分布的各阶矩，通过理论推导可得 $\kappa = 3 - n_x$ 。对于一般的情况，没有方便的理论来确定参数，要获得滤波器的最佳性能需通过数值仿真加以调整^[96]。

Sigma 点偏离状态均值的距离 $|\chi_i - \bar{x}|$ 与成 $\sqrt{(n_x + \kappa)}$ 比例。当 $\kappa = 0$ 时，距离与 $\sqrt{n_x}$ 成比例；当 $\kappa > 0$ 时，Sigma 点成比例远离 \bar{x} ；当 $\kappa < 0$ 时，Sigma 点成比例靠近 \bar{x} 。 κ 的选择可正可负，当 κ 为负时，式 (3.3.51) 和 (3.3.52) 得到的方差阵为半负定。于是，比例 UT (Scaled UT, SUT) 被提出来解决这个问题^[98]。

(2) 尺度无轨迹变换

通过尺度无轨迹变换 (Scaled UT, SUT) 得到的 Scaled Sigma 点可以解决方差阵半负定的情况^[98]。SUT 通过 Scaled Sigma 点集来代替原来的 Sigma 点集：

$$\chi'_i = \chi_i + \alpha(\chi_i - \chi_0) \quad (3.3.54)$$

式中， α 是正值的比例缩放因子，可通过调整 α 的取值来调节 Sigma 点的分布，一般为小值 ($0 \leq \alpha \leq 1$)。通过式 (3.3.51) 和式 (3.3.52) 获得 Sigma 点集 $S = \{\chi, W\}$ ，然后，经过 SUT 得到新的点集 $S' = \{\chi', W'\}$ ：

$$W'_i = \begin{cases} W_i/\alpha^2 + (1-1/\alpha^2) & i = 0 \\ W_i/\alpha^2 & i \neq 0 \end{cases} \quad (3.3.55)$$

计算变换样本点及 y 的均值和方差:

$$Y'_i = f(\chi'_i) \quad (3.3.56)$$

$$\bar{y}'_i = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i Y'_i \quad (3.3.57)$$

$$P'_{yy} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i [Y'_i - \bar{y}'] [Y'_i - \bar{y}']^T + (1 + \beta - \alpha^2) [Y'_i - \bar{y}'] [Y'_i - \bar{y}']^T \quad (3.3.58)$$

式中, β 是引入 $f(\bullet)$ 高阶项信息的参数, 当不使用 $f(\bullet)$ 高阶项信息时 $\beta = 2$ [98]。

采用 SUT 的算法称为比例采样方法, 这种新的 Sigma 点采样公式为:

$$\chi_i = \begin{cases} \bar{x} & i = 0 \\ \bar{x} + (\sqrt{(n_x + \lambda) P_x})_i & i = 1, \dots, n_x \\ \bar{x} - (\sqrt{(n_x + \lambda) P_x})_i & i = n + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (3.3.59)$$

$$\begin{cases} W_0^{(m)} = \lambda / (n_x + \lambda) \\ W_0^{(c)} = \lambda / (n_x + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1 / 2(n_x + \lambda) \quad i = 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (3.3.60)$$

方程式中的 $\lambda = \alpha^2 (n_x + \kappa) - n_x$, 是比例因子, α 决定了 Sigma 点的范围, 通常为一下的正数 ($0 \leq \alpha \leq 1$)。 κ 是另一个比例因子, 通常设置为 0 或 $3 - n_x$, 即当系统的维数 $n_x > 3$ 时, 选择 $\kappa = 0$; 当系统的维数 $n_x < 3$ 时, 选择 $\kappa = 3 - n_x$ 。 β 是一调节参数, 对于高斯分布, $\beta = 2$ 是最优的。 $W_i^{(m)}$ 和 $W_i^{(c)}$ 分别为由 Y_i 计算 y 的均值和方差所用的加权值。

(3) 无轨迹卡尔曼滤波方法

将 SUT 转换应用于非线性系统 (3.2.1) 中的递推估计问题, 就得到无轨迹卡尔曼滤波 (UKF) 方法。滤波过程中, 首先利用式 (3.3.56) ~ (3.3.60) 所示的方法, 选取一组 Sigma 点集合, 然后类似于 EKF, 可分别估计出时间更新过程中状态预测以及预测协方差阵。同样的道理, 可得到测量预测值及其协方差阵。将以上结果代入贝叶斯迭代递推过程式 (3.2.8) ~ (3.2.14), 就得到 UKF 的递推结构。完整的 UKF 下滤波方法总结如下 [98]:

■ 预测 (时间更新)

- 1) 根据 \hat{x}_{k-1} 和 \hat{P}_{k-1} , 按照式 (3.3.59) 和式 (3.3.60) 构造 Sigma 点 $\chi_{i,k-1}$, $i = 0, \dots, 2n_x$ 。
- 2) 计算预测 Sigma 点和均值:

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) \quad (3.3.61)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1} \quad (3.3.62)$$

3) 计算一步预测方差:

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}] [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q_{k-1} \quad (3.3.63)$$

■ 修正 (测量更新)

1) 利用测量方程更新 Sigma 点:

$$y_{i,k|k-1} = h_k(\chi_{i,k|k-1}) \quad (3.3.64)$$

2) 计算测量估计值:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} y_{i,k|k-1} \quad (3.3.65)$$

3) 计算测量方差:

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T + R_k \quad (3.3.66)$$

4) 计算协方差:

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1})(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T \quad (3.3.67)$$

5) 计算滤波增益:

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (3.3.68)$$

6) 计算滤波估计:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (3.3.69)$$

7) 计算滤波估计方差:

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \quad (3.3.70)$$

3.3.4 容积卡尔曼滤波

考虑一个多维加权积分, 其基本形式如下:

$$I(f) = \int_D f(x) \omega(x) dx \quad (3.3.71)$$

其中 D 为积分区域, 并且对于任意 $x \in D$ 的权重函数 $\omega(x)$ 已知。假定 $\omega(x)$ 具有高斯特

性，并且在整个积分区域非负，则上式所示就是一个高斯权积分问题。若难以求解上式积分，则通常的做法是采用数值积分计算方法。该方法下的基本问题是确定一组点集 x_i 及其相应权值 ω_i 以用于近似求解 $I(f)$ ，即：

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^m \omega_i f(x_i) \quad (3.3.72)$$

容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter, CKF)的基本过程即基于上述积分问题，采用了一种基于求容积原理的方法，从而解决了非线性滤波的问题^[102]。

(1) 积分变换

正如上文所述的高斯域 Bayes 滤波问题，将滤波问题归结为如何计算多个形如“非线性函数×高斯密度”的积分。考虑如下积分过程：

$$I(f) = \int_{\mathfrak{R}^n} f(x) \exp(-x^T x) dx \quad (3.3.73)$$

为了计算上述积分问题，首先要将其变换至一个更为通用的球面-径向积分形式。该变换中，需要将 x 分解为一个与半径 r 和方向向量 y 相关的过程：

$$x = ry, y^T y = 1 \quad (3.3.74)$$

则上述积分可以写为：

$$I(f) = \int_0^\infty \int_{U_n} f(ry) r^{n-1} \exp(-r^2) d\sigma(y) dr \quad (3.3.75)$$

其中， $\sigma(\bullet)$ 为属于积分域 U_n 的元素。

列写径向积分以及求面积分为：

$$I = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \quad (3.3.76)$$

其中， $S(r)$ 定义为单位权值 $\omega(y) = 1$ 球面积分，且：

$$S(r) = \int_{U_n} f(ry) d\sigma(y) \quad (3.3.77)$$

此球面积分与径向积分可分别由下文所述球面积分原理及径向原理求解，从而形成完整的 CKF 滤波算法。

在此原理下的一种三自由度球面积分结构可由下式表示：

$$\int_{U_n} f(y) d\sigma(y) \approx \omega \sum_{i=1}^{2n_s} f[u]_i \quad (3.3.78)$$

其中， $[\cdot]_i$ 表示生成算子的第 i 个元素，如对于 $[1] \in \mathfrak{R}^2$ 的情况， $[1]_i$ 的四个元素可对称

的表示为:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}。$$

高斯积分是目前最为有效的一维积分方式, 一个基于 m 点的高斯积分可以写为 $(2m-1)$ 多项式求和形式:

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=1}^m \omega_i f(x_i) \quad (3.3.79)$$

其中, $\omega(x)$ 是一个在积分区间 $[a, b]$ 上非负的权重函数。

为了获得与式 (3.3.76) 相近的形式, 文献[102]提出了一种基于球面径向原理的求积方法:

$$\int_0^{\infty} f(x)x^{n-1} \exp(-x^2)dx \approx \omega_1 f(x_1) \quad (3.3.80)$$

其中, x_1 为一阶推广 Laguerre 多项式解的平方根。

(2) CKF 滤波算法

基于以上对于“非线性函数×高斯密度”积分问题的讨论, 采用一种求积原则给出最终解, 即采用一组 $2n_x$ 个等权重的求积点 (Cubature Points) 来实现该形式下的积分计算, 其中 n_x 为积分域的维数。

$$I_N(f) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} f(x)N(x; 0, I)dx \approx \sum_{i=1}^m \omega_i f(\xi_i) \quad (3.3.81)$$

其中,

$$\xi_i = \sqrt{\frac{m}{2}}[1]_i, \omega_i = \frac{1}{m}, i = 1, 2, \dots, m = 2n_x \quad (3.3.82)$$

采用求积点 $[\xi_i, \omega_i]$ 的数值计算方法完成非线性滤波估计, 获得 CKF 滤波的基本过程如下所示^[102]:

■ 预测 (时间更新)

1) 假定上一时刻的估计方差已知, 对其进行分解:

$$\hat{P}_{k-1} = S_{k-1}S_{k-1}^T \quad (3.3.83)$$

2) 计算 Cubature 点:

$$\chi_{i,k-1} = S_{k-1}\xi_i + \hat{x}_{k-1} \quad (3.3.84)$$

3) 分别计算各点的更新:

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) \quad (3.3.85)$$

4) 计算一步状态预测:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1}, m = 2n_x \quad (3.3.86)$$

5) 计算一步预测方差:

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1} \chi_{i,k|k-1}^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (3.3.87)$$

■ 修正 (测量更新)

1) 利用一步预测方差进行分解:

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \quad (3.3.88)$$

2) 计算 Cubature 点:

$$\chi_{i,k|k-1}^* = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (3.3.89)$$

3) 利用测量方程更新 Cubature 点:

$$Y_{i,k} = h_k(\chi_{i,k|k-1}^*) \quad (3.3.90)$$

4) 计算测量估计值:

$$\hat{y}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{i,k} \quad (3.3.91)$$

5) 计算测量方差:

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{i,k} Y_{i,k}^T - \hat{y}_k \hat{y}_k^T + R_k \quad (3.3.92)$$

6) 计算协方差:

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1}^* Y_{i,k}^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k^T \quad (3.3.93)$$

7) 计算滤波增益:

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (3.3.94)$$

8) 计算滤波估计:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (3.3.95)$$

9) 计算滤波估计方差:

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \quad (3.3.96)$$

可以看出，CKF 算法的基本思想仍然是一种预测、校正两阶段结构的估计算法，与 EKF、UKF 等相同，仍具备 KF 的基本形式，仍然能够继承 KF 的一些优良特性，而与 UKF 的差别在于求解非线性的策略的不同。

(3) DDF2、UKF 和 CKF 的比较分析

在确保均值和协方差不变的前提下，插值滤波的实质是通过 Stirling's 插值公式近似化非线性函数，然后，计算均值和协方差的插值近似式。不需要计算雅克比矩阵，所以没有导数运算，也不要求非线性函数必须是连续可导。但是，DDF2 需要计算八个矩阵的分解因子，还需要在递推过程中重建分解因子，计算量大于 UKF。DDF2 的估计精度与标准 UKF 相当^[94]，即相当于泰勒级数展开式的二阶截断优势。

虽与 UKF 思想相类似，但 CKF 的关键步骤——分布近似，采用了完全不同的策略，这一点从两种算法的确定性加权点集的选取上就可以明显的看出。对于 n_x 维的随机变量 x ，其分布满足均值 μ 和方差 P ，且具备对称的先验密度 $\Pi(x)$ ，UKF 采用了 $(2n_x + 1)$ 个带权重的点 $[\xi_i, \omega_i]_{i=0}^{2n_x}$ 满足近似，而 CKF 则只采用了 $2n_x$ 个点的集合 $[\xi_i, \omega_i]$ ，且与 UKF 点的权重以中心为最高的策略不同，CKF 的所有点具有相同的权重，如图 3.2 所示^[102]。

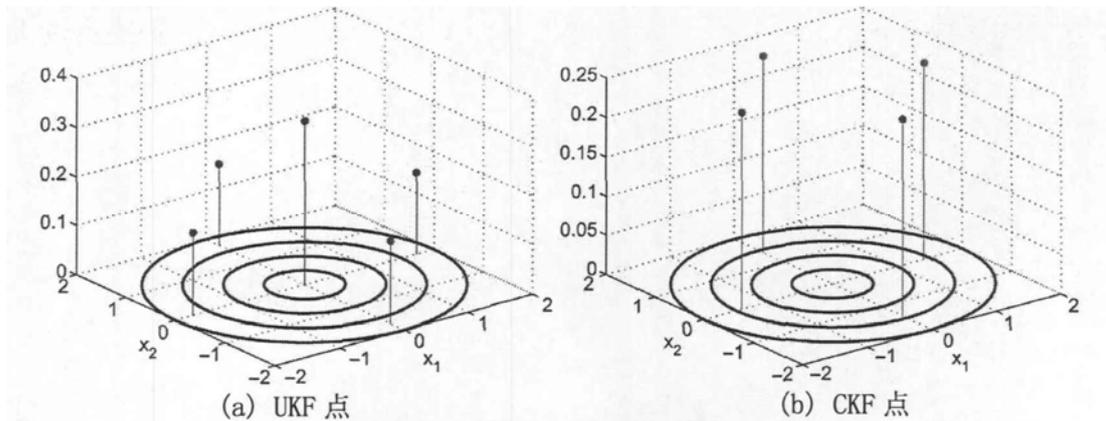


图 3.2 UKF、CKF 点选取策略比较

相较于 DDF2、UKF 来说，CKF 具备的优势主要体现在所有点具有相同的权重，滤波稳定性更好，相同条件下运算速度高于 DDF2 和 UKF。UKF 最早提出，应用广泛，大部分滤波算法的改进是基于 UKF 的，本论文算法使用 UKF 较多，实时性要求较高时采用 CKF。DDF2 因其计算复杂，本论文使用较少。

3.3.5 仿真分析

采用 2.5 节的姿态晃动轨迹、载体线振，没有高频振荡，加入白噪声，采用频率

为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 360s，精对准仿真结果如图 3.3、图 3.4、图 3.5 所示。

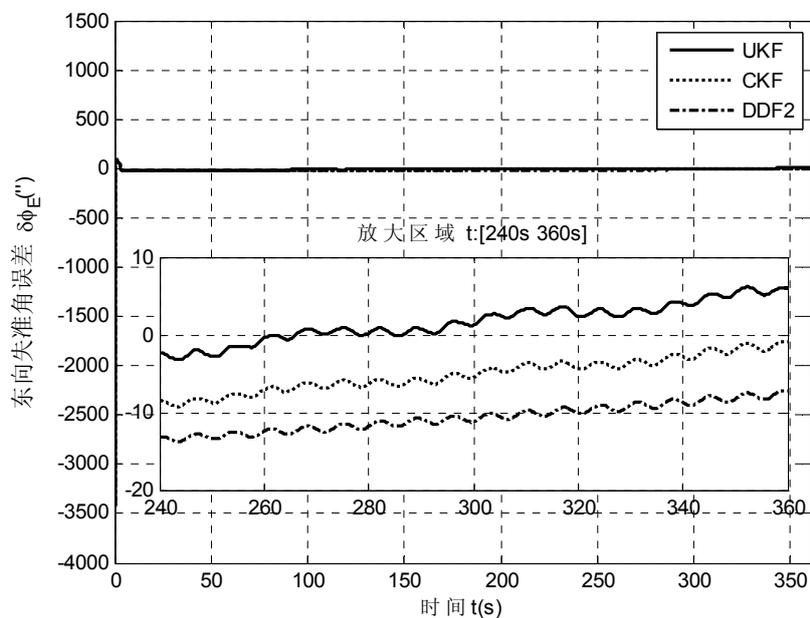


图 3.3 东向失准角误差

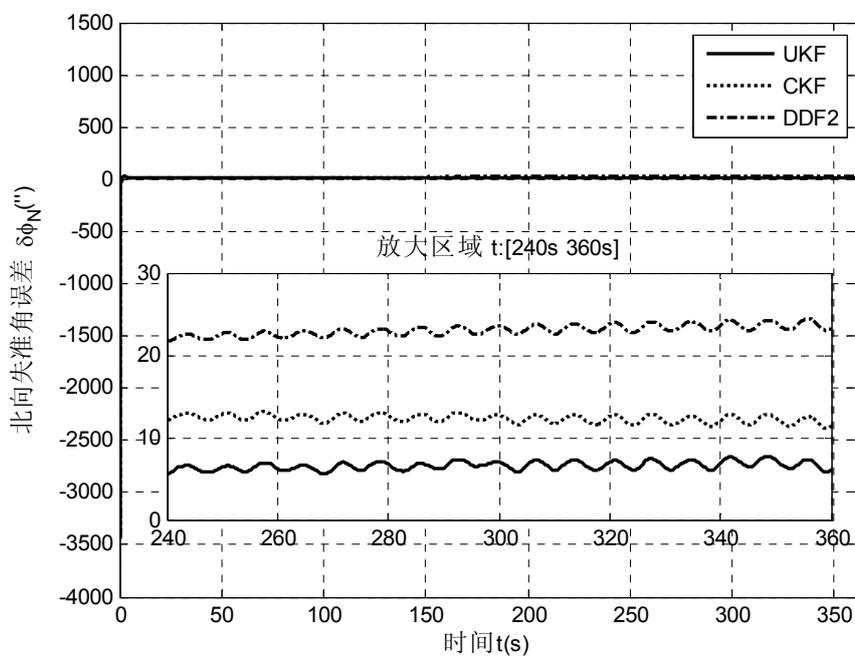


图 3.4 北向失准角误差

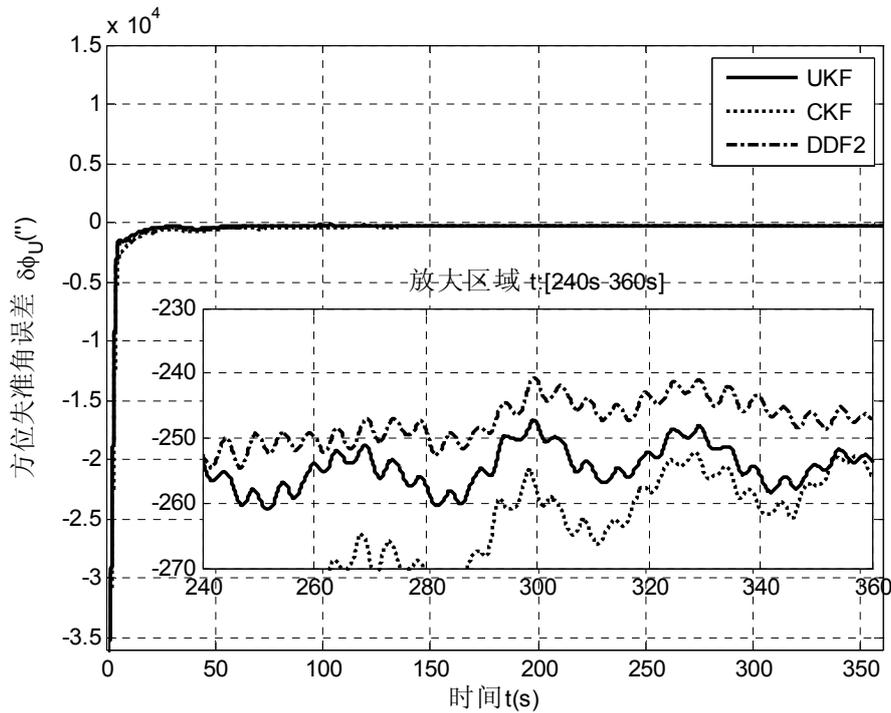


图 3.5 方位失准角误差

由上述仿真图可知，UKF 和 CKF 的水平失准角稳态误差比 DDF2 的小 $10''$ 左右，但 DDF2 的方位失准角稳态误差比 UKF 和 CKF 的小 $10''$ 左右，整体上认为三种滤波算法精度和收敛速度相当。从仿真时间看，DDF2 最长，UKF 次之，CKF 耗时最短。仿真结果验证了理论分析的结论。

3.4 自适应 UKF 在初始对准中的应用

传统 UKF 需要精确已知系统噪声和测量噪声的先验统计。但在许多实际问题中，受试验样本等各方面的限制，噪声的先验统计未知或不准确。应用不准确的噪声统计设计 UKF，势必导致滤波精度下降甚至发散。而现有解决此问题的算法，要么计算复杂，难以工程实现；要么虽能克服噪声变化所引起的 UKF 滤波精度下降，但滤波收敛性较差，且又引进了其他的限制条件，如要求初始状态误差尽量小，这样就使问题更加复杂化^[135]。

为此，本文应用一种带噪声统计估计器的自适应 UKF (AUKF) 滤波算法到晃动基座下的初始对准上。该方法在进行滤波计算的同时，利用噪声统计估计器对未知的或不准确的噪声统计进行实时估计和修正。相比于传统 UKF，该 AUKF 滤波算法具有应对噪声变化的自适应能力，它在噪声统计未知或不准确情况下，依然具有极佳的

稳定性和收敛性, 相比现有算法, 噪声估计递推公式计算简单, 容易实现, 且噪声统计估计器对噪声统计的估计是无偏的^[135]。不同条件下的仿真分析结果表明了本文应用的 AUKF 滤波算法的有效性和可行性。

3.4.1 噪声均值非零时 UKF 算法实现

考虑式 (3.2.1) 非线性模型, w_k 和 v_k 分别为 n_w 维系统噪声和 n_v 维测量噪声, 并且为互不相关的高斯白噪声, 其均值和协方差矩阵分别为:

$$\begin{cases} E[w_k] = q, \text{cov}[w_k w_k^T] = Q\delta_{kj}; \\ E[v_k] = r, \text{cov}[v_k v_k^T] = R\delta_{kj}; \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其中 δ_{kj} 为 kronecker- δ 函数。初始状态 x_0 与所有噪声互不相关, 且服从高斯正态分布, 其先验均值和协方差矩阵为:

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = E(x_0) \\ \hat{P}_0 = \text{cov}(x_0) = E[x_0 - \hat{x}_0][x_0 - \hat{x}_0]^T \end{cases} \quad (3.4.2)$$

UKF 在滤波过程中, 需要假定系统噪声 w_k 和测量噪声 v_k 的均值为零, 若该条件不满足, UKF 滤波公式应作相应的修改。

令 $\mu_k = w_k - q$, $\eta_k = v_k - r$, 代入非线性系统 (3.2.1) 得:

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + q + \mu_{k-1} \\ y_k = h_k(x_k) + r + \eta_k \end{cases} \quad (3.4.3)$$

其中 μ_k 和 η_k 都是均值为零、方差分别为 Q_k 和 R_k 的高斯白噪声。

在传统 KF 算法的基础上, 对于一步状态预测及输出预测, 应用 SUT 来处理状态均值和协方差的非线性传递, 即可得到传统 UKF。基于非线性系统式 (3.4.3) 的 UKF 具体算法流程^[135]如下。

(1) Sigma 点采样

在 UT 算法中, 最重要的是确定 Sigma 点的变换策略, 也就是确定使用 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值。为了保证输出变量 y_k 协方差的半定性, 使用 3.3.3 小节的尺度无轨迹变换。

(2) 预测方程

首先, 按照 (1) 所选择的 Sigma 变换策略, 由 \hat{x}_{k-1} 和 \hat{P}_{k-1} 计算 Sigma 点 $\chi_{i,k-1}$, $i=0, \dots, 2n_x$, 可得一步状态预测均值及误差协方差阵, 即:

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) + q \quad (3.4.4)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) + q \quad (3.4.5)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}][\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q_{k-1} \quad (3.4.6)$$

然后，利用 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和 $P_{k|k-1}$ 按照 (1) 所选择的变换策略，计算 Sigma 点 $\zeta_{i,k|k-1}$ ($i=0, \dots, 2n_x$)，可得到输出预测、方差和协方差，并完成滤波更新，即：

$$y_{i,k|k-1} = h_k(\zeta_{i,k|k-1}) + r \quad (3.4.7)$$

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} y_{i,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_k(\zeta_{i,k|k-1}) + r \quad (3.4.8)$$

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T + R_k \quad (3.4.9)$$

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1})(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T \quad (3.4.10)$$

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (3.4.11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (3.4.12)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \quad (3.4.13)$$

与传统 UKF 相比，区别仅在于测量更新时再次计算 Sigma 点。

3.4.2 带噪声统计估计器的 AUKF 算法

为了克服传统 UKF 的缺点，文献[135]利用极大后验 (MAP) 估计原理，设计出一种应用于 UKF 的噪声统计估计器，利用输出测量信息实时估计和修正噪声的均值和协方差，从而使 UKF 具有应对噪声变化的自适应能力。带噪声统计估计器的 AUKF 滤波算法^[135]具体推导过程如下。

当 q, Q_k, r, R_k 未知时，其连同状态 x_0, x_1, \dots, x_k 的 MAP 估计值 $\hat{q}, \hat{Q}_k, \hat{r}, \hat{R}_k$ 及 $\hat{x}_{j|k}$ ($j=0, 1, \dots, k$) 可用极大化如下条件密度求得：

$$J^* = p(X_k, q, Q_k, r, R_k | Z_k) \quad (3.4.14)$$

其中： $X_k = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ ， $Y_k = [y_0, y_1, \dots, y_k]$ 。根据条件概率性质可得：

$$J^* = p(X_k, q, Q_k, r, R_k, Y_k) / p(Y_k) \quad (3.4.15)$$

而 $p(Y_k)$ 与最优化无关。故问题转化为求如下无条件密度的极大值：

$$\begin{aligned}
J^* &= p(X_k, q, Q_k, r, R_k, Y_k) \\
&= p(Y_k | X_k, q, Q_k, r, R_k) p(X_k | q, Q_k, r, R_k) p(q, Q_k, r, R_k)
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

其中 $p(q, Q_k, r, R_k)$ 由先验信息获得，可看作常数。

同时，由非线性系统 (3.4.3) 中 μ_k 、 η_k 的高斯正态性假设，及条件概率的乘法定理可知：

$$\begin{aligned}
p(X_k | q, Q_k, r, R_k) &= p(x_0) \prod_{j=1}^k p(x_j | x_{j-1}, q, Q_k) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n_x/2} |\hat{P}_0|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\hat{P}_0}^2\right) \times \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{n_x/2} |Q_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^2\right) \\
&= C_1 |\hat{P}_0|^{-1/2} |Q_k|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\hat{P}_0}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^2\right)
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

其中： n_x 为系统状态维数， $C_1 = 1/(2\pi)^{n_x(k+1)/2}$ 为一常数， $|A|$ 为 A 的行列式， $\|u\|_A^2 = u^T A u$ 为二次型。

已知测量值 y_0, y_1, \dots, y_k ，且可认为它们相互独立，类似地有如下计算公式：

$$\begin{aligned}
p(Y_k | X_k, q, Q_k, r, R_k) &= \prod_{j=1}^k p(y_j | x_j, r, R_k) \\
&= \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{n_y/2} |R_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^2\right) \\
&= C_2 |R_k|^{-k/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^2\right)
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

其中： n_y 为测量维数， $C_2 = 1/(2\pi)^{n_y k/2}$ 为一常数

于是，将式 (3.4.17) 和 (3.4.18) 代入式 (3.4.16) 可得：

$$\begin{aligned}
J &= C_1 C_2 |\hat{P}_0|^{-1/2} |Q_k|^{-k/2} |R_k|^{-k/2} p(q, Q_k, r, R_k) \exp\left(-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\hat{P}_0}^2\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^2\right) \\
&= C |Q_k|^{-k/2} |R_k|^{-k/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^2\right)
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

其中： $C = C_1 C_2 |\hat{P}_0|^{-1/2} p(q, Q_k, r, R_k) \exp\left(-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\hat{P}_0}^2\right)$ 。

而由式 (3.3.19) 可得：

$$\begin{aligned} \ln J = & -\frac{k}{2} \ln |Q_k| - \frac{k}{2} \ln |R_k| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^2 \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^2 + \ln C \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

考虑到 J 和 $\ln J$ 具有相同的极值点, 假设 $\hat{x}_{j-1|k}$ 及 $\hat{x}_{j|k}$ 已知, 利用矩阵导数运算法则, 令:

$$\partial \ln J / \partial q \Big|_{q=\hat{q}_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1|k}, x_j=\hat{x}_{j|k}} = \frac{1}{Q_k} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1|k}, x_j=\hat{x}_{j|k}} = 0 \quad (3.4.21)$$

$$\begin{aligned} & \partial \ln J / \partial Q_k \Big|_{Q_k=\hat{Q}_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1|k}, x_j=\hat{x}_{j|k}} \\ = & -\frac{k}{2Q_k} + \frac{1}{2Q_k^2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1|k}, x_j=\hat{x}_{j|k}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

$$\partial \ln J / \partial r \Big|_{r=\hat{r}_k}^{x_j=\hat{x}_{j|k}} = \frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^{x_j=\hat{x}_{j|k}} = 0 \quad (3.4.23)$$

$$\begin{aligned} & \partial \ln J / \partial R_k \Big|_{R_k=\hat{R}_k}^{x_j=\hat{x}_{j|k}} \\ = & -\frac{k}{2R_k} + \frac{1}{2R_k^2} \sum_{j=1}^k \|y_j - h_j(x_j) - r\|_{R_k}^{x_j=\hat{x}_{j|k}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

可得噪声统计的 MAP 估计器为:

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_{j|k} - f_{j-1}(x_{j-1}) \Big|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1|k}}] \quad (3.4.25)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_{j|k} - f_{j-1}(x_{j-1}) \Big|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1|k}} - q][\hat{x}_{j|k} - f_{j-1}(x_{j-1}) \Big|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1|k}} - q]^T \quad (3.4.26)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - h_j(x_j) \Big|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|k}}] \quad (3.4.27)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - h_j(x_j) \Big|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|k}} - r][y_j - h_j(x_j) \Big|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|k}} - r]^T \quad (3.4.28)$$

在式 (3.4.25) ~ (3.4.28) 中以滤波估计值 \hat{x}_{j-1} 及 \hat{x}_j 或预报估计值 $\hat{x}_{j|j-1}$ 来近似代替计算复杂的平滑估计值 $\hat{x}_{j-1|k}$ 及 $\hat{x}_{j|k}$, 即可得到噪声统计次优 MAP 估计器为:

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_j - f_{j-1}(x_{j-1}) \Big|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1}}] \quad (3.4.29)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_j - f_{j-1}(x_{j-1})|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1}} - q][\hat{x}_j - f_{j-1}(x_{j-1})|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1}} - q]^T \quad (3.4.30)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - h_j(x_j)|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|j-1}}] \quad (3.4.31)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - h_j(x_j)|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|j-1}} - r][y_j - h_j(x_j)|_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j|j-1}} - r]^T \quad (3.4.32)$$

其中， $f_{j-1}(x_{j-1})$ 的物理意义是：状态估计值 \hat{x}_{j-1} 经非线性状态函数 $f_{j-1}(\bullet)$ 传递之后的后验均值，对于线性 KF， $f_{j-1}(x_{j-1})$ 可通过线性状态函数传递精确已知；而对于非线性 UKF， $f_{j-1}(x_{j-1})$ 只能通过 UT 以 3 阶泰勒精度近似已知，其计算公式可借鉴式(3.4.5)得到，即：

$$f_{j-1}(x_{j-1})|_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1}} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{j-1}(\chi_{i,j-1}) \quad (3.4.33)$$

其中， $\chi_{i,j-1}(i=0,1,\dots,2n_x)$ 为由 $j-1$ 时刻状态估计值 \hat{x}_{j-1} 和协方差 \hat{P}_{j-1} 所构造的 Sigma 采样点。

同理， $h_j(\hat{x}_{j|j-1})$ 的物理意义是：一步状态预测 $\hat{x}_{j|j-1}$ 经非线性测量函数 $h_j(\bullet)$ 传递之后的后验值，对于线性 KF， $h_j(\hat{x}_{j|j-1})$ 可通过线性测量函数传递精确已知；而对于非线性 UKF， $h_j(\hat{x}_{j|j-1})$ 只能通过 UT 变换以 3 阶泰勒精度近似已知，其计算公式可借鉴式(3.4.8)得到，即：

$$h_j(\hat{x}_{j|j-1}) = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_j(\zeta_{i,j|j-1}) \quad (3.4.34)$$

其中， $\zeta_{i,j|j-1}(i=0,1,\dots,2n_x)$ 为一步状态预测 $\hat{x}_{j|j-1}$ 和协方差 $P_{j|j-1}$ 所构造的 Sigma 采样点。

将式(3.4.34)和(3.4.33)代入式(3.4.29)~(3.4.32)可得到应用于 UKF 的噪声统计次优 MAP 估计器为：

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{j-1}(\chi_{i,j-1})] \quad (3.4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{j-1}(\chi_{i,j-1}) - q][\hat{x}_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{j-1}(\chi_{i,j-1}) - q]^T \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_j - \hat{x}_{j|j-1}][\hat{x}_j - \hat{x}_{j|j-1}]^T \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_j(\zeta_{i,j|j-1})] \quad (3.4.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_j(\zeta_{i,j|j-1}) - r][y_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_j(\zeta_{i,j|j-1}) - r]^T \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [y_j - \hat{y}_{j|j-1}][y_j - \hat{y}_{j|j-1}]^T \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

下面讨论式 (3.4.35) ~ (3.4.38) 的这些次优 MAP 噪声统计估计器的无偏性。对于服从高斯分布的非线性系统状态模型 (3.4.3) 可以证明：当已知系统状态后验均值和协方差时，UKF 的输出残差序列是零均值高斯白噪声序列，即有 $E[\varepsilon_k] = 0$ 。利用式 (3.4.4) ~ (3.4.13) 可得：

$$E[\hat{q}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[K_j \varepsilon_j + q] = q \quad (3.4.39)$$

$$E[\hat{r}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\varepsilon_j + r] = r \quad (3.4.40)$$

故噪声均值 q 和 r 的次优 MAP 估计是无偏的。考虑到 $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$ 且 $P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T]$ ，

则有：

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_k] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\varepsilon_j \varepsilon_j^T] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{\hat{y}_j \hat{y}_j} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (y_{i,j|j-1} - \hat{y}_j)(y_{i,j|j-1} - \hat{y}_j)^T + R_k \right] \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

由式 (3.4.41) 可得测量噪声的协方差矩阵 R_k 的次优无偏估计为：

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\varepsilon_j \varepsilon_j^T - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (y_{i,j|j-1} - \hat{y}_j)(y_{i,j|j-1} - \hat{y}_j)^T \right] \quad (3.4.42)$$

由式 (3.4.13) 可知 $\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1} = K_k \varepsilon_k$ ， $P_{k|k-1} - \hat{P}_k = K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T$ ，则有：

$$\begin{aligned} E[\hat{Q}_k] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j E[\varepsilon_j \varepsilon_j^T] K_j^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j P_{\hat{y}_j \hat{y}_j} K_j^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (P_{j|j-1} - \hat{P}_j) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_{i,j|j-1} - \hat{x}_{j|j-1}][\chi_{i,j|j-1} - \hat{x}_{j|j-1}]^T - \hat{P}_j + Q_{k-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

由式 (3.4.43) 可得系统噪声的协方差矩阵 Q_k 的次优 MAP 无偏估计为：

$$\hat{Q}_k = E[\hat{Q}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ K_j \varepsilon_j \varepsilon_j^T K_j^T + \hat{P}_j - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_{i,j|j-1} - \hat{x}_{j|j-1}] [\chi_{i,j|j-1} - \hat{x}_{j|j-1}]^T \right\} \quad (3.4.44)$$

显然，容易推导出次优无偏 MAP 噪声统计估计器的递推公式为：

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{q}_{k-1} + \hat{x}_k - \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} f_{k-1}(\chi_{i,k-1})] \quad (3.4.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k = & \frac{1}{k} [(k-1)\hat{Q}_{k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T K_k^T + \hat{P}_k - \\ & \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1})^T] \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{r}_{k-1} + y_k - \sum_{i=0}^{2n_y} W_i^{(m)} h_k(\zeta_{i,k|k-1})] \quad (3.4.47)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{R}_{k-1} + (y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T - \sum_{i=0}^{2n_y} W_i^{(c)} (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T] \quad (3.4.48)$$

设初始条件为： \hat{x}_0, \hat{P}_0 ； \hat{q}_0, \hat{Q}_0 ； \hat{r}_0, \hat{R}_0 。从初始条件出发，用 (3.4.45) ~ (3.4.48) 噪声估计器替换噪声均值非零时 UKF 的相应常量，即可得到带噪声估计器的 AUKF 滤波算法。

3.4.3 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件，在白噪声条件下，采用频率为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 360s，精对准仿真结果如图 3.6、图 3.7、图 3.8 和表 3.1 所示。

表 3.1 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	AUKF
东向失准角误差 (")	-5.634	9.803
北向失准角误差 (")	4.931	10.441
方位失准角误差 (")	1368.211	-27.373

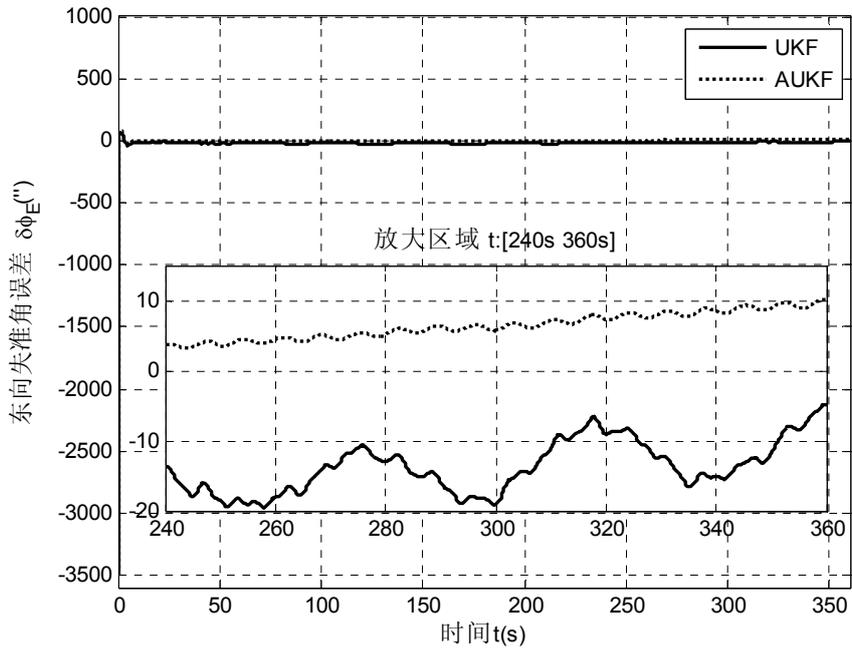


图 3.6 东向失准角误差

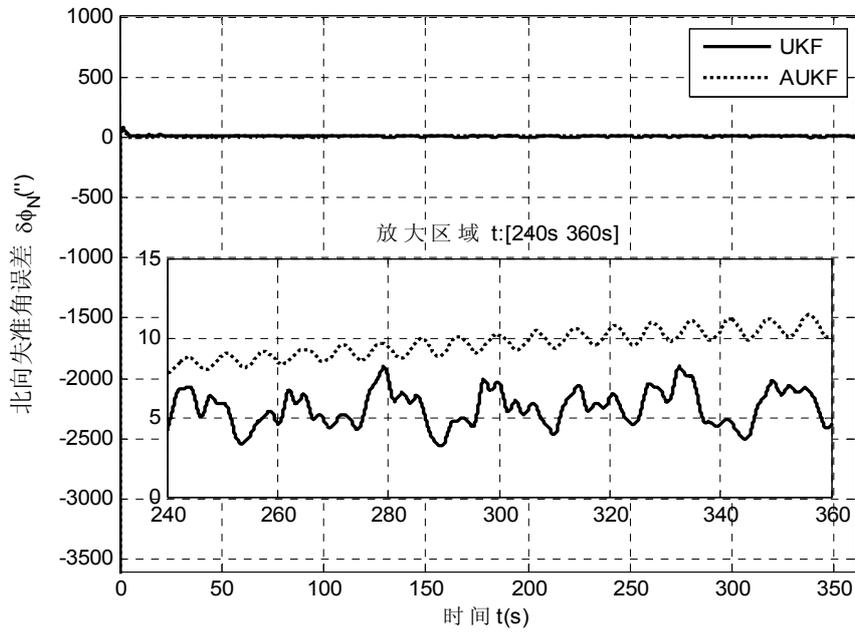


图 3.7 北向失准角误差

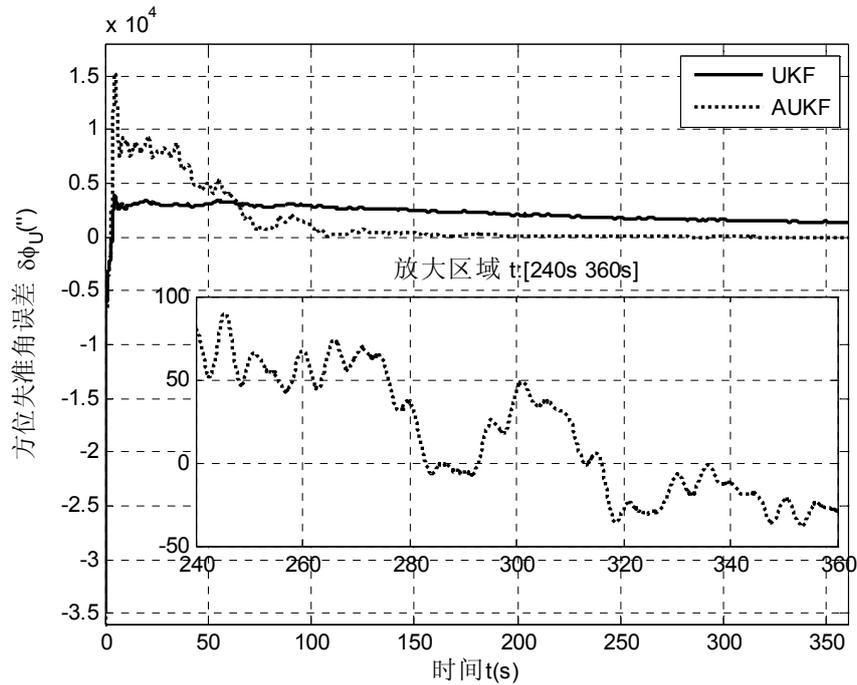


图 3.8 方位失准角误差

由图 3.6 和图 3.7 可知, UKF 和 AUKF 的水平失准角在 20s 内均收敛, 由表 3.1 可知 UKF 和 AUKF 的水平失准角稳态误差相当。但在图 3.8 中, UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛, 360s 时失准角误差为 $1368.211''$, 而 AUKF 的方位失准角在 320s 左右收敛, 其稳态误差仅为 $-27.373''$ 。

采用 2.5 节的仿真条件, 在一阶马尔科夫噪声下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 600s, 精对准仿真结果如图 3.9、图 3.10、图 3.11 和表 3.2 所示。

表 3.2 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	AUKF
东向失准角误差 (″)	-15.182	-20.962
北向失准角误差 (″)	-24.694	5.106
方位失准角误差 (″)	1400.056	72.205

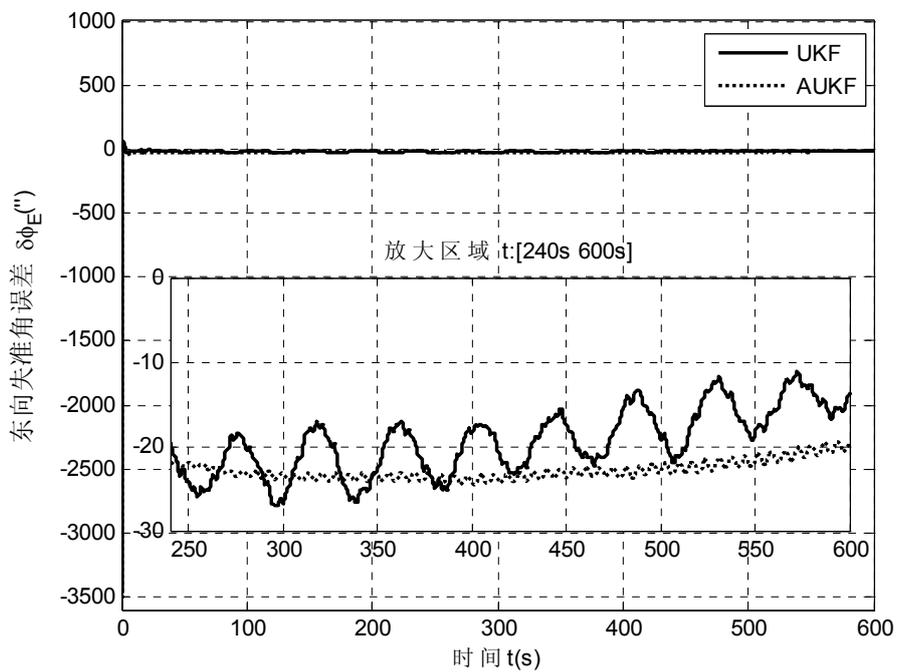


图 3.9 东向失准角误差

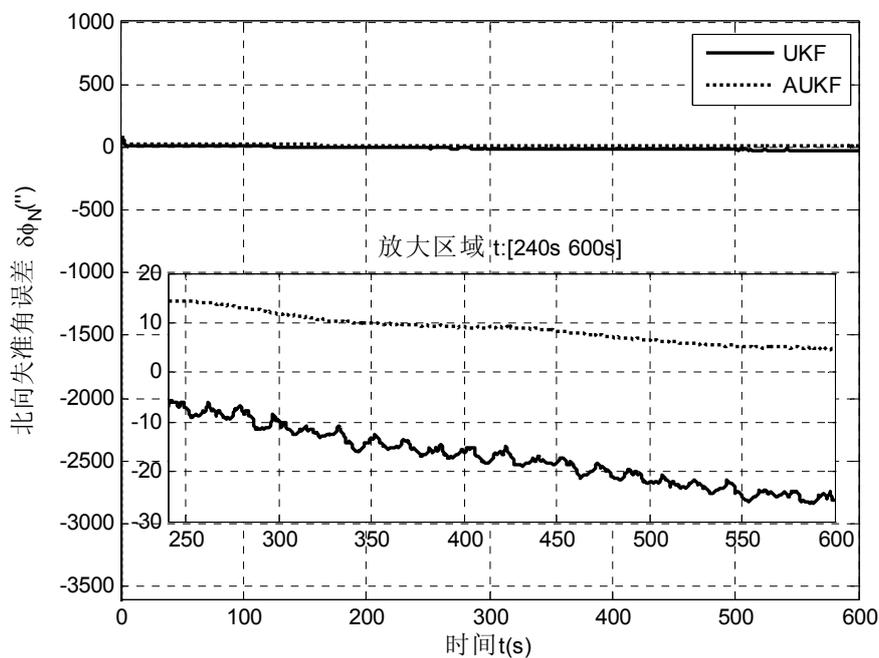


图 3.10 北向失准角误差

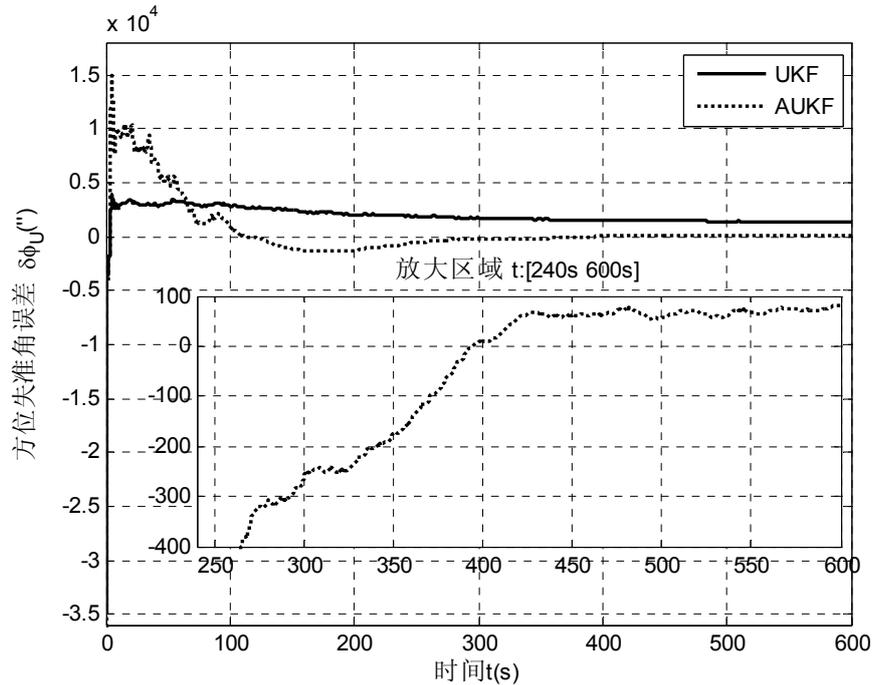


图 3.11 方位失准角误差

在一阶马尔科夫噪声下，由图 3.9 和图 3.10 可知，UKF 和 AUKF 的水平失准角在 20s 内均收敛，由表 3.2 可知 UKF 和 AUKF 水平失准角稳态误差相当。在图 3.11 中，UKF 的方位失准角在 600s 内未收敛，600s 时其稳态误差为 $1400.056''$ ，而 AUKF 的方位失准角在 450s 左右收敛，其稳态误差仅为 $72.205''$ 。

由上述仿真可知，在白噪声和一阶马尔科夫噪声下，AUKF 比 UKF 收敛速度快，稳态误差小，尤其是在方位失准角的估计上。不同噪声环境下滤波算法对比仿真结果验证了 AUKF 算法的有效性和适应性。

3.5 ASMUGSF 在初始对准中的应用

实际系统中，先验噪声统计特性一般是不知道的，或者是时变的，而且先验知识会受到动态运行环境的影响。常规 UKF 的性能会降低。本文提出了一种新的无轨迹高斯和滤波——自适应分裂合并的无轨迹高斯和滤波（ASMUGSF）估计系统状态和未知（或时变的）过程噪声。

3.5.1 扩维自适应 UKF

本节算法的目的是估计过程噪声的方差，所以采用与上节不同的增广自适应 UKF^[136]。此算法把系统和测量噪声和状态变量联系起来一起考虑，即把系统和测量

噪声也列为状态。滤波算法如下所示：

■ 初值

$$\hat{x}_0 = E[x_0], \hat{P}_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (3.5.1)$$

$$\hat{x}_0^a = E[x_0^a] = [\hat{x}_0^T \quad \hat{w}_0^T \quad v_0^T]^T \quad (3.5.2)$$

$$P_0^a = \begin{bmatrix} \hat{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

■ 时间更新

$$\chi_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^a, \hat{x}_{k-1}^a + \gamma\sqrt{P_{k-1}^a}, \hat{x}_{k-1}^a - \gamma\sqrt{P_{k-1}^a}] \quad (3.5.4)$$

$$\chi_{i,k|k-1}^x = f(\chi_{i,k-1}^x, \chi_{i,k-1}^w) \quad (3.5.5)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^x \quad (3.5.6)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})^T \quad (3.5.7)$$

■ 测量更新

$$y_{i,k|k-1} = h_k(\chi_{i,k|k-1}^x, \chi_{i,k-1}^v) \quad (3.5.8)$$

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^{(m)} y_{i,k|k-1} \quad (3.5.9)$$

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^{(c)} (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T \quad (3.5.10)$$

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T \quad (3.5.11)$$

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (3.5.12)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (3.5.13)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \quad (3.5.14)$$

$$\varepsilon_k = \hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}, \hat{Q}_k = \sum_{j=1}^M \varepsilon_{k-j} \varepsilon_{k-j}^T / (M-1) \quad (3.5.15)$$

式中， $L_a = n_x + n_w + n_v$ ， $\lambda = \alpha^2(L_a + \kappa) - L_a$ ， $W_0^{(m)} = \lambda / (L_a + \lambda)$ ， $W_0^{(c)} = \lambda / (L_a + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta)$ ， $W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 0.5 \lambda / (L_a + \lambda)$ ， $i = 1, \dots, 2L_a$ ，各变量的意义跟 UKF 相同。 M 是窗口的长度，使用式 (3.5.15) 估计过程噪声方差。

3.5.2 高斯模型的分裂和合并算法

在提出新算法前，先介绍滤波算法所需的高斯模型的分裂和合并算法^[137]。

(1) 高斯模型分裂算法

假定有高斯模型 $z(x) = N(x; \mu, P)$ 。方差 P 的最大特征值为 η ，其对应的特征向量为 V 。定义 $\omega \in [0, 1)$ 为分裂因子， ω 决定分裂后的两个高斯模型均值 μ_1 和 μ_2 之间的距离。定义 $v = \sqrt{\omega\eta}V$ 。可按下面的公式将 $z(x) = N(x; \mu, P)$ 分裂成两个高斯模型 $z_1(x) = N(x; \mu_1, P_1)$ 和 $z_2(x) = N(x; \mu_2, P_2)$ ，公式具体为：

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5 \quad (3.5.16)$$

$$\mu_1 = \mu + v, \mu_2 = \mu - v \quad (3.5.17)$$

$$P_1 = P_2 = P - vv^T \quad (3.5.18)$$

(2) 高斯模型的合并算法

假定有高斯模型 $z_1(x) = N(x; \mu_1, P_1)$ 和 $z_2(x) = N(x; \mu_2, P_2)$ ，相应的权值为 α_1 和 α_2 。将这两个高斯模型合并一个高斯模型 $z(x) = N(x; \tilde{\mu}, \tilde{P})$ 。合并前后各均值和方差的关系为：

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3.5.19)$$

$$\tilde{\mu} = (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) / \tilde{\alpha} \quad (3.5.20)$$

$$\tilde{P} = \left[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_1 \alpha_2 (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T \right] / \tilde{\alpha} \quad (3.5.21)$$

3.5.3 自适应分裂合并的无轨迹高斯和滤波

在实际应用中，过程和（或）测量噪声是非高斯的。假定测量噪声是零均值高斯白噪声，在过程噪声中，使用高斯和的近似方法，来得到非线性滤波问题的近似解。本文提出的新算法是自适应分裂合并的无轨迹高斯和滤波。算法可归纳为以下两步：

■ 初值 ($k = 0$)

初始化噪声为 $w_0 \sim N(\hat{w}_0, \hat{Q}_0)$ 。把此高斯模型分裂成随机高斯混合模型：

$$p(w_0) = \sum_{g=1}^G \alpha_g N(\hat{w}_0^g, \hat{Q}_0^g), \alpha_g = \frac{1}{G} \quad (3.5.22)$$

■ 递归滤波 ($k \leftarrow k - 1$):

为 G 个不同过程噪声条件生成增广的 UT 状态向量，如下所示：

$$x_{g,k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{w}_{k-1}^g \\ \hat{v}_{k-1} \end{bmatrix}, P_{g,k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{P}_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{k-1}^g & 0 \\ 0 & 0 & R_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.5.23)$$

为每个组合 $(x_{g,k-1}^a, P_{g,k-1}^a)$ ，计算 G 个并行的扩维自适应 UKF。然后，可得到 G 个高斯概率密度函数 $N(\hat{x}_{g,k}, \hat{P}_{g,k})$ 及相关权值，权值的计算公式如下：

$$\zeta_g = N(y_k - \hat{y}_{g,k}; v_{k-1}, R_{k-1}) \quad (3.5.24)$$

归一化重要性权值：

$$\alpha'_g = \bar{\zeta}_g = \zeta_g \left(\sum_{i=1}^G \zeta_i \right)^{-1} \quad (3.5.25)$$

计算状态的估计值和对应的协方差：

$$\hat{x}_k = \sum_{g=1}^G \bar{\zeta}_g \hat{x}_{g,k}, \quad \hat{P}_k = \sum_{g=1}^G \bar{\zeta}_g \hat{P}_{g,k} \quad (3.5.26)$$

把 G 个随机高斯混合模型合并成单个高斯模型，此模型更接近于真实的过程噪声模型。然后再按照分裂算法把这个高斯模型分裂成 G 个高斯混合模型的形式，如下：

$$p(w_k) = \sum_{g=1}^G \alpha_g N(\hat{w}_k^g, \hat{Q}_k^g), \quad \alpha_g = 1/G \quad (3.5.27)$$

文献[137]对状态空间进行分裂合并过程，而本文针对过程噪声空间。文献[138]分析了分裂合并无轨迹高斯和滤波的稳定性。基于此，本文新推导算法的稳定性可以保证。

3.5.4 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件，在白噪声条件下，采用频率为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 360s，精对准仿真结果如图 3.12、图 3.13、图 3.14 和表 3.3 所示。

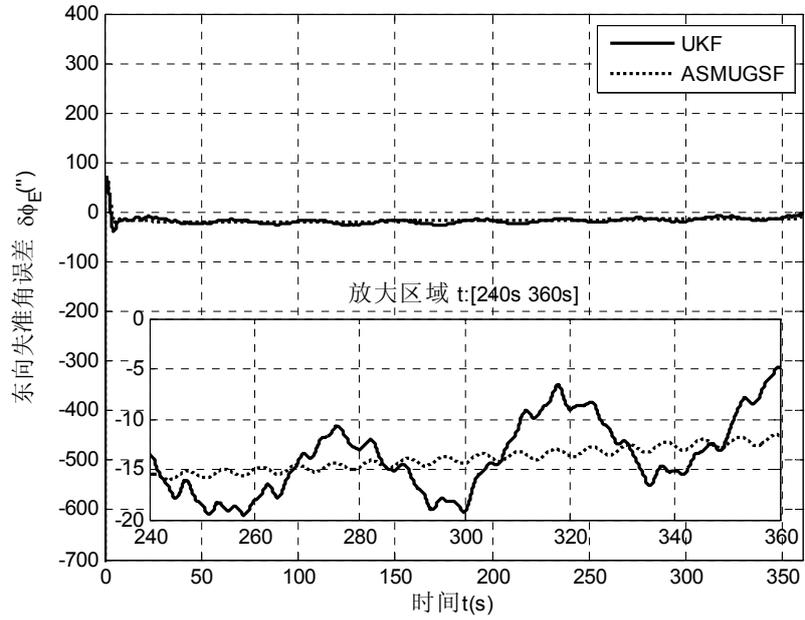


图 3.12 东向失准角误差

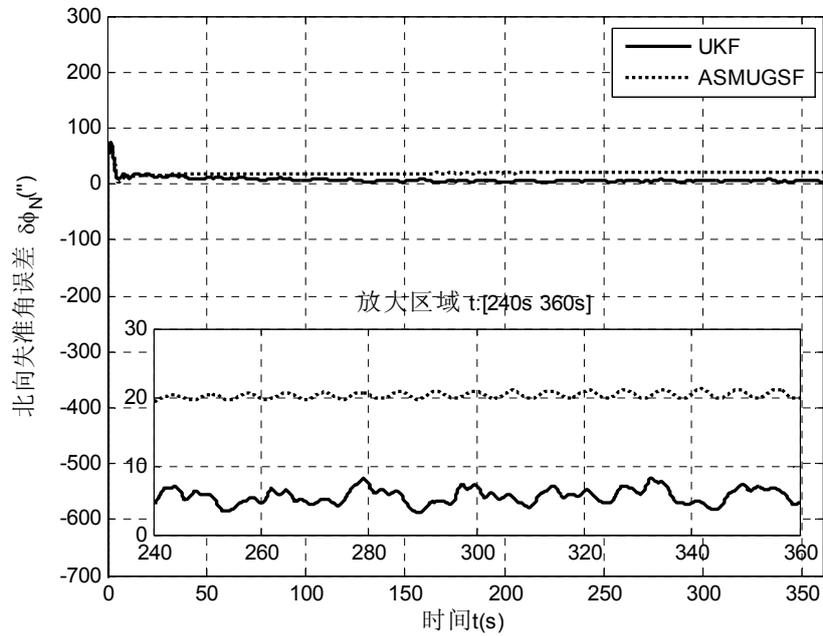


图 3.13 北向失准角误差

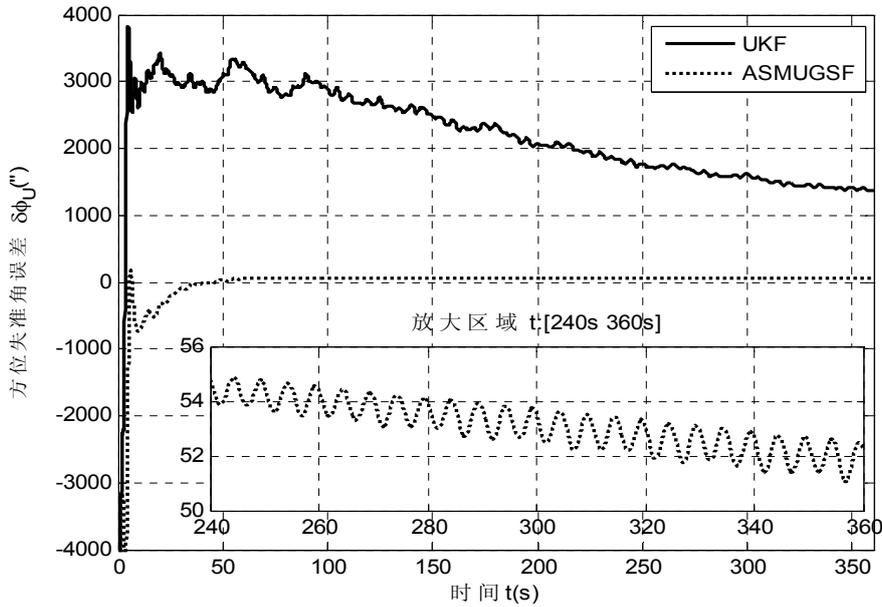


图 3.14 方位失准角误差

表 3.3 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	ASMUGSF
东向失准角误差 (")	-5.634	-12.991
北向失准角误差 (")	4.931	20.432
方位失准角误差 (")	1368.211	52.441

由图 3.12 和图 3.13 可知, UKF 和 ASMUGSF 的水平失准角在 20s 内均收敛, 由表 3.3 可知 UKF 和 ASMUGSF 的水平失准角稳态误差相当。但在图 3.14 中, UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛, 360s 时失准角误差为 1368.211", 而 ASMUGSF 的方位失准角在 60s 左右收敛, 其稳态误差仅为 52.441"。

采用 2.5 节的仿真条件, 在一阶马尔科夫噪声下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 360s, 精对准仿真结果如图 3.15、图 3.16、图 3.17 和表 3.4 所示。

表 3.4 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	ASMUGSF
东向失准角误差 (")	-21.802	-34.764
北向失准角误差 (")	-12.906	16.684
方位失准角误差 (")	1569.170	-44.501

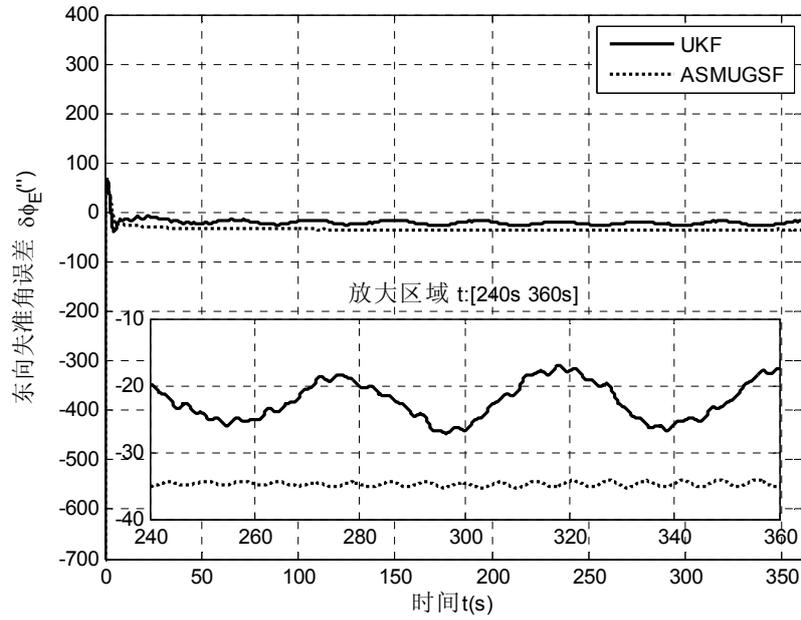


图 3.15 东向失准角误差

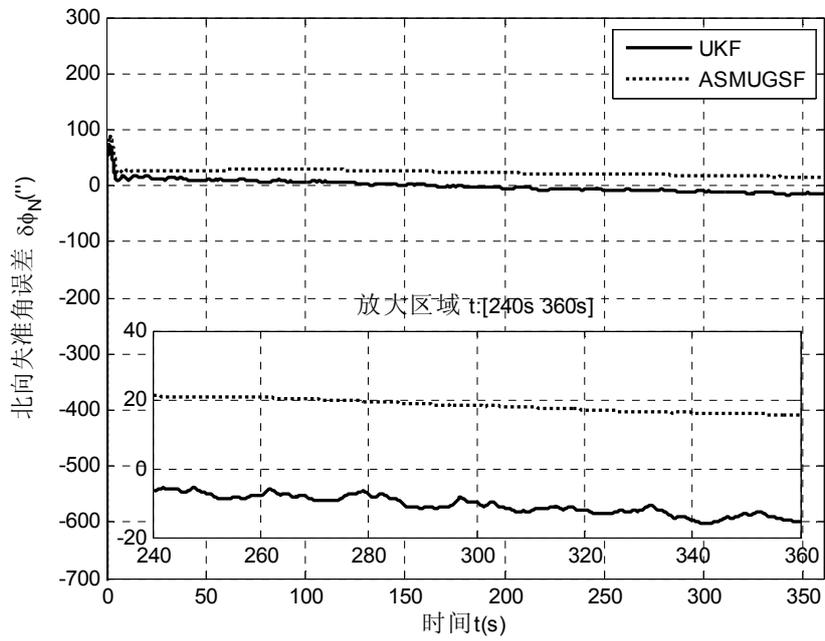


图 3.16 北向失准角误差

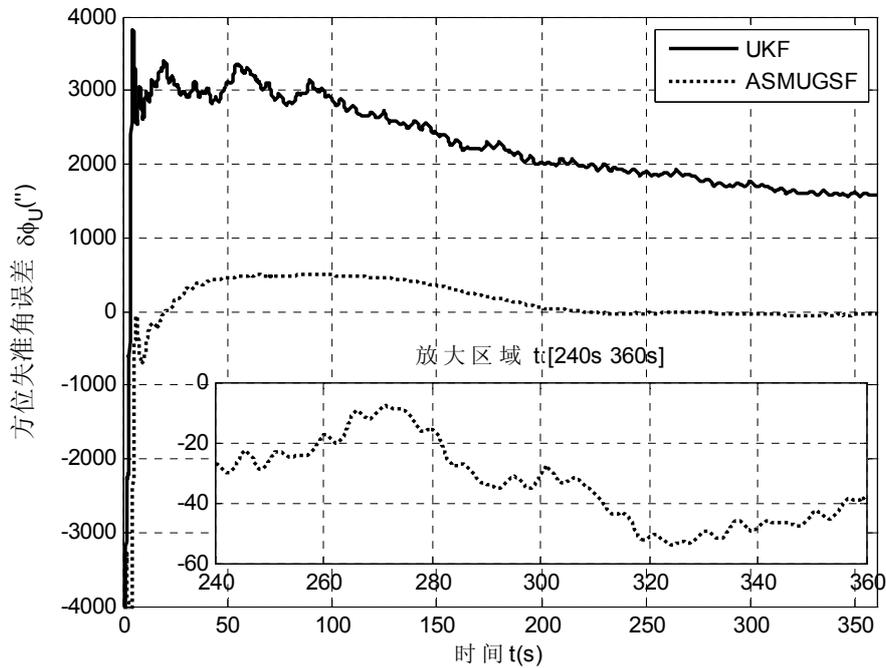


图 3.17 方位失准角误差

在一阶马尔科夫噪声下，由图 3.15 和图 3.16 可知，UKF 和 ASMUGSF 的水平失准角在 20s 内均收敛，由表 3.4 可知 UKF 和 ASMUGSF 北向水平失准角稳态误差相当，ASMUGSF 的东向水平失准角稳态误差的绝对值比 UKF 的大 $14''$ 左右。在图 3.17 中，UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛，360s 时其稳态误差为 $1569.170''$ ，而 ASMUGSF 的方位失准角在 230s 左右收敛，其稳态误差仅为 $-44.501''$ 。

由上述仿真可知，在白噪声和一阶马尔科夫噪声下，ASMUGSF 比 UKF 收敛速度快，稳态误差小，尤其是在方位失准角的估计上。但 ASMUGSF 降低方位失准角误差，却增加了水平失准角误差，总体来看 ASMUGSF 的性能优于 UKF，仿真验证了算法的有效性和合理性。

3.6 本章小结

在本章中，首先介绍了 DDF2、UKF、CKF 三种 SPKF 算法，通过理论分析和仿真验证研究了算法的特点。把 AUKF 应用到晃动基座初始对准中，仿真结果表明 AUKF 比 UKF 收敛快，精度高。在 SMUGSF 的基础上提出了一种新的无轨迹高斯和滤波 ASMUGSF，仿真结果表明 ASMUGSF 整体性能优于 UKF。在晃动基座下，AUKF 和 ASMUGSF 可弥补 UKF 的不足，仿真结果验证了算法的有效性和合理性。

第 4 章 鲁棒 UKF 在初始对准中的应用

4.1 绪论

传统的贝叶斯估计方法建立在 H_2 准则基础上，以均方误差为代价函数，要求系统模型较为准确并且外部干扰信号的统计特性确切已知。在实际应用中，不仅对外部干扰信号的统计特性缺乏了解，而且系统模型本身也存在一定程度的不确定性。随着 H_∞ 控制理论的出现，人们针对滤波系统中存在的不确定性，将 H_∞ 范数引入滤波问题之中，构造滤波器将外界输入干扰到滤波误差输出的 H_∞ 范数最小化，使得最坏干扰情况下的估计误差最小，从而增强了系统的鲁棒性^[113]。

鲁棒滤波（ H_∞ 滤波）方法是在线性以控制理论上发展起来的，对于非线性系统，Einicke 等^[114]和 Shaked 等^[115]提出了基于泰勒级数展开的 H_∞ 扩展卡尔曼滤波方法（ H_∞ Extended Kalman Filter, H_∞ EKF），从而将 H_∞ 滤波推广到非线性估计领域。但采用线性化技术的 H_∞ EKF 方法承袭了 EKF 精度较低的缺陷，即在线性化过程中，取泰勒级数展开的一阶截断，使得均值与方差的递推估计仅具有一阶精度，且忽略了系统状态和噪声的随机分布特性。基于此，将统计线性化技术应用到鲁棒滤波系统，产生了 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波方法（ H_∞ UKF）^[116]，该方法用 Sigma 点变换技术减小了线性化误差，用 H_∞ 滤波方法降低恶劣条件下系统噪声不确定性对滤波性能的影响。

在 4.2 节，讨论 H_∞ 滤波方法的基本理论；在 4.3 节，推导了 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波算法，推导讨论了两者的关系，并推导了 H_∞ 无轨迹信息滤波算法，进而得到 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的平滑算法 SPS (Sigma Point Smoothing)，结合晃动基座初始对准，分析了 H_∞ UKF 算法的性能；在 4.4 节，针对 H_∞ UKF 的不足，推导了 UKF/ H_∞ UKF 混合滤波算法，并仿真分析了该算法的性能；在 4.5 节，总结本章的主要内容。

4.2 H_∞ 滤波的基本理论

4.2.1 H_∞ 滤波问题的提出

Kalman 滤波理论及其算法已形成了一套较完整的理论体系，并在很多领域得到了应用。但是，传统的 Kalman 滤波要保证滤波性能，必须确切已知外部干扰信号的统计特性以及系统的动力学模型，而在更多的实际应用场合，不但很难得到外部干扰

信号精确的统计特性，而且很多情况下系统模型本身还存在一定范围的变化。正是由于无法对上述信息进行精确描述，从而导致了 Kalman 滤波算法的失效，同时也促使了鲁棒滤波理论的产生和发展， H_∞ 滤波算法就是其中较有代表性的方法，理论分析表明该算法具有较强的鲁棒性能，对于系统参数的变化具有较弱的敏感性^[113]。

H_∞ 滤波针对滤波系统存在的模型不确定性和外界干扰的不确定性，将 H_∞ 范数引入到滤波问题中来，构建一个滤波器使得从干扰输入到滤波误差输出的 H_∞ 范数最小化。 H_∞ 滤波对干扰信号的频谱特性不做任何假设（这与标准 Kalman 滤波恰好相反），且使最坏干扰情况下的估计误差最小。由于在实际应用过程中干扰信号的特性是未知的，因此， H_∞ 滤波方法具有很强的实用性^[139]。

本节在对 H_∞ 滤波问题进行数学描述的基础上，讨论一种 H_∞ 次优滤波算法，该算法与传统 Kalman 滤波算法类似，具有严格的递推形式，可以方便地进行计算机迭代运算。同时，从理论角度出发研究了这种 H_∞ 滤波算法与标准 Kalman 滤波方法的关系，以突出这种 H_∞ 滤波算法较标准 Kalman 滤波方法有什么不同之处以及其优点所在。

在阐述 H_∞ 滤波问题之前，首先介绍一些基本的数学知识^[139]：

(1) 信号的范数

从工程应用的角度讲，需要引入描述信号在某种意义上大小的度量，从数学语言讲就是为空间引入范数。对于信号 $u(t)$ ，定义 L_2 范数如下：

$$\|u(t)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \quad (4.2.1)$$

所谓的 $L_2(-\infty, +\infty)$ 空间就是按式 (4.2.1) 定义的 L_2 范数有界的信号集合，即：

$$L_2(-\infty, +\infty) = \{u(t) \mid \|u(t)\|_2 < \infty\} \quad (4.2.2)$$

从数学角度讲， $L_2(-\infty, +\infty)$ 是定义了内积的赋范空间。如果 $u(t)$ 是电流或电压，那么 $L_2(-\infty, +\infty)$ 就代表电能量有限的信号集合。

(2) 系统的范数

设 P 为线性定常系统，则系统的响应特性可以由频域的传递函数矩阵 $P(s)$ 或者时域的单位脉冲响应 $p(t)$ 来描述，即对于任意的输入信号 u ，输出信号 y 可以表示为：

$$y(t) = p(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t p(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.2.3)$$

或

$$Y(s) = P(s)U(s) \quad (4.2.4)$$

如果我们考虑脉冲响应收敛的系统，即 $P(\infty) < \infty$ ，则 $P(s)$ 在 s 闭右半平面解析且满足：

$$\sup_{\text{Re } s \geq 0} |P(s)| < \infty \quad (4.2.5)$$

对于传递矩阵来讲，上式对应于：

$$\sup_{\text{Re } s \geq 0} \sigma_{\max} \{P(s)\} < \infty \quad (4.2.6)$$

式中 $\sigma_{\max}(\bullet)$ 表示矩阵的最大奇异值。

所谓的 H_∞ 空间是指在 s 闭右半平面解析且满足上式的复变函数阵的集合， H_∞ 范数定义为：

$$\|P(s)\| = \sup_{\text{Re } s \geq 0} \sigma_{\max} \{P(s)\} \quad (4.2.7)$$

系统可以看作是输入信号空间到输出信号空间的算子， H_∞ 空间是满足某种特性的系统算子的集合。设 $P \in H_\infty$ ， $u \in L_2(-\infty, +\infty)$ ，则：

$$\|P(s)\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\omega} \sigma_{\max} \{P(j\omega)\} \quad (4.2.8)$$

上式的工程意义在于，系统传递函数阵的 H_∞ 范数实际上反映了输入/输出信号 L_2 范数的最大增益。

设传递函数阵 $P(s)$ 如下：

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

对于给定的传递函数阵 $P(s)$ 和传递函数阵 $K(s)$ ，有线性分式变换 (LFT)：

$$LFT(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} = P_{11} + P_{12}(I - KP_{22})^{-1}KP_{21} \quad (4.2.10)$$

考虑如下系统：

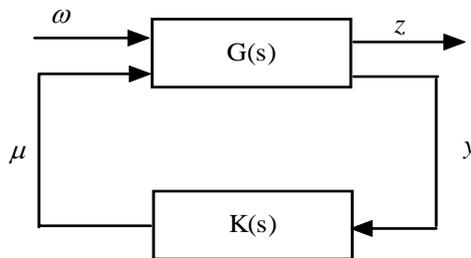


图 4.1 H_∞ 标准设计控制框图

如图所示，其中 μ 为控制输入信号， y 为测量量， ω 为干扰输入信号，一般包括指令信号、干扰和传感器噪声， z 为被控输出，一般包括跟踪误差、调节误差、执行

机构输出。由输入信 μ 、 ω 到输出信 z 、 y 的传递函数阵 $G(s)$ 称为增广被控对象，它包括实际被控对象和为了描述设计指标而设定的加权函数等， $K(s)$ 为 H_∞ 控制器。以上均为向量信号。

增广受控对象 $G(s)$ 的传递函数形式为：

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

输入输出描述为：

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \omega \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \mu \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

从 ω 到 z 的闭环传递函数等于：

$$T_{z\omega}(s) = LFT(G(s), K(s)) = G_{11}(s) + G_{12}(s)K(s)[I - G_{22}(s)K(s)]^{-1}G_{21}(s) \quad (4.2.13)$$

对于给定增广被控对象 $G(s)$ ，求反馈控制器 $K(s)$ ，使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty$ 最小，即 $\min \|T_{z\omega}(s)\|_\infty = \gamma_0$ ，这称为 H_∞ 最优设计问题。如果对于给定 $\gamma (\gamma \geq \gamma_0)$ ，求反馈控制器 $K(s)$ ，使得闭环系统内部稳定且 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty$ 满足 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty < \gamma$ ，则称为 H_∞ 次优设计问题。

4.2.2 H_∞ 滤波问题的表述

针对式 (3.3.1) 和 (3.3.2) 线性离散系统，一般情况下，我们希望利用测量值 y_k 来估计如下状态的任意线性组合：

$$z_k = L_k X_k \quad (4.2.14)$$

式中， $L_k \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 是给定的矩阵。令 $z_k = F(y_0, y_1, \dots, y_k)$ 表示在给定测量值 $\{y_k\}$ 条件下对 z_k 的估计，定义如下的滤波误差：

$$e_k = \hat{z}_k - L_k X_k \quad (4.2.15)$$

如图 4.2 所示，设 $T_k(F)$ 表示将未知干扰 $\{(X_0 - \hat{X}_0), W_k, V_k\}$ 映射至滤波误差 $\{e_k\}$ 的传递函数，则 H_∞ 滤波问题可以叙述如下：

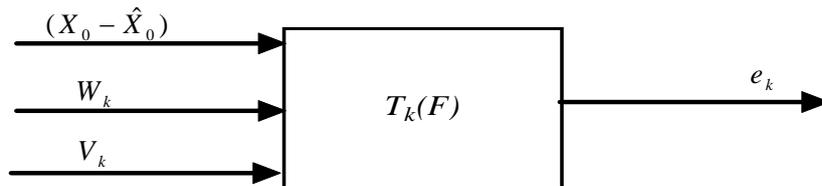


图 4.2 从未知干扰到滤波误差输出的传递函数

定义 4.1 (最优 H_∞ 滤波问题) ^[139] 寻求最优 H_∞ 估计 $\hat{z}_k = F(y_0, y_1, \dots, y_k)$, 使得 $\|T_k(F)\|_\infty$ 达到最小, 即:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= \inf_{F_f} \|T_k(F)\|_\infty^2 \\ &= \inf_{F_f} \sup_{X_0, W \in h_2, V \in h_2} \frac{\sum_{i=0}^k |e_i|^2}{(X_0 - \hat{X}_0)^* \hat{P}_0^{-1} (X_0 - \hat{X}_0) + \sum_{i=0}^k W_i^* Q_i^{-1} W_i + \sum_{i=0}^k V_i^* R_i^{-1} V_i} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

式中, $(\cdot)^*$ 表示向量的复共轭转置向量。

定义 4.2 (次优 H_∞ 滤波问题) ^[139] 给定正数 $\gamma > 0$, 寻找次优 H_∞ 估计 $\hat{z}_k = F(y_0, y_1, \dots, y_k)$, $\|T_k(F)\|_\infty < \gamma$ 达到最小, 即满足:

$$\inf_{F_f} \sup_{X_0, W \in h_2, V \in h_2} \frac{\sum_{i=0}^k |e_i|^2}{(X_0 - \hat{X}_0)^* \hat{P}_0^{-1} (X_0 - \hat{X}_0) + \sum_{i=0}^k W_i^* Q_i^{-1} W_i + \sum_{i=0}^k V_i^* R_i^{-1} V_i} < \gamma^2 \quad (4.2.17)$$

显然, 首先必须保证给定的 $\gamma > \gamma_0$, 该问题才会有解。

以上的定义中 k 是有限的, 当我们考虑将未知干扰 $\{(X_0 - \hat{X}_0), W_k, V_k, k \in [0, \infty)\}$ 映射至滤波误差的 $\{e_k, k \in [0, \infty)\}$ 传递函数时, 通过对所有的 k , 保证 $\|T_k(F)\|_\infty = \gamma_0$ (或 $\|T_k(F)\|_\infty < \gamma$), 就成为无穷范围的最优 (或次优) H_∞ 滤波问题

值得注意的是, 最优 H_∞ 滤波问题的解 γ_0 可以通过以期望的精度迭代次优 H_∞ 滤波问题的 γ 而得到。即不断减小给定的 γ , 使其逐步逼近 H_∞ 最优问题所对应的 γ_0 , 就可以得到 H_∞ 最优估计问题较为理想的近似解。所以, 本节以下的內容主要针对次优 H_∞ 滤波问题进行分析和研究, 由于最优 H_∞ 滤波问题的解可以通过迭代次优 H_∞ 滤波问题的 γ 而得到, 在以后的讨论中, 如果不做特殊声明, 我们所说的 H_∞ 滤波就专指次优 H_∞ 滤波^[139]。

4.2.3 H_∞ 滤波问题的求解方法

定理 4.1 (H_∞ 滤波器) ^[139] 针对式 (3.3.1) 和 (3.3.2) 所示系统, 对于给定的 $\gamma > 0$, 如果矩阵 $\Phi_{k|k-1}$ 满秩, 次优 H_∞ 滤波问题有解的充分必要条件为:

$$\hat{P}_i^{-1} + H_i^T H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (4.2.18)$$

基于上述定理, H_∞ 的滤波方程可归纳为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \quad (4.2.19)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (4.2.20)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (4.2.21)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + K_k [y_k - H_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}] \quad (4.2.22)$$

$$R_{e,k} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k^T & L_k^T \end{bmatrix} \quad (4.2.23)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k^T & L_k^T \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \quad (4.2.24)$$

4.3 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的基本理论

4.3.1 H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的推导过程

对于 (3.2.1) 的非线性离散系统, 可参考 H_∞ 滤波和 UKF 推导 H_∞ UKF 滤波。由式 (4.2.18) 和 (4.2.19) 可得:

$$\begin{aligned} R_{e,k} &= \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k^T & L_k^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_k P_{k|k-1} H_k^T & H_k P_{k|k-1} L_k^T \\ L_k P_{k|k-1} H_k^T & L_k P_{k|k-1} L_k^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k & H_k P_{k|k-1} L_k^T \\ L_k P_{k|k-1} H_k^T & L_k P_{k|k-1} L_k^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \hat{P}_k &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k^T & L_k^T \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \\ &= P_{k|k-1} - \begin{bmatrix} P_{k|k-1} H_k^T & P_{k|k-1} L_k^T \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} H_k P_{k|k-1} \\ L_k P_{k|k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

将统计线性化方法应用于 H_∞ 滤波问题, 可得 $P_{xy} = P_{k|k-1} H_k^T$, $P_{yy} = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ [140], 代入式 (4.3.1) 和式 (4.3.2), 并取 $L_k = I$, 得:

$$R_{e,k} = \begin{bmatrix} P_{yy} & P_{xy}^T \\ P_{xy} & P_{k|k-1} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - \begin{bmatrix} P_{xy} & P_{k|k-1} \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{xy}^T \\ P_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

结合式 (4.3.3)、(4.3.4) 和 UKF 算法, 可得 H_∞ 无迹卡尔曼滤波的具体步骤如下^[116]:

■ 预测 (时间更新)

- 1) 根据 \hat{x}_{k-1} 和 \hat{P}_{k-1} , 按照 (3.3.59) 构造 Sigma 点 $\chi_{i,k-1}$, $i=0, \dots, 2n_x$ 。
- 2) 计算预测 Sigma 点和均值:

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) \quad (4.3.5)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1} \quad (4.3.6)$$

- 3) 计算一步预测方差:

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}] [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q_{k-1} \quad (4.3.7)$$

■ 修正 (测量更新)

- 1) 利用测量方程更新 Sigma 点:

$$y_{i,k|k-1} = h_k(\chi_{i,k|k-1}) \quad (4.3.8)$$

- 2) 计算测量估计值:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} y_{i,k|k-1} \quad (4.3.9)$$

- 3) 计算测量方差:

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T + R_k \quad (4.3.10)$$

- 4) 计算协方差:

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1})(y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k)^T \quad (4.3.11)$$

- 5) 计算滤波增益:

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (4.3.12)$$

- 6) 计算滤波估计:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (4.3.13)$$

- 7) 计算滤波估计方差:

$$R_{e,k} = \begin{bmatrix} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} & P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & P_{k|k-1} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

$$\hat{P}_k = P_{k|k-1} - \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & P_{k|k-1} \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

相对于基于泰勒级数展开的 H_∞ 扩展滤波器, H_∞ 无轨迹卡尔曼滤波的优点是非线性转换过程中利用了参考点邻域内的多个函数值, 而不是只依赖于参考点本身来逼近非线性系统函数, 从而在理论上考虑了系统状态的随机分布特性, 使得对多项式的逼近达到二阶精度。另外, 该方法不需要计算雅可比矩阵, 不要求所处理的非线性函数可微, 因而拓展了处理问题的范围^[116]。

4.3.2 H_∞ UKF 和 UKF 之间相互关系的推导和分析

通过对 H_∞ UKF 算法与 UKF 算法的递推过程的研究, 可以发现两种滤波算法的迭代方程在形式和具体运算上同样非常相似。那么, 进一步就希望通过具体的分析, 讨论如何对 Q_k , R_k 进行适当选择, 使得 H_∞ UKF 算法与 UKF 算法完全等同。

首先, 比较两种滤波器的增益方程, 很显然, 在协方差矩阵相同的条件下, 如果取相同的 R_k , 两增益方程完全相同。

将 UKF 算法、 H_∞ UKF 算法的系统噪声方差阵分别表示为 Q'_k 和 Q''_k , 通过推导寻找 Q'_k 和 Q''_k 的关系, 使得两滤波器的协方差矩阵相同, 为此我们假设两种滤波器的增益方程相同, 即两种滤波器的协方差矩阵相同且取相同的 R_k 。若两种滤波器的协方差阵相同, 则比较式 (3.3.70) 和式 (4.3.15) 可得:

$$Q'_k = Q''_k + K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T - \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & P_{k|k-1} \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

假设:

$$D = P_{k|k-1} - K_k P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \quad (4.3.17)$$

给上式两边同时减去 $\gamma^2 I$, 整理后可得:

$$P_{k|k-1} - \gamma^2 I = D - \gamma^2 I + K_k P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \quad (4.3.18)$$

把式 (4.3.18) 代入式 (4.3.14), 考虑到滤波器正常时 $P_{k|k-1}$ 、 R_k ($k=0,1,\dots$) 均是正定的对称阵, 于是利用矩阵分解可将 $R_{e,k}^{-1}$ 分解为:

$$\begin{aligned}
R_{e,k}^{-1} &= \begin{bmatrix} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} & P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & D - \gamma^2 I - K_k P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & -K_k^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} & 0 \\ 0 & (D - \gamma^2 I)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_k & I \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

把式 (4.3.19) 代入 (4.3.15) 可得:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & P_{k|k-1} \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} & D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} & 0 \\ 0 & (D - \gamma^2 I)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T \\ D \end{bmatrix} \\
&= P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T + D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

将上式代入式 (4.3.16), 并由式 (4.3.12) 可得:

$$Q'_k = Q_k'' - D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D \tag{4.3.21}$$

显然, 在 UKF 中如果系统噪声方差阵 Q'_k 用 $Q_k'' - D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D$ 来代替 (其中 Q_k'' 为 H_∞ UKF 的系统噪声方差阵), 测量噪声方差与 H_∞ UKF 选取相同, 那么相应的 UKF 必然满足 H_∞ 范数的约束条件, 这时该滤波器实质上也就成了 H_∞ UKF 次优滤波器, 具有更好的稳定性和鲁棒性能。

变换式 (4.3.21) 可以得到:

$$Q_k'' = Q'_k + D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D \tag{4.3.22}$$

显然, 若满足传统 UKF 的约束条件, 那么 Q_k'' 的条件则要宽松的多了。因为 H_∞ UKF 把模型的不确定部分以及系统干扰的不确定部分均看作 $D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D$, 这就是 H_∞ UKF 对于系统的模型不确定性和系统干扰的不确定性有很强的鲁棒性的原因, 只要选取合适的 γ 就可较为合理地改变 $D^T (D - \gamma^2 I)^{-1} D$ 的值, 以达到很好的模拟模型的不确定部分以及系统干扰的不确定部分, 使不确定性对滤波器的影响受到限制。这就大大提高 H_∞ UKF 的鲁棒性, 这也是为什么 H_∞ UKF 的鲁棒性要比 UKF 强的深层次原因。

另一方面, 考虑给出的 H_∞ UKF 的算法, 可以看出如果把系统噪声方差阵 Q_k 和测量噪声方差阵 R_k 均看作单位矩阵来处理的, 这样处理的依据就在于 H_∞ UKF 可以把系统的模型不确定部分和系统干扰的不确定部分看作是系统的不确定性, 而此种滤波方法又对系统的不确定性有很强的鲁棒性, 这样做的好处在于可以扩大 H_∞ UKF 的使用范围, 因为它实际上不考虑系统模型以及系统干扰的不确定性, 只要在滤波器存在的前提下选择合理的值就可以很好的抑制这些不确定性的影响^[139]。

4.3.3 平滑算法

H_∞ UKF 可以抑制噪声的不确定性，但鲁棒边界会导致滤波器的稳态值在小范围内震荡，可加入平滑算法。UKF 的平滑算法是在无迹信息滤波（Unscented Information Filter, UIF）的基础上推导的^[141]，因此本小节首先详细推导 H_∞ UIF^[142]。

由式 (4.2.21) 可得：

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} = P_{k|k-1} H_k^T [I + R_k^{-1} H_k P_{k|k-1} H_k^T]^{-1} R_k^{-1} \\ &= P_{k|k-1} [I + H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k|k-1}]^{-1} H_k^T R_k^{-1} = [P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k]^{-1} H_k^T R_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

另外，由文献[142]可知：

$$\hat{P}_k^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k - \gamma^{-2} I \quad (4.3.24)$$

由上式可得：

$$P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k = \hat{P}_k^{-1} + \gamma^{-2} I \quad (4.3.25)$$

将式 (4.3.25) 代入式 (4.3.23) 可得：

$$K_k = (\hat{P}_k^{-1} + \gamma^{-2} I)^{-1} H_k^T R_k^{-1} \triangleq \bar{P}_k^{-1} H_k^T R_k^{-1} \quad (4.3.26)$$

其中， $\bar{P}_k = \hat{P}_k^{-1} + \gamma^{-2} I$ 。

将式 (4.3.26) 代入式 (4.2.22)，并对方程两边同时左乘 \bar{P}_k ，可得：

$$\begin{aligned} \bar{P}_k \hat{x}_k &= \bar{P}_k \hat{x}_{k|k-1} + \bar{P}_k K_k (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})) \\ &= \bar{P}_k \hat{x}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})) \\ &= (\hat{P}_k^{-1} + \gamma^{-2} I - H_k^T R_k^{-1} H_k) \hat{x}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} (y_k - v_k) \\ &= P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} (y_k - v_k) \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

$$\bar{P}_k = P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (4.3.28)$$

其中， $v_k = h(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \hat{x}_{k|k-1}$ 。

考虑到近似公式 $P_{xy} = P_{k|k-1} H_k^T$ ，并结合 H_∞ UKF 可得：

$$v_k = h(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \hat{x}_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}) - (P_{k|k-1}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k})^T \hat{x}_{k|k-1} \quad (4.3.29)$$

$$H_k^T R_k^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} P_{k|k-1} H_k^T R_k^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} R_k^{-1} \quad (4.3.30)$$

$$H_k^T R_k^{-1} H_k = P_{k|k-1}^{-1} P_{k|k-1} H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k|k-1} P_{k|k-1}^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} R_k^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T P_{k|k-1}^{-1} \quad (4.3.31)$$

将式 (4.3.29) 和式 (4.3.30) 代入式 (4.3.27)，并将式 (4.3.31) 代入式 (4.3.28)，可得 H_∞ UIF 如下所示：

$$d_k = d_{k|k-1} + P_{k|k-1}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} R_k^{-1} (y_k - v_k) \quad (4.3.32)$$

$$D_k = D_{k|k-1} + P_{k|k-1}^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} R_k^{-1} P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k}^T P_{k|k-1}^{-1} \quad (4.3.33)$$

其中, $d_{k|k-1}$ 和 d_k 定义为:

$$d_{k|k-1} = D_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1} \quad (4.3.34)$$

$$d_k = D_k \hat{x}_k \quad (4.3.35)$$

$D_{k|k-1}$ 和 D_k 定义为:

$$D_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1} \quad (4.3.36)$$

$$D_k = \hat{P}_k^{-1} + \gamma^{-2} I \quad (4.3.37)$$

上述递推过程和 UIF 对比可知两者在形式上等同, 且文献[142]采用的多传感器数据融合算法, 跟 UIF 推导的多传感器数据融合算法一致, 并参考文献[143]对 UKF 平滑算法的推导, 可得 UKF 和 H_∞ UKF 的平滑算法形式上等同。下面直接给出 H_∞ UKF 的平滑算法 SPS^[144], 主要由以下两步:

1) 初始化

N 是固定区间的大小, 从 H_∞ UKF 的终值获得相关变量:

$$x_N^* = \hat{x}_N, \quad P_N^* = \hat{P}_N, \quad S_{y(N)} = \text{chol}(P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}) \quad (4.3.38)$$

$$v_{s(N)} = S_{y(N)}^{-T} (y_N - \hat{y}_N), \quad S_{s(N)} = K_N^T, \quad j = N-1 \quad (4.3.39)$$

其中, chol 表示 Cholsky 矩阵分解。

2) Sigma 点伪测量更新

生成扩展的 UT 点^[144], 然后完成平滑:

$$h_{\psi_j}(x_j, \omega_j) = S_{s(j+1)} \left[P_{j+1}^* \right]^{-1} f_j(x_j, \omega_j) \quad (4.3.40)$$

$$R_{\psi_j} = I + S_{s(j+1)} \left[P_{j+1}^* \right]^{-1} S_{s(j+1)}^T \quad (4.3.41)$$

$$\psi_j^i = h_{\psi_j}(\chi_j^i, w_j^i), \quad i = 0, 1, \dots, 2(n_x + n_w + n_v) \quad (4.3.42)$$

$$\hat{\psi}_j = \sum_{i=0}^{2(n_x + n_w + n_v)} W_i^{(c)} \psi_j^i \quad (4.3.43)$$

$$P_{x\psi_j} = \sum_{i=0}^{2(n_x + n_w + n_v)} W_i^{(c)} (\chi_j^i - \hat{x}_j) (\psi_j^i - \hat{\psi}_j)^T \quad (4.3.44)$$

$$P_{w\psi_j} = \sum_{i=0}^{2(n_x + n_w + n_v)} W_i^{(c)} w_j^i (\psi_j^i - \hat{\psi}_j)^T \quad (4.3.45)$$

$$P_{\psi\psi_j} = \sum_{i=0}^{2(n_x+n_w+n_v)} W_i^{(c)} (\psi_j^i - \hat{\psi}_j) (\psi_j^i - \hat{\psi}_j)^T + P_{x\psi_j} \quad (4.3.46)$$

$$S_{\psi_j} = \text{chol}(P_{\psi\psi_j}) \quad (4.3.47)$$

$$\psi_j = v_{s(j+1)} + S_{s(j+1)} [P_{j+1}^*]^{-1} x_{j+1}^* \quad (4.3.48)$$

$$v_{\psi(j)} = S_{\psi_j}^{-T} (\psi_j - \hat{\psi}_j) \quad (4.3.49)$$

$$K_{x\psi(j)} = P_{x\psi_j} S_{\psi_j}^{-1} \quad \text{and} \quad K_{w\psi(j)} = P_{w\psi_j} S_{\psi_j}^{-1} \quad (4.3.50)$$

$$x_k^* = \hat{x}_k + K_{x\psi(j)} v_{\psi(j)} \quad \text{and} \quad w_k^* = K_{w\psi(j)} v_{\psi(j)} \quad (4.3.51)$$

$$P_j^* = P_j - K_{x\psi(j)} K_{x\psi(j)}^T \quad (4.3.52)$$

$$Q_j^* = Q_j - K_{w\psi(j)} K_{w\psi(j)}^T \quad (4.3.53)$$

$$P_{xw_j}^* = -K_{x\psi(j)} K_{w\psi(j)}^T \quad (4.3.54)$$

$$Q_{s(j)} [S_{s(j)}^T \quad 0]^T = qr \left(\begin{bmatrix} K_j & K_{x\psi(j)} \end{bmatrix}^T \right) \quad (4.3.55)$$

$$v_{s(j)} = [I \quad 0] Q_{s(j)}^T [v_{s(j)}^T \quad v_{\psi(j)}^T]^T \quad (4.3.56)$$

其中，矩阵 $Q_{s(j)}$ 和 $S_{s(j)}$ 是下一次循环需要的，可以有式 (4.3.55) 的右侧进行 QR 分解获得^[134]。

3) 判断：每次循环递减 j ，如果 $j < 0$ 退出循环；否则转到 2)。

4.3.4 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件，在白噪声条件下，采用频率为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 300s，精对准仿真结果如图 4.3、图 4.4、图 4.5 和表 4.1 所示。

表 4.1 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	H_∞ UKF-SPS
东向失准角误差 (")	-11.579	-73.132
北向失准角误差 (")	5.775	-57.027
方位失准角误差 (")	1453.6	16.479

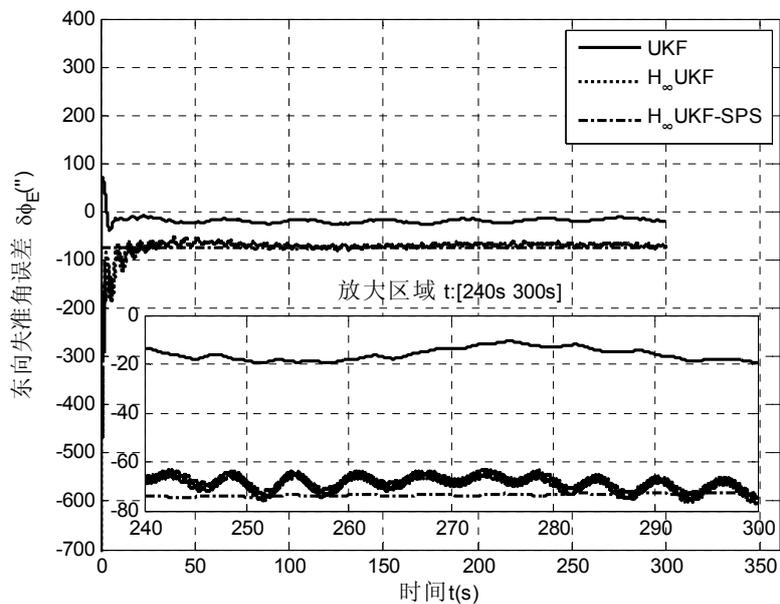


图 4.3 东向失准角误差

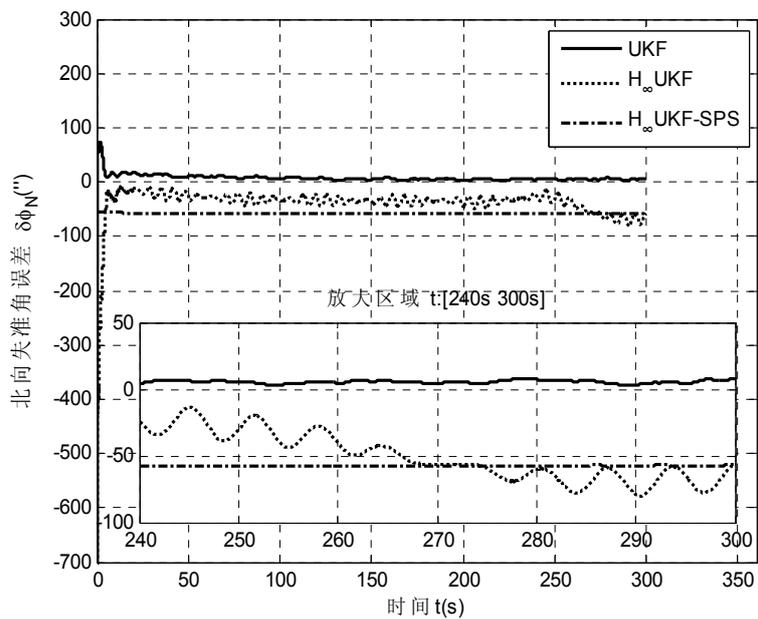


图 4.4 北向失准角误差

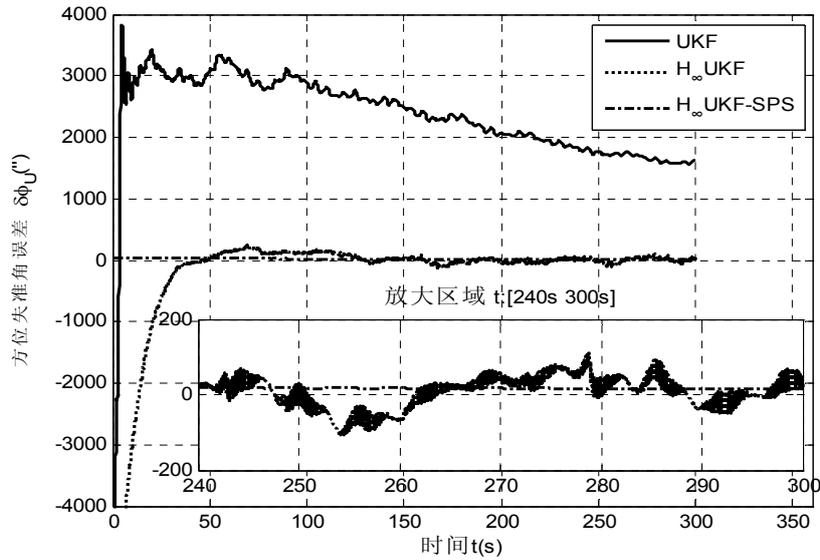


图 4.5 方位失准角误差

由图 4.3 和图 4.4 可知, UKF 和 H_∞ UKF 的水平失准角在 20s 内均收敛, 由表 4.1 可知 H_∞ UKF 的水平失准角的稳态误差在 $60''$ 左右, 大于 UKF 的。但在图 4.5 中, UKF 的方位失准角在 300s 内未收敛, 300s 时失准角误差为 $1453.6''$, 而 H_∞ UKF 的方位失准角在 270s 左右收敛, 其稳态误差均值仅为 $16.479''$, 标准差为 $22.907''$ 。

采用 2.5 节的仿真条件, 在一阶马尔科夫噪声下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 300s, 精对准仿真结果如图 4.6、图 4.7、图 4.8 和表 4.2 所示。

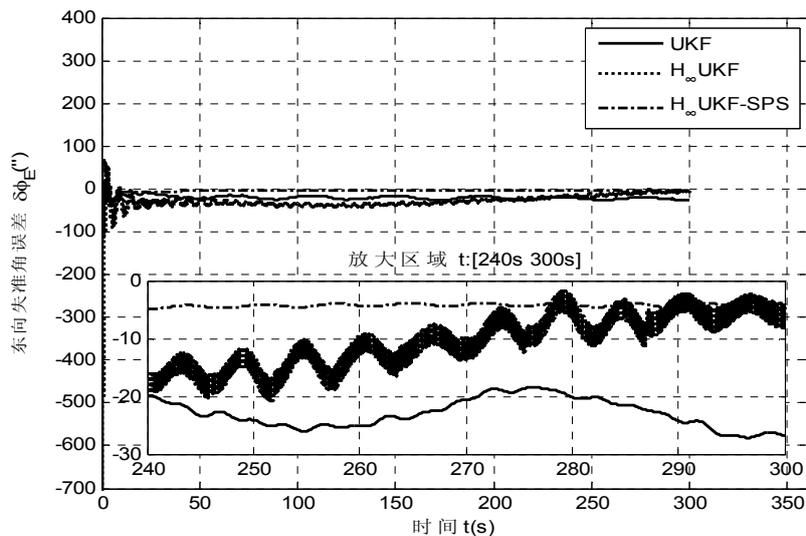


图 4.6 东向失准角误差

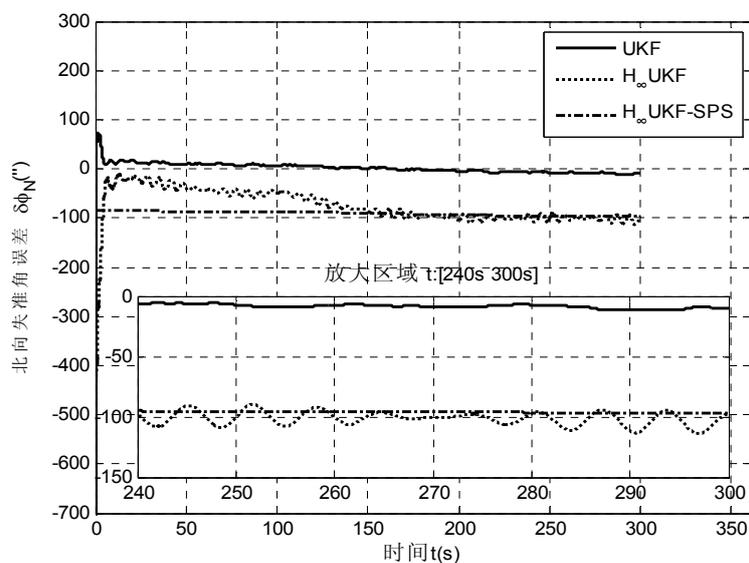


图 4.7 北向失准角误差

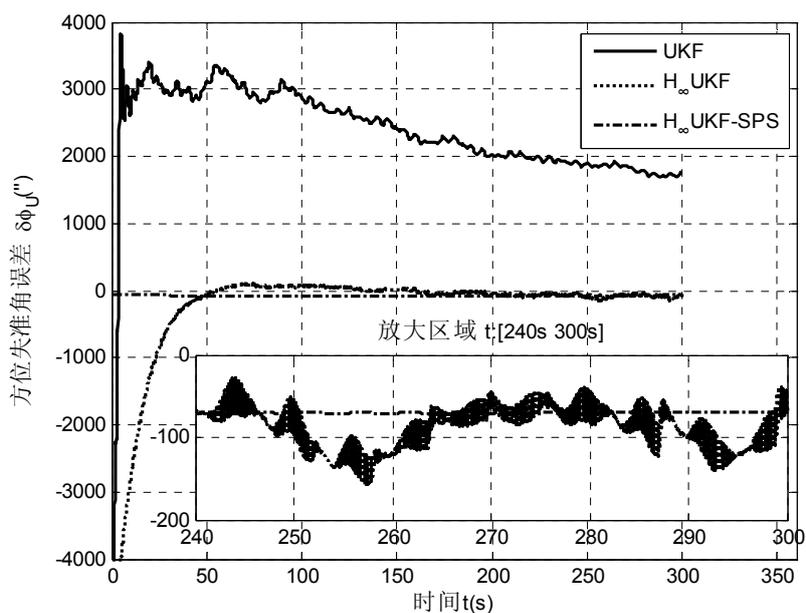


图 4.8 方位失准角误差

表 4.2 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	H_{∞} UKF-SPS
东向失准角误差 (")	-19.218	-3.934
北向失准角误差 (")	7.203	-97.412
方位失准角误差 (")	1629.979	-69.767

在一阶马尔科夫噪声条件下，由图 4.6 和图 4.7 可知，UKF 和 H_∞ UKF 的水平失准角在 20s 内收敛，UKF 和 H_∞ UKF 的东向失准角稳态误差相当，但 H_∞ UKF 的北向失准角稳态误差为 $97.411''$ ，偏大。在图 4.8 中，UKF 的方位失准角在 300s 内未收敛，其稳态误差为 $1629.979''$ ， H_∞ UKF 在 150s 左右收敛，其稳态误差为 $-69.767''$ ，标准差为 $29.642''$ 。

在白噪声和一阶马尔科夫噪声环境下， H_∞ UKF 的方位失准角比 UKF 的收敛快，稳态误差小。但 H_∞ UKF 牺牲水平失准角的估计精度，总体评价 H_∞ UKF 优于 UKF。在实际应用中，可以把 UKF 和 H_∞ UKF 结合使用，提高整体性能。

4.4 UKF/ H_∞ UKF 混合滤波在初始对准中的应用

4.4.1 UKF/ H_∞ UKF 混合滤波算法

在混合滤波中，可认为滤波器的增益是 UKF 和 H_∞ UKF 滤波增益的加权和，即：

$$K_k^m = dK_k^U + (1-d)K_k^\infty \quad (4.4.1)$$

其中， d 为实数常数，且 $0 \leq d \leq 1$ ， K_k^U 是 UKF 的滤波增益， K_k^∞ 为 H_∞ UKF 的滤波增益。 K_k^U 是利用 $\gamma \rightarrow 0$ 来求得，依据是 UKF 可看作 H_∞ UKF 的特例。对于加权系数 d ，有如下结论：

$$d = \text{tr}(\hat{P}_k^\infty) / \text{tr}(\hat{P}_k^U + \hat{P}_k^\infty) \quad (4.4.2)$$

其中， $\text{tr}(\bullet)$ 表示矩阵的迹， \hat{P}_k^U 、 \hat{P}_k^∞ 分别表示 UKF 和 H_∞ UKF 的估计误差方差阵。

证明：

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_k) \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + dK_k^U(y_k - \hat{y}_k) + (1-d)K_k^\infty(y_k - \hat{y}_k) \\ &= d[\hat{x}_{k|k-1} + K_k^U(y_k - \hat{y}_k)] + (1-d)[\hat{x}_{k|k-1} + K_k^\infty(y_k - \hat{y}_k)] \\ &= d\hat{x}_k^U + (1-d)\hat{x}_k^\infty \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

其中， \hat{x}_k^U 、 \hat{x}_k^∞ 分别为 UKF 和 H_∞ UKF 的状态估计值，即混合估计值等于 UKF 和 H_∞ UKF 估计值的加权和。同理，可以得到，混合滤波估计误差等于 UKF 滤波估计误差和 H_∞ UKF 滤波估计误差的加权和，即：

$$\tilde{x}_k = d\tilde{x}_k^U + (1-d)\tilde{x}_k^\infty \quad (4.4.4)$$

其中， \tilde{x}_k^U 为 UKF 滤波估计误差， \tilde{x}_k^∞ 为 H_∞ UKF 滤波估计误差。因此，混合滤波估计误差方差为：

$$\hat{P}_k^m = E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T] = d^2 \hat{P}_k^U + d(1-d) \hat{P}_k^{U\infty} + d(1-d) \hat{P}_k^{\infty U} + (1-d)^2 \hat{P}_k^\infty \quad (4.4.5)$$

其中, $(\hat{P}_k^{\infty U})^T = \hat{P}_k^{U\infty} = E[\tilde{x}_k^{U\infty} (\tilde{x}_k^{U\infty})^T]$ 为 UKF 滤波估计误差和 H_∞ UKF 滤波估计误差的协方差。根据最小估计误差方差的原则, 要使混合滤波估计误差方差 \hat{P}_k^m 最小, 等价于使 \hat{P}_k^m 的迹 $tr \hat{P}_k^m$ 最小, 即:

$$\partial[tr \hat{P}_k^m] / \partial d = 0 \quad (4.4.6)$$

$$\therefore \hat{P}_k^{U\infty} = (\hat{P}_k^{\infty U})^T \quad (4.4.7)$$

$$\therefore tr \hat{P}_k^{U\infty} = tr(\hat{P}_k^{\infty U})^T \quad (4.4.8)$$

$$\therefore tr \hat{P}_k^m = d^2 tr \hat{P}_k^U + 2d(1-d) tr(\hat{P}_k^{\infty U})^T + (1-d)^2 tr \hat{P}_k^\infty \quad (4.4.9)$$

$$\therefore \partial[tr \hat{P}_k^m] / \partial d = 2d tr \hat{P}_k^U + 2(1-d) tr \hat{P}_k^{U\infty} - 2(1-d) tr \hat{P}_k^\infty \quad (4.4.10)$$

由式 (4.4.10) 可求得:

$$d = tr(\hat{P}_k^\infty - \hat{P}_k^{U\infty}) / tr(\hat{P}_k^U + \hat{P}_k^\infty - 2\hat{P}_k^{U\infty}) \quad (4.4.11)$$

两种估计是不相关的, 所以协方差阵 $\hat{P}_k^{U\infty} = 0$, 则可得式 (4.4.2)。证毕。

综合上述推导, UKF/ H_∞ UKF 可归纳为如下步骤:

- 1) 根据 H_∞ UKF 算法流程求得本次滤波增益 K_k^∞ 和估计误差方差 \hat{P}_k^∞ ;
- 2) 根据 UKF 算法流程求得本次滤波增益 K_k^U 和估计误差方差 \hat{P}_k^U ;
- 3) 根据本次迭代的 \hat{P}_k^U 、 \hat{P}_k^∞ , 利用式 (4.4.2) 求得加权系数 d ;
- 4) 根据本次求得的 UKF 滤波增益 K_k^U 、 H_∞ UKF 的滤波增益 K_k^∞ 和加权系数 d , 根据式 (4.4.1) 求得本次混合滤波增益 K_k^m ;
- 5) 根据本次测量值和混合滤波增益 K_k^m , 求得本次状态估计值;
- 6) 回到步骤 1, 继续迭代。

4.4.2 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件, 在白噪声条件下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 300s, 精对准仿真结果如图 4.9、图 4.10、图 4.11 和表 4.3 所示。

表 4.3 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	H_∞ UKF	UKF/ H_∞ UKF
东向失准角误差 (")	-11.579	-73.132	-25.648
北向失准角误差 (")	5.775	-57.027	-37.370
方位失准角误差 (")	1453.6	16.479	-32.915

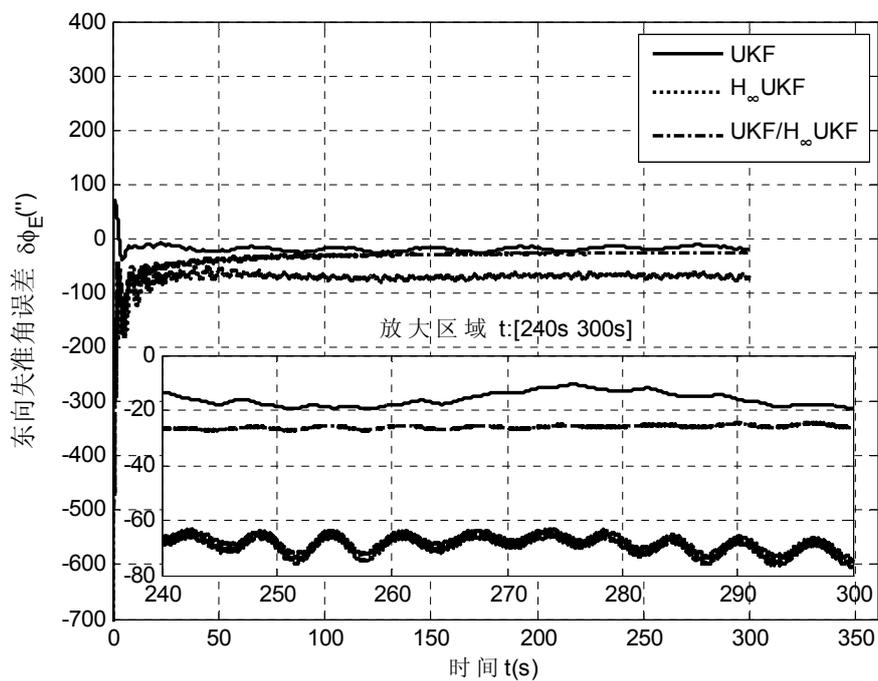


图 4.9 东向失准角误差

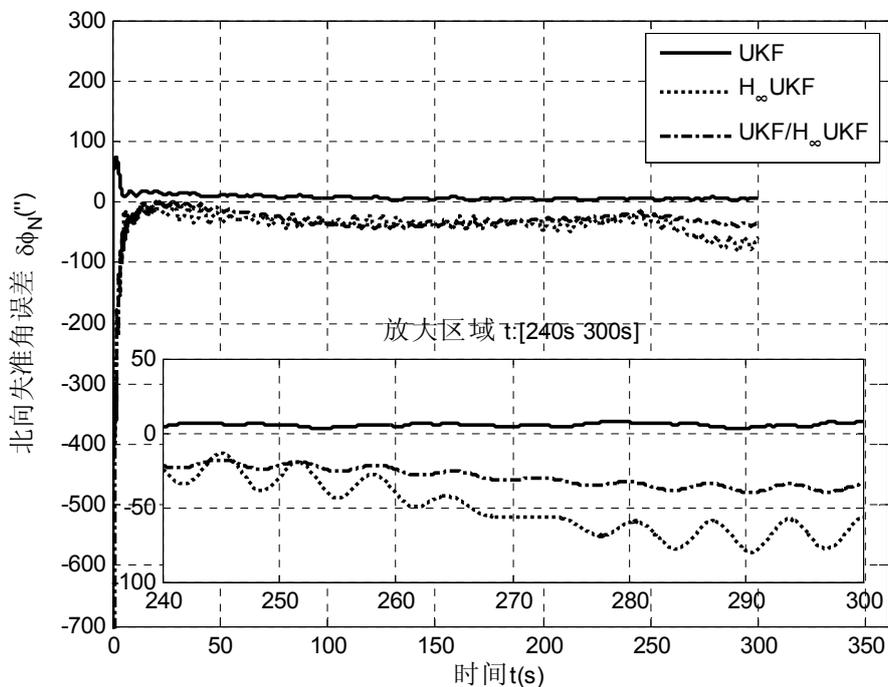


图 4.10 北向失准角误差

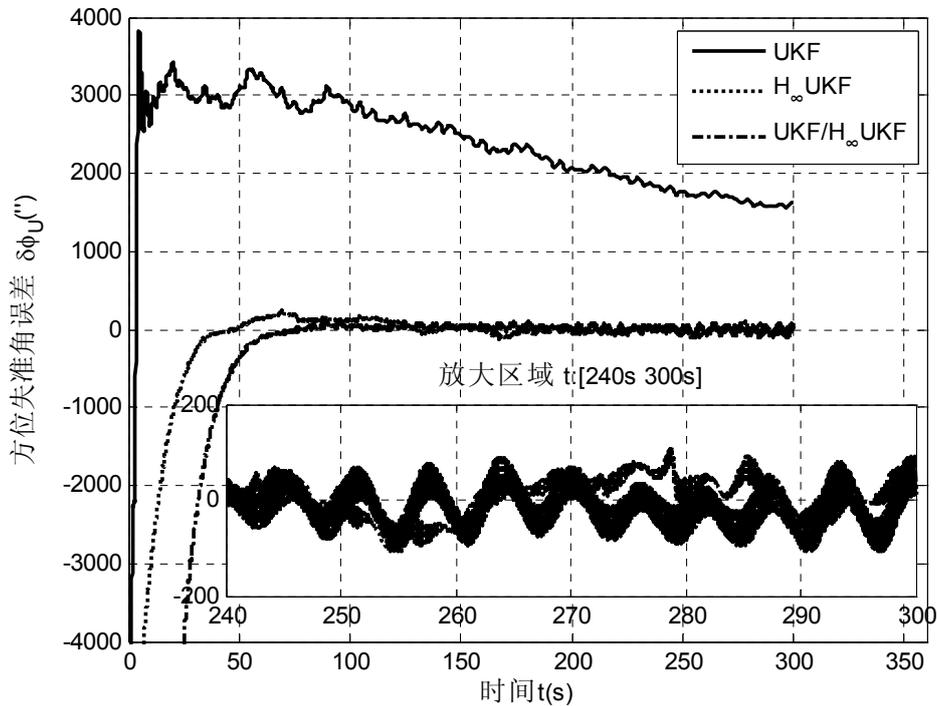


图 4.11 方位失准角误差

由图 4.9 和图 4.10 可知, UKF、 H_{∞} UKF 和 UKF/ H_{∞} UKF 的水平失准角在 50s 内均收敛, 混合算法的水平失准角误差比 UKF 的大, 比 H_{∞} UKF 的小, 在 30 角秒左右, 符合精对准的要求。在图 4.11 中, UKF 的方位失准角在 300s 内未收敛, 300s 时失准角误差为 1453.6", 而 H_{∞} UKF 和 UKF/ H_{∞} UKF 在 200s 左右收敛, 最后 100s 的均值分别为 16.479"、-32.915", 均满足精对准的精度要求。

采用 2.5 节的仿真条件, 在一阶马尔科夫噪声下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 300s, 精对准仿真结果如图 4.12、图 4.13、图 4.14 和表 4.4 所示。

表 4.4 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	H_{∞} UKF	UKF/ H_{∞} UKF
东向失准角误差 (")	-19.218	-3.934	-21.841
北向失准角误差 (")	7.203	-97.412	-58.729
方位失准角误差 (")	1629.979	-69.767	63.032

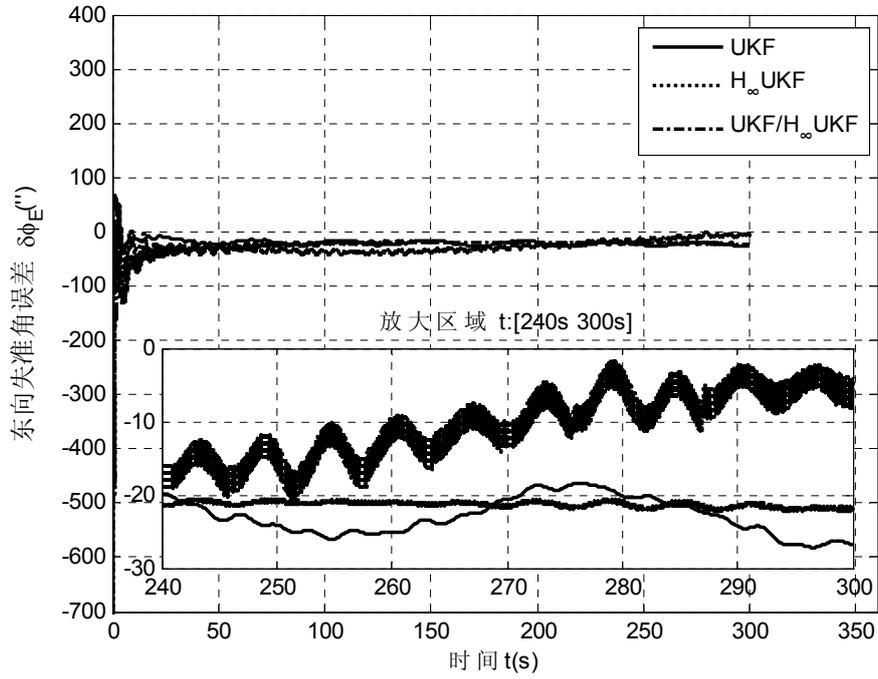


图 4.12 东向失准角误差

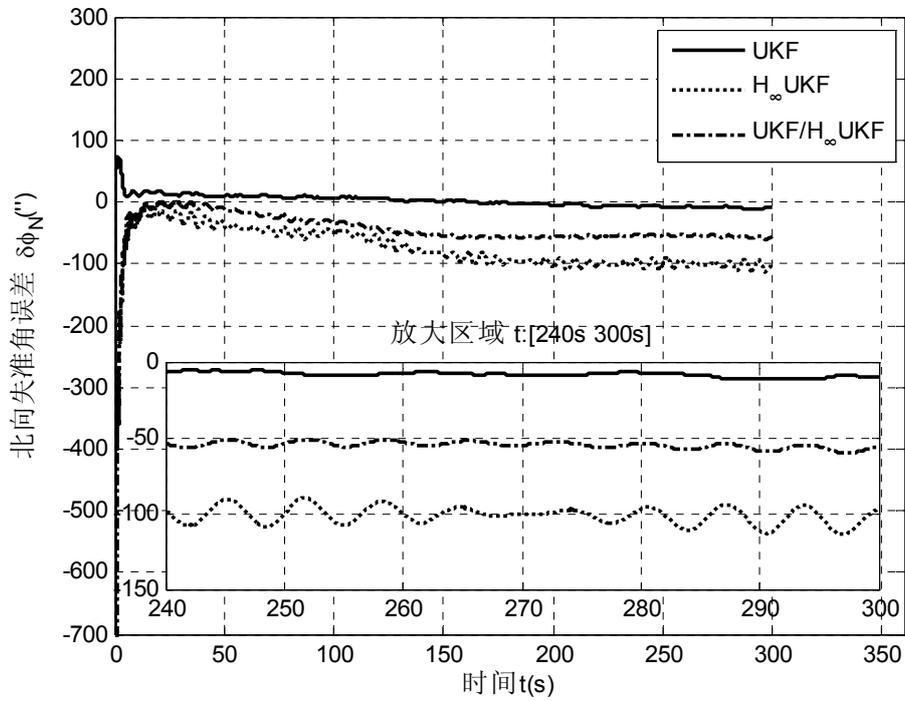


图 4.13 北向失准角误差

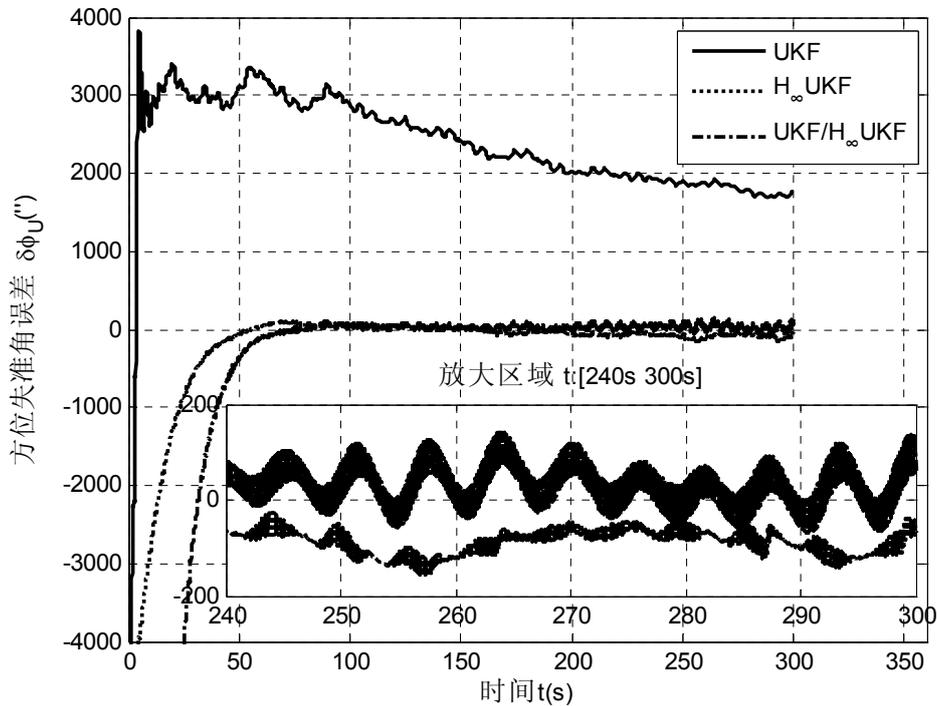


图 4.14 方位失准角误差

由图 4.12 和图 4.13 可知，三种滤波算法的水平失准角在 50s 内即收敛，由表 4 可知 UKF/ H_{∞} UKF 的水平失准角误差比 UKF 的大，比 H_{∞} UKF 的小，控制在 $60''$ 内，基本满足精对准的要求。由图 4.15 可知，在方位失准角的估计上，UKF/ H_{∞} UKF 的精度高于其他两种算法的，且比 UKF 收敛快。

在白噪声和一阶马尔科夫噪声环境下， H_{∞} UKF 的方位失准角比 UKF 的收敛快，稳态误差小。但 H_{∞} UKF 牺牲水平失准角的估计精度。 $UKF/H_{\infty}UKF$ 方位失准角的估计与 $H_{\infty}UKF$ 的相当，符合精对准的要求，且改善了水平失准角的估计，基本满足精对准的要求。

4.5 本章小结

在本章中，首先介绍 H_{∞} 滤波算法的基本原理，在此基础上推导了 H_{∞} UKF 滤波算法。本文推导了 H_{∞} UKF 和 UKF 之间的关系，加深对 H_{∞} UKF 的理解。详细推导 H_{∞} UIF，得到了 H_{∞} UKF 的平滑滤波算法。通过仿真试验分析了 H_{∞} UKF 的优缺点。针对 H_{∞} UKF 的不足，提出了 UKF/ H_{∞} UKF 混合滤波算法，仿真试验表明该算法保持方位失准角估计的精度，且改善了水平失准角的估计精度。

第 5 章 高斯粒子滤波在初始对准中的应用

5.1 引言

因 GPF 使用蒙特卡罗模拟 (MC) 采样来计算预测和更新的均值向量与协方差矩阵, 所以仍需要对大量的随机样本进行计算。拟蒙特卡罗 (QMC) 采样是不同于传统的 MC 采样的一种采样方法。在大多数情况下, QMC 采样优于 MC 采样。因 QMC 基于确定性采样策略, QMC 采样能产生偏差更小的样本集^[145], 使样本点的分布更均匀。但 QMC 方法通过在样本之间引入相关性来避免它们聚集在一起或形成空洞, 因此 k 时刻的高斯粒子和 $k-1$ 时刻的高斯粒子之间必然会存在不同程度的相关性。为了解决这个问题, 采用随机化的 QMC 方法。在此基础上本文提出了基于随机化拟蒙特卡罗的高斯粒子滤波 (Randomized Quasi Monte Carlo-GPF, RQMC-GPF)。

同时传统 GPF 在粒子抽样和算法结构等方面还存在一定的问题, 针对这些问题, 不少学者提出了改进 GPF 算法。文献[111-112]提出了采用无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF) 来获取 GPF 的重要性函数的改进算法无迹高斯粒子滤波 (Unscented GPF, UGPF), 由于 CKF 的精度等于或好于 UKF, 且计算量小, 本文提出了一种新的高斯粒子滤波算法 CGPF (Cubature GPF, CGPF)。

在 5.2 节, 介绍 GPF 算法; 在 5.3 节提出了一种新的高斯粒子滤波 RQMC-GPF, 通过初始对准仿真分析了算法的性能; 在 5.4 节, 提出了容积高斯粒子滤波 (CGPF), 并通过初始对准仿真分析了算法的性能; 在 5.5 节, 总结了本章的主要内容。

5.2 高斯粒子滤波

高斯粒子滤波器^[108]是基于粒子滤波方法得到一个高斯分布来近似估计未知状态变量的后验分布。通过理论分析和计算机仿真研究表明, GPF 适应于非线性非高斯系统, 与 EKF、UKF、GHF 相比滤波精度较高, 相比粒子滤波, 不需要重采样步骤和不存在粒子退化现象, 极大的降低了粒子滤波的复杂性和计算量。

5.2.1 高斯粒子滤波算法

高斯粒子滤波^[108]是采用粒子滤波方法^[104]得到一个高斯密度函数, 通过这一个高斯密度函数来近似估计状态的后验概率分布。

通常一个高斯随机变量 x 的密度函数可表示为:

$$N(x; \mu, P) = (2\pi)^{-n_x/2} |P|^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^T P^{-1} (x-\mu)}{2}\right) \quad (5.2.1)$$

式中 μ 表示 x 的 n_x 维向量均值, P 为 x 的协方差阵。

假设在 $k-1$ 时刻 $p(x_k | y_{k-1}) = N(x_k; \bar{\mu}_k, \bar{P}_k)$, 其中 $\bar{\mu}_k$ 、 \bar{P}_k 是基于先验信息计算得到。当得到一个新的测量值后, 我们将通过下面方法得到滤波和预测概率分布。

(1) 测量更新

当获得 k 时刻的测量值时滤波概率分布方程式 (3.2.5) 可近似为:

$$p(x_k | y_{1:k}) = C_k p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) = C_k p(y_k | x_k) N(x_k; \bar{\mu}_k, \bar{P}_k) \quad (5.2.2)$$

高斯粒子滤波测量更新是通过一个高斯分布近似上述滤波概率分布, 即 $\hat{p}(x_k | y_{1:k}) = N(x_k; \mu_k, P_k)$ 。通常 $p(x_k | y_{1:k})$ 的均值和协方差是不能精确求解的。对高斯粒子滤波则是通过对重要性函数 $q(x_k | y_{1:k})$ 抽取样本 $x_k^{(i)}$ 并计算其权值 $\omega_k^{(i)}$, i 表示样本数, 然后基于这些样本及其权值来获得状态 x_k 的均值 μ_k 和协方差 P_k 的蒙特卡罗估计为:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} x_k^{(i)} \quad (5.2.3)$$

$$P_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} (\mu_k - x_k^{(i)}) (\mu_k - x_k^{(i)})^T \quad (5.2.4)$$

式中, M 表示样本总数, 这样更新后的滤波概率分布可近似为:

$$p(x_k | y_{1:k}) \approx N(x_k; \mu_k, P_k)。$$

重要性函数 $q(x_k | y_{1:k})$ 的选取依赖于所研究的问题^[111-112]。就 GPF 来讲, 一种简单的选取就是使 $q(\cdot) = p(x_k | y_{1:k-1}) = N(x_k; \bar{\mu}_k, \bar{P}_k)$, 这种方法在一些应用中是不适合的。

(2) 预测更新

测量更新时 GPF 将滤波概率分布近似为一个高斯分布, 假如在 k 时刻能对状态转移分布 $p(x_{k+1} | x_k)$ 抽样, 则就可以通过新的高斯分布来近似预测概率分布。预测概率分布 $p(x_{k+1} | y_{1:k})$ 近似为:

$$\begin{aligned} p(x_{k+1} | y_{1:k}) &= \int p(x_{k+1} | x_k) p(x_k | y_{1:k}) dx_k \\ &\approx \int p(x_{k+1} | x_k) N(x_k; \mu_k, P_k) dx_k \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

通过蒙特卡罗方法预测概率分布近似为:

$$p(x_{k+1} | y_{1:k}) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(x_{k+1} | x_k^{(i)}) \quad (5.2.6)$$

其中粒子 $x_k^{(i)}$ 是从 $N(x_k; \mu_k, P_k)$ 采样获得, 基于 k 时刻的测量, 依次从 $i=1, 2, \dots, M$ 的状态转移分布 $p(x_{k+1} | x_k^{(i)})$ 抽样可得到 $k+1$ 时刻的状态粒子 $x_{k+1}^{(i)}$, 然后通过计算可得到预测概率分布的均值和协方差为:

$$\bar{\mu}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_{k+1}^{(i)} \quad (5.2.7)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\bar{\mu}_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})(\bar{\mu}_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})^T \quad (5.2.8)$$

这样 GPF 的预测概率分布就近似为: $p(x_{k+1} | y_{1:k}) \approx N(x_{k+1}; \bar{\mu}_{k+1}, \bar{P}_{k+1})$ 。

也可以通过另一种方法计算得到预测概率分布的近似高斯分布。即利用测量更新时的粒子 $x_k^{(i)}$ 及权值 $\omega_k^{(i)}$ 计算预测概率分布。其算法为:

$$\begin{aligned} p(x_{k+1} | y_{1:k}) &= \int p(x_{k+1} | x_k) p(x_k | y_{1:k}) dx_k \\ &\approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} p(x_{k+1} | x_k^{(i)}) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

预测概率分布的均值和协方差为:

$$\bar{\mu}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} x_{k+1}^{(i)} \quad (5.2.10)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} (\bar{\mu}_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})(\bar{\mu}_{k+1} - x_{k+1}^{(i)})^T \quad (5.2.11)$$

以上两种计算方法结果相同, 本文仿真采用前面一种方法。

对于适合用高斯分布近似的后验分布, 高斯粒子滤波的滤波估计收敛于状态的最小方差估计^[108]。理论分析和仿真表明高斯粒子滤波的精度高于 EKF、UKF 和 GHF, 实时性好于 PF。

5.2.2 高斯粒子滤波算法步骤

高斯粒子滤波算法的步骤归纳如下:

■ 修正 (测量更新)

1) 对重要性函数 $q(x_k | y_{1:k})$ 抽样得到样本点集 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

2) 计算每个样本 (粒子) 权值:

$$\bar{\omega}_k^{(i)} = \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) N(x_k = x_k^{(i)}; \bar{\mu}_k, \bar{P}_k)}{q(x_k^{(i)} | y_{1:k})} \quad (5.2.12)$$

3) 权值标准化:

$$\omega_k^{(i)} = \frac{\bar{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^M \bar{\omega}_k^{(i)}} \quad (5.2.13)$$

4) 按照式 (5.2.3) 和 (5.2.4) 计算滤波均值和协方差。

■ 预测 (时间更新)

1) 对滤波概率分布 $N(x_k; \mu_k, P_k)$ 抽取得到样本集 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

2) 分别对 $i=1, 2, \dots, M$ 时的状态转移分布 $p(x_{k+1} | x_k = x_k^{(i)})$ 抽样得到 $\{x_{k+1}^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

3) 按照式 (5.2.7) 和 (5.2.8) 计算预测均值和协方差。

或者采用下面算法:

1) 采用测量更新算法中滤波概率分布 $p(x_k | y_{1:k})$ 的粒子及权值 $\{x_k^{(i)}, \omega_k^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

2) 分别对 $i=1, 2, \dots, M$ 时的状态转移分布 $p(x_{k+1} | x_k = x_k^{(i)})$ 抽样得到 $\{x_{k+1}^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

3) 按照式 (5.2.10) 和 (5.2.11) 计算预测均值和协方差。

5.3 RQMC-GPF 在初始对准中的应用

QMC 方法同 MC 方法一样, 已经广泛应用于优化和模拟计算。拟蒙特卡罗积分方法的提出是为了解决数值积分问题, 其基本思想是用精选的确定性点来取代拟蒙特卡罗积分中的随机点。RQMC-GPF 算法利用随机拟蒙特卡罗采样所产生的的较少的、随机的且分布更规则的点集取代蒙特卡罗采样产生的随机点集, 从而更均匀随机地表示采样空间, 改善了高斯粒子滤波的估计性能。

5.3.1 随机拟蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法是一种随机模拟方法, 最早可追溯到 18 世纪下半叶的 Bufon 实验。Bufon 实验源于 1777 年法国学者提出的用实验的方法求圆周率 π 的值。近代蒙特卡罗方法的研究始于 20 世纪 40 年代, Metropolis 等科学家提出使用蒙特卡罗方法攻克物理学中的数值模拟问题, 20 世纪 50 年代该方法被引入统计学中, 最近十年左右, 由于计算机计算能力的超指数级增长使蒙特卡罗方法的研究在统计学、物理学、机器学习等领域开始复苏, 涌现出许多新的蒙特卡罗算法。蒙特卡罗积分就是将积分看成是求某种随机变量的数学期望, 并用抽样方法加以估计^[146], 如:

$$I = \int_D g(x) p(x) dx \quad (5.3.1)$$

其中, D 为 n 维空间 \mathfrak{R}^n 的一个区域, $g(x)$ 是任意函数, I 是在以 D 为积分区域上的积分 $p(x) \geq 0$, 且:

$$\int_{\mathfrak{R}^n} p(x) dx = 1 \quad (5.3.2)$$

通常将 $p(x)$ 看成是状态变量的概率密度函数, 只要积分有界, 则 I 可看成是 $g(x)$ 的数学期望, 即 $I = E[g(x)]$ 。从 $p(x)$ 抽取随机变量 x 的 N 个样本 $\{x_i\}^N$, 则 $g(x_i)$ 的平均值为:

$$g_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (5.3.3)$$

易知 g_N 是 I 的无偏估计。如果 $\{x_i\}^N$ 中的样本相互独立, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 根据大数定理, 样本的均值 g_N 以概率 1 收敛到 I 。上述近似过程即为蒙特卡罗积分近似计算方法。式 (5.3.3) 是渐近无偏的。假设不为零的有界方差 δ_{MC}^2 存在, 即:

$$\delta_{MC}^2 = \int_D (g(x) - I)^2 p(x) dx < +\infty \quad (5.3.4)$$

存在, 则在 $1-\alpha$ 置信水平下, 不等式:

$$|g_N - I| \leq \frac{\lambda_\alpha \delta_{MC}}{\sqrt{N}} \quad (5.3.5)$$

成立, 由此可以看出, 给定置信水平 $1-\alpha$, 则蒙特卡罗积分方法的误差由 δ_{MC} 和 N 决定。增大样本数目 N 或者降低方差 δ_{MC} 可以减少误差。

MC 方法用 N 个随机点, 其积分误差阶的平均数量级是 $O(n^{-1/2})$ 。显然, 肯定存在误差的绝对值不大于平均值的 N 个点。如果我们能构造出这样的点集, 就可以较大的改进原有的方法。为了拓展数值积分而提出拟蒙特卡罗 (Quasi-Monte Carlo, QMC) 方法。QMC 主要是构造积分误差比平均误差小的点集, 其所用的随机数与蒙特卡罗积分不同, 仅积分形式相同^[147]。

因此, 用精选的确定性点取代 MC 中的随机点是 QMC 方法的基本思想。QMC 方法可以看作是 MC 方法的确定部分, 即用比 MC 方法随机点集中更规则分布的点集 P_N 来近似。QMC 方法具有确定性特性表明, 可以选择在样本空间提供最好的可能性分布的点集 P_N , 从而在某种程度上避免由于随机采样引起的可能的“间隙和簇”。这些确定点也可称为“低偏差点”, 可认为是对均匀分布的偏离量化度量。

主要用偏差来决定 QMC 近似积分的准确性, 因此积分所采用的确定性点集也称为低偏差点集。点集分布的越均匀, 准确性就越高, 偏差就越小。关于 QMC 有关的

一个重要公式是 Koksma-Hlawka 不等式：

$$|I - \hat{I}(g, P_N)| \leq V(g)D(P_N) \quad (5.3.6)$$

其中， $V(g)$ 是 Hardy and Krause 意义上，在 D 上 g 的有界全变差；差异 $D(P_N)$ ，反应了样本 P_N 分布的均匀程度，其定义为：

$$D(P_N) = \sup_{x \in D} |U_N(x) - U(x)| \quad (5.3.7)$$

其中， $U(x)$ 是 P_N 经验分布， $U(x)$ 是上 D 的均匀分布。

拟蒙特卡罗积分的性质如下：

- 1) 一旦 $g(x)$ 给定， $V(g)$ 就是一个常数，因此， $D(P_N)$ 决定积分误差的大小；
- 2) 由 Koksma-Hlawka 不等式知，最好的样本点是具有最小差异度的样本点，最小的差异度为 $O((\log N)^{n-1} / N)^{[148]}$ ；
- 3) 在差异度相同的情况下，拟蒙特卡罗积分比蒙特卡罗积分的收敛速度快

QMC 积分选择确定点的特性，可以有确定误差估计。一般说来，我们能根据误差估计的要求事先确定 QMC 所要的点数。另外，如果用同样多的函数值，QMC 方法比 MC 方法有更高的精度。所以，QMC 积分的确定性和高精度，表明 QMC 优于 MC 积分。

由于实际中不可能有真正的随机数，通过构造伪随机数 MC 方法实现模拟积分。无论用何种方法产生伪随机数，MC 的局限性在于这些随机数总是一个有限长的循环集合，而且序列偏差的上确界达到最大值，因此需要产生低偏差的确定性的序列。对产生的序列的基本要求是任意长的子序列都能均匀地填充函数空间，这种序列称为拟随机数。因此拟随机数更致力于均匀性，而伪随机数仅是为了模拟随机性。但 QMC 通过在样本之间引入相关性来避免它们聚集在一起或形成空洞，需要引入某种随机性来解决这个问题，RQMC 方法则生成这样的拟随机数。利用 RQMC 方法求解积分问题需要实现以下两部分：

(1) 生成 RQMC 低偏差点集

选择合适的低偏差点集是应用 QMC 积分的关键。目前，低偏差点序列主要有两种：digital nets 和 lattice 点。Digital nets 的例子包括 Halton 序列、Sobol 序列和 Niederreiter 序列，这里以 Halton 序列为例来说明。多维 Halton 序列可以通过生成多个对应于不同底数的一维 Halton 序列来得到，这些底数是素数。例如，我们先取前 d 个素数 p_1, p_2, \dots, p_d 。然后，对于某个整数 m ，将 m 表示成以 p_i 为基的数位，再将这数位按反序排列再在前面加小数点得到新的值，便是序列中某个随机数向量的第 j

个元素。最后，生成相对应的一维的底数为 p_i 的 Halton 序列 $\{H_{p_i}(j), j=1, \dots, N\}$ ， $i=1, \dots, d$ 。 d 维 Halton 序列即可得到 $u^{(j)} = [H_{p_1}(j), H_{p_2}(j), \dots, H_{p_d}(j)]$, $j=1, \dots, N$ 。关于 Sobol 序列和 Faure 序列等的具体产生算法见文献^[147]。

低偏差序列的目的是尽可能的均匀一致。检验均匀性的一个直观方法是绘出两个相邻坐标的投影图。图 5.1 给出了 15 维空间的前 128 个样本的两两坐标投影。第一行是 1-2 两两投影，紧跟着是 5-6、9-10 和 13-14 两两投影。如文献经常报道的，随着维数的增加，序列的均匀性逐渐变差。很明显，高维空间的样本逐渐聚成一团或形成空洞，Faure 的情况尤其严重。为了解决这个问题需要引入某种随机性^[150]。

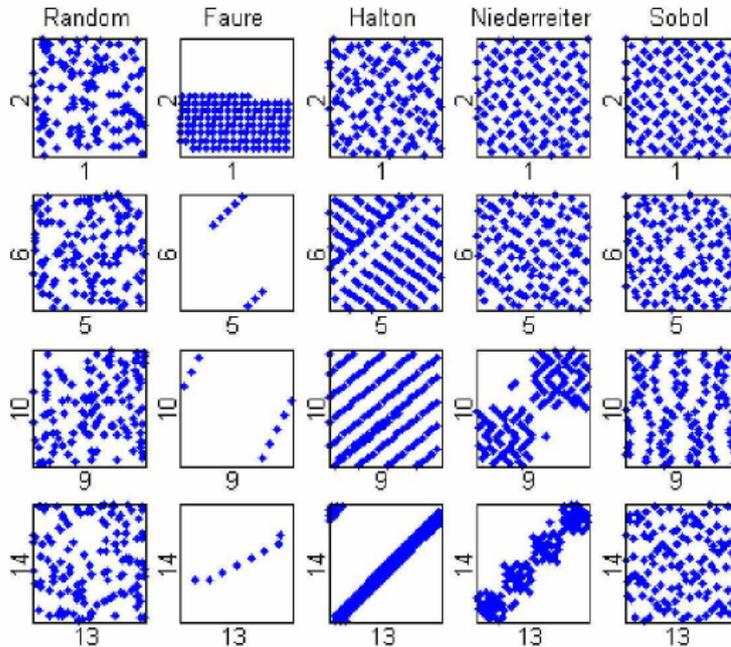


图 5.1 前 128 个样本（15 维）的两两坐标投影^[150]

由于采用了确定性的低偏差点集，QMC 方法要对滤波结果近似的准确性分析非常困难，同时也无法应用对误差估计的统计方法。因此，将随机化 QMC 方法扩展并具有两个以下特点：点集中的每个点在单位立方体上服从均匀分布；在随机化后点集的低偏差特性依然具备。

同样以 Halton 序列为例，通过随机化序列的起始点实现 Halton 序列的随机化。每次循环时， p_i 基和初始值，都是随机生成的，当问题比较严重时，也可丢掉部分点。假设 $u^{(0)} = 0$ ， p_1, p_2, \dots, p_n 为序列起始点，且 n_0 为对应整数，即 $u^{(0)} = H_b(n_0)$ ，则第 j 个点为 $H_b(n_0 + j)$ ，这些去掉前 n_0 个元素形成的 Halton 序列可以克服高维系统的问题。本节以 p 为基的随机化 Halton 序列，构造低偏差点集^[147]。多维 Halton 序列可以通过

合并若干个以不同的质数为基的一维 Halton 序列得到，具体算法如下：

算法 1：产生以 p 为基的长度为 M 的随机化 Halton 序列 $\{u^{(i)}, i=1, \dots, M\}$

1) 初始化：

- 选择一个随机化的初始值 $u^{(1)} \sim Uniform[0,1]$ 。

2) For $n=1, 2, \dots, M$

- 计算 $k = \lceil -\ln(1-u^{(n)})/\ln(p) \rceil + 1$

- 计算 $b_k^p = (p+1-p^k)/p^k$

- $u^{(n+1)} = u^{(n)} + b_k^p$

图 5.2 (a)、(b) 分布是根据算法 1 产生的二维随机化 Halton 序列和普通的伪随机序列的点分布图，随机点个数同为 2048，可以看出二维随机化 Halton 序列的分布要比伪随机序列的分布均匀。

(2) 生成拟高斯分布随机点

针对高维积分式 (5.3.1) 的逼近，假设 $p(x)$ 是高斯分布，即 $x \sim N(\mu, P)$ 。然后，允许应用低偏差点集，需要找到一个映射函数 ϕ ，该函数将积分区域投影到单位超立方体。首先处理一维情况，然后扩展到高维情况。

对于标准高斯分布 $x \sim N(0,1)$ ，映射函数可以定义为：

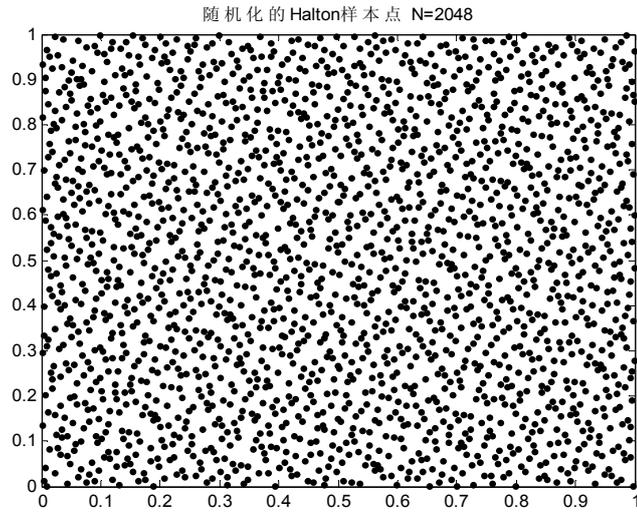
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \quad (5.3.8)$$

然后，积分 I 可以通过利用一个低偏差点集 $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ 来逼近，即：

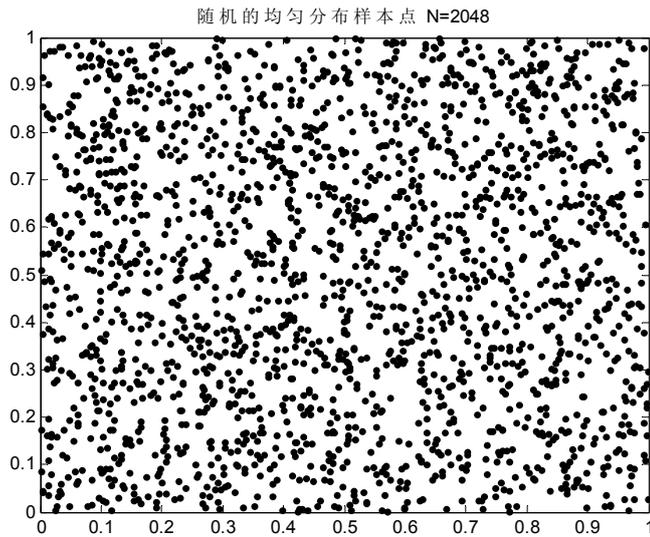
$$I = \int f(x)p(x)dx = \int_{(0,1)} f(\phi^{-1}(u))du \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\phi^{-1}(u^{(j)})) \quad (5.3.9)$$

其中，逆映射 $\phi^{-1}(\bullet)$ 可以通过一种快算算法计算^[149]。

假设 $\{u^{(i)}, i=1, \dots, M\}$ 是单位超立方体 $[0,1]^d$ 中的一个拟随机序列矢量集。以将它们转化为一个拟高斯序列 $\{x^{(i)}, i=1, \dots, M\}$ ，且其均值为 μ 、方差为 P ，具体算法如下^[147]：



(a)



(b)

图 5.2 拟随机序列与伪随机序列分布对比图

算法 2: 将序列 $\{u^{(i)}, i=1, \dots, M\}$ 转换为服从均值为 μ 、方差为 P 的拟高斯序列 $\{x^{(i)}, i=1, \dots, M\}$

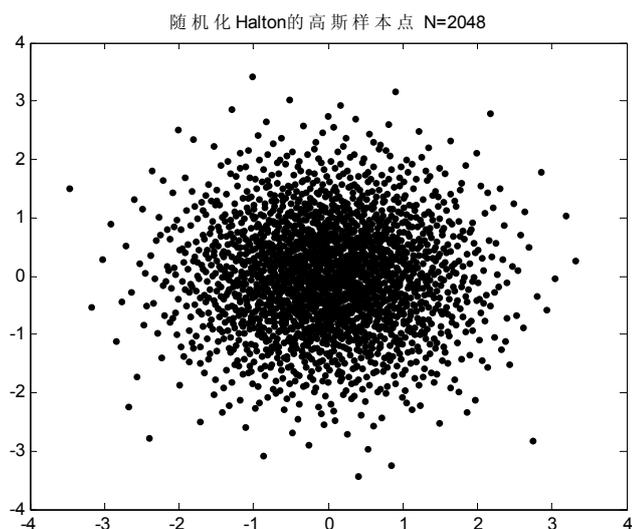
1) 对方差矩阵 Σ 进行 Cholesky 分解:

$$P = R^T R \quad (5.3.10)$$

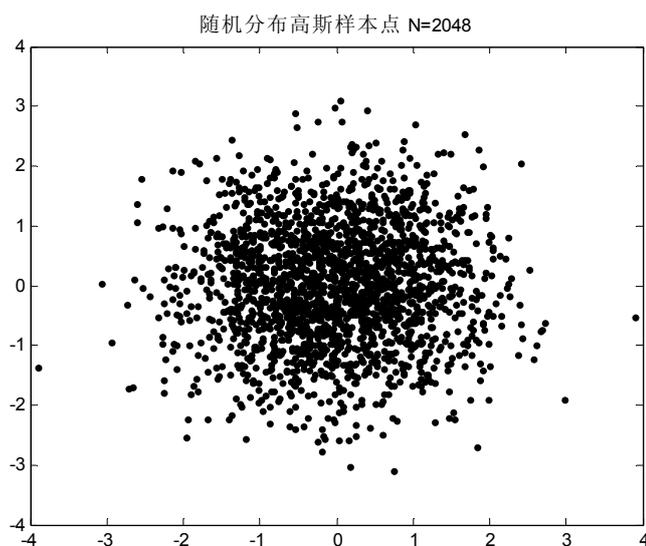
2) 将序列 $u^{(i)}$ 变换为 $x^{(i)}$, 得到拟高斯序列:

$$x^{(i)} = \mu + R\phi^{-1}(u^{(i)}) \quad (5.3.11)$$

其中, $\phi(\cdot)$ 是标准高斯分布的概率分布函数。



(a)



(b)

图 5.3 拟高斯样本点和普通高斯样本点分布对比图

图 5.3 (a)、(b) 分别是通过算法 2 产生的 2048 个拟高斯样本和 2048 个普通高斯样本的点分布示意图, 由于拟随机序列在单位超立方上分布的更均匀, 如图 5.2 (a) 所示, 所以在转换成高斯分布后, 点的分布比伪随机序列生成的普通高斯样本就更加均匀。

5.3.2 RQMC-GPF 算法

在高斯粒子滤波 (GPF) 框架下, 本节用 RQMC 随机样本代替传统的 MC 随机样

本，得到 RQMC-GPF 算法。为了跟 Sigma 点卡尔曼滤波一直，本算法先进行时间更新，再进行测量更新。假设在初始时刻 $k=1$ ，有 $p(x_0 | y_0) = N(x_0; \mu_0, P_0)$ 。完整的 RQMC-GPF 总结如下：

■ 预测（时间更新）

- 1) 采用算法 1 和算法 2，对滤波概率分布 $N(x_{k-1}; \mu_{k-1}, P_{k-1})$ 抽取样本集 $\{x_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。
- 2) 分别对 $i=1, 2, \dots, M$ 时的状态转移分布 $p(x_k | x_{k-1} = x_{k-1}^{(i)})$ 抽样得到 $\{x_{k|k-1}^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。
- 3) 按照式 (5.3.12) 和 (5.3.13) 计算预测均值和协方差。

$$\bar{\mu}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_{k|k-1}^{(i)} \quad (5.3.12)$$

$$\bar{P}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\bar{\mu}_k - x_{k|k-1}^{(i)})(\bar{\mu}_k - x_{k|k-1}^{(i)})^T \quad (5.3.13)$$

■ 修正（测量更新）

- 1) 采用算法 1 和算法 2 对重要性函数 $q(x_k | y_{0:k-1})$ 抽样得到样本点集 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。
- 2) 计算每个样本（粒子）权值：

$$\bar{\omega}_k^{(i)} = \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) N(x_k = x_k^{(i)}; \bar{\mu}_k, \bar{P}_k)}{q(x_k^{(i)} | y_{0:k-1})} \quad (5.3.14)$$

- 3) 权值标准化：

$$\omega_k^{(i)} = \frac{\bar{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^M \bar{\omega}_k^{(i)}} \quad (5.3.15)$$

- 4) 按照式 (5.3.16) 和 (5.3.17) 计算滤波均值和协方差。

$$\mu_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} x_k^{(i)} \quad (5.3.16)$$

$$P_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} (\mu_k - x_k^{(i)})(\mu_k - x_k^{(i)})^T \quad (5.3.17)$$

5.3.3 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件，采用频率为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 360s，精对准仿真结果如图 5.4、图 5.5、图 5.6 和表 5.1 所示。

表 5.1 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	GPF	RQMC-GPF
东向失准角误差 (")	-5.634	9.541	11.736
北向失准角误差 (")	4.931	8.351	7.421
方位失准角误差 (")	1368.211	183.62	39.616

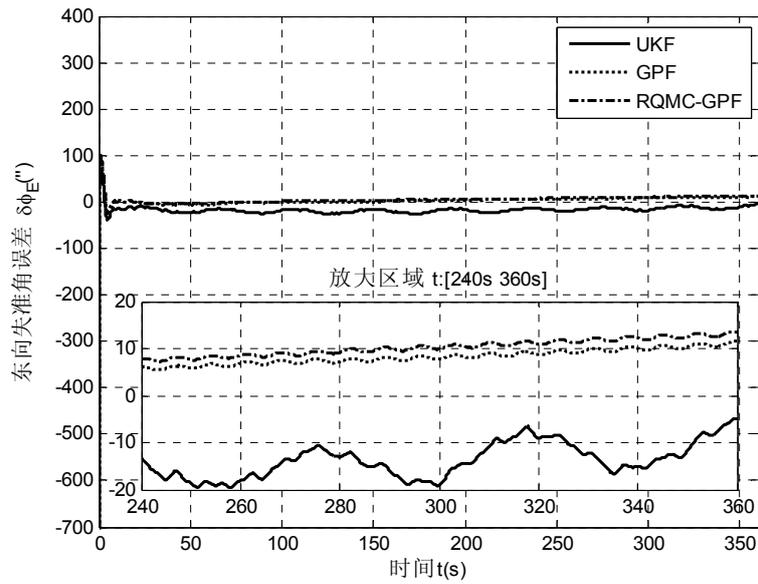


图 5.4 东向失准角误差

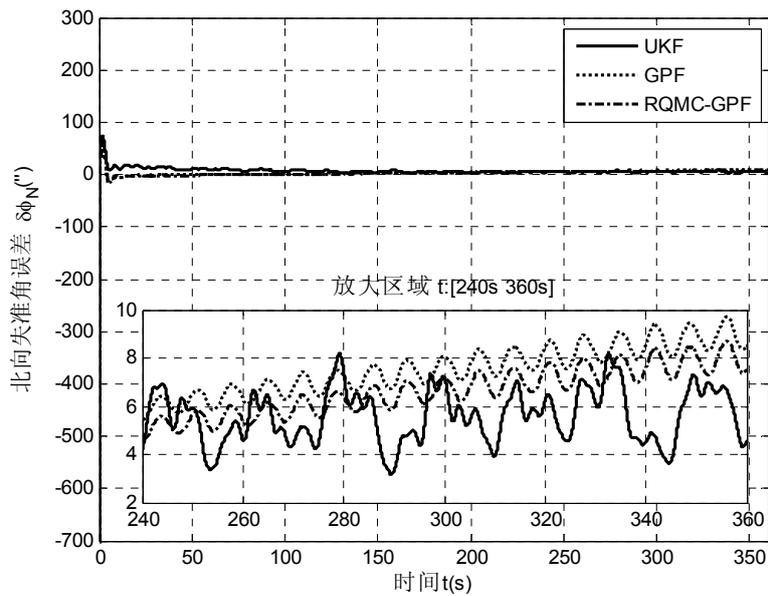


图 5.5 北向失准角误差

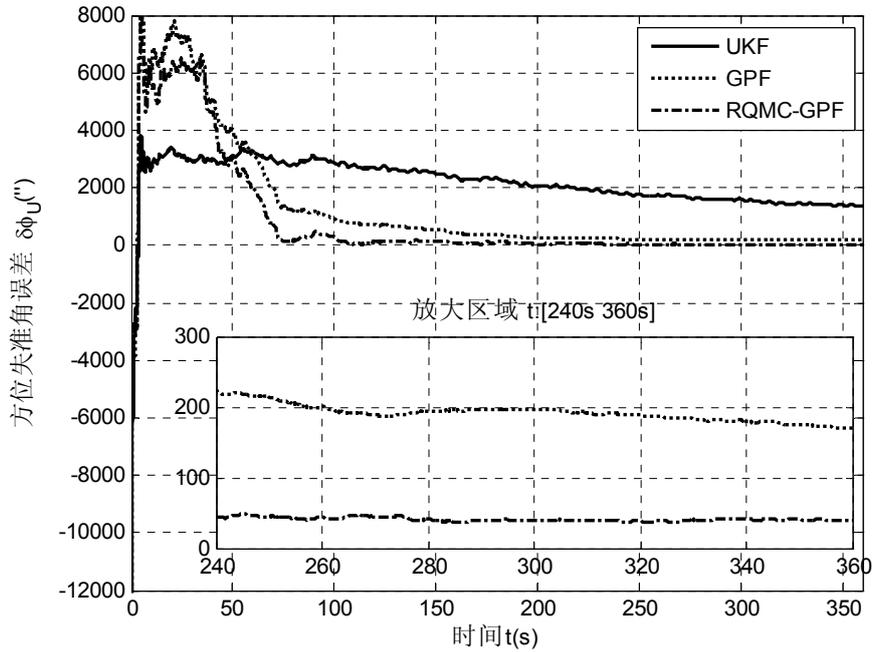


图 5.6 方位失准角误差

由图 5.4 和图 5.5 可知, UKF、GPF、RQMC-GPF 的水平失准角在 20s 内均收敛, 由表 5.1 可知三种滤波器的水平失准角的稳态误差相当。但在图 5.6 中, UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛, 360s 时失准角误差为 $1368.211''$, GPF 的在 260s 左右收敛, 其稳态误差为 $183.62''$, RQMC-GPF 的在 100s 左右即收敛, 其稳态误差仅为 $39.616''$ 。

采用 2.5 节的仿真轨迹, 在一阶马尔科夫噪声下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 360s, 精对准仿真结果如图 5.7、图 5.8、图 5.9 和表 5.2 所示。

表 5.2 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	GPF	RQMC-GPF
东向失准角误差 (")	-21.802	2.532	2.3195
北向失准角误差 (")	-12.906	-6.620	-9.632
方位失准角误差 (")	1569.170	161.29	96.337

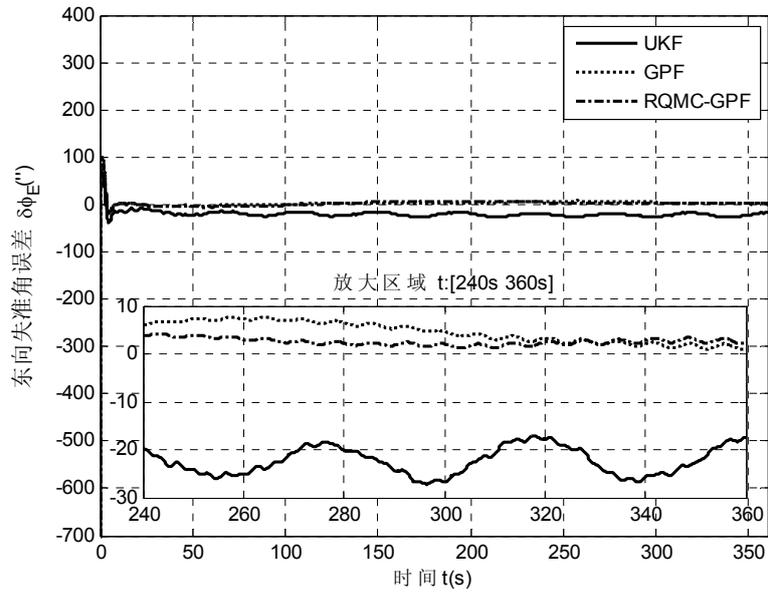


图 5.7 东向失准角误差

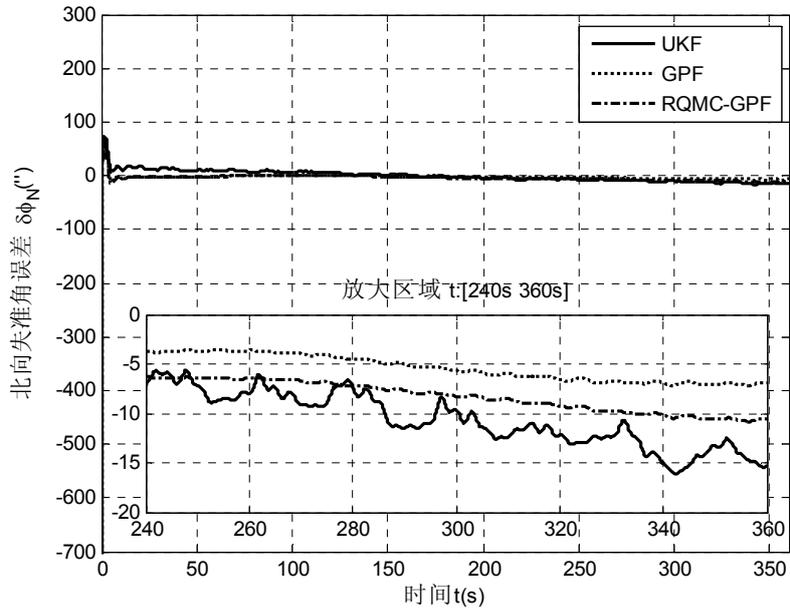


图 5.8 北向失准角误差

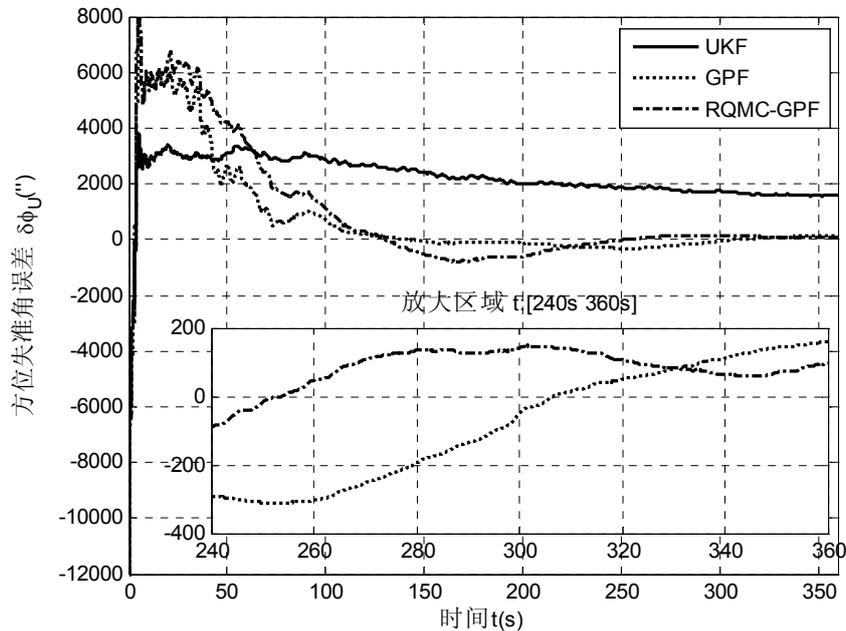


图 5.9 方位失准角误差

在一阶马尔科夫噪声条件下，由图 5.7 和图 5.8 可知，UKF、GPF、RQMC-GPF 的水平失准角在 20s 内收敛，GPF 和 RQMC-GPF 水平失准角稳态误差相当，其绝对值比 UKF 的小 $10''$ 左右。在图 5.9 中，UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛，其稳态误差为 $1569.2''$ ；GPF 在 330s 左右收敛，其稳态误差为 $161.29''$ ；RQMC-GPF 在 300s 左右即收敛，其稳态误差仅为 $96.337''$ 。

在白噪声和一阶马尔科夫噪声条件下，RQMC-GPF 比 GPF 和 UKF 收敛速度快、稳态误差小，尤其是方位失准角的对比，仿真结果验证了 RQMC-GPF 的有效性和正确性。但 RQMC-GPF 比 GPF 和 UKF 的计算复杂度大，但 GPF 并行性好，随着 VLSI 技术的发展，RQMC-GPF 会有实际的工程应用^[151]。

5.4 CGPF 在初始对准中的应用

5.4.1 容积高斯粒子滤波

由 5.2 节可知，GPF 算法中最关键的就是重要性函数 $q(x_k | y_{1:k})$ 的选择。如果选为 $q(x_k | y_{1:k}) = p(x_k | y_{1:k-1})$ ，此时 $\bar{\omega}_k^i = p(y_k | x_k^i)$ ，但在似然函数外形尖锐时容易引起权值退化。在高斯假定下，应用 UKF 可得到由状态均值和协方差确定的高斯分布，并作为重要性密度函数，这就是无轨迹高斯粒子滤波（UGPF）^[111-112]。由 3.3 节可知，容

积卡尔曼滤波（CKF）比 UKF 计算负担小，精度相当，因此本文用 CKF 替代 UKF 得到容积高斯粒子滤波（CGPF）。CGPF 不但具有 GPF 所具有的免重采样的优点，而且由于计入了最新的测量信息，所以可以克服上述权值退化的问题。

假设在初始时刻 $k=1$ ，有 $p(x_0 | y_0) = N(x_0; \mu_0, P_0)$ 。完整的 CGPF 算法总结如下：

■ 预测（时间更新）

使用 CKF 估计 k 时刻的均值 \hat{x}_k^c 和方差 \hat{P}_k^c ：

$$\hat{P}_{k-1} = S_{k-1} S_{k-1}^T \quad (5.4.1)$$

$$\chi_{i,k-1} = S_{k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1} \quad (5.4.2)$$

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}(\chi_{i,k-1}) \quad (5.4.3)$$

$$\hat{x}_{k|k-1}^c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1} \quad (5.4.4)$$

$$P_{k|k-1}^c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1} \chi_{i,k|k-1}^T - \hat{x}_{k|k-1}^c \hat{x}_{k|k-1}^{cT} + Q_{k-1} \quad (5.4.5)$$

$$P_{k|k-1}^c = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \quad (5.4.6)$$

$$\chi_{i,k|k-1}^* = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1}^c \quad (5.4.7)$$

$$Y_{i,k} = h_k(\chi_{i,k|k-1}^*) \quad (5.4.8)$$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{i,k} \quad (5.4.9)$$

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{i,k} Y_{i,k}^T - \hat{y}_k \hat{y}_k^T + R_k \quad (5.4.10)$$

$$P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_{i,k|k-1}^* Y_{i,k}^T - \hat{x}_{k|k-1}^c \hat{y}_k^T \quad (5.4.11)$$

$$K_k = P_{\hat{x}_{k|k-1} \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \quad (5.4.12)$$

$$\hat{x}_k^c = \hat{x}_{k|k-1}^c + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (5.4.13)$$

$$\hat{P}_k^c = P_{k|k-1}^c - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \quad (5.4.14)$$

■ 修正（测量更新）

1) 对重要性函数 $q(x_k | y_{0:k-1}) = N(x_k; \hat{x}_k^c, \hat{P}_k^c)$ 抽样得到样本点集 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^M$ 。

2) 计算每个样本（粒子）权值：

$$\bar{\omega}_k^{(i)} = \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) N(x_k = x_k^{(i)}; \hat{x}_{k|k-1}^c, \hat{P}_{k|k-1}^c)}{q(x_k^{(i)} | y_{0:k-1})} \quad (5.4.15)$$

3) 权值标准化:

$$\omega_k^{(i)} = \frac{\bar{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^M \bar{\omega}_k^{(i)}} \quad (5.4.16)$$

4) 按照式 (5.4.17) 和 (5.4.18) 计算滤波均值和协方差。

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} x_k^{(i)} \quad (5.4.17)$$

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^{(i)} (\hat{x}_k - x_k^{(i)})(\hat{x}_k - x_k^{(i)})^T \quad (5.4.18)$$

5.4.2 仿真分析

采用 2.5 节的仿真条件, 在白噪声条件下, 采用频率为 100Hz, 粗对准时间为 120s, 精对准仿真时间为 360s, 精对准仿真结果如图 5.10、图 5.11、图 5.12 和表 5.3 所示。

表 5.3 白噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	GPF	CGPF
东向失准角误差 (")	-5.634	9.541	1.370
北向失准角误差 (")	4.931	8.351	16.452
方位失准角误差 (")	1368.211	183.62	20.992

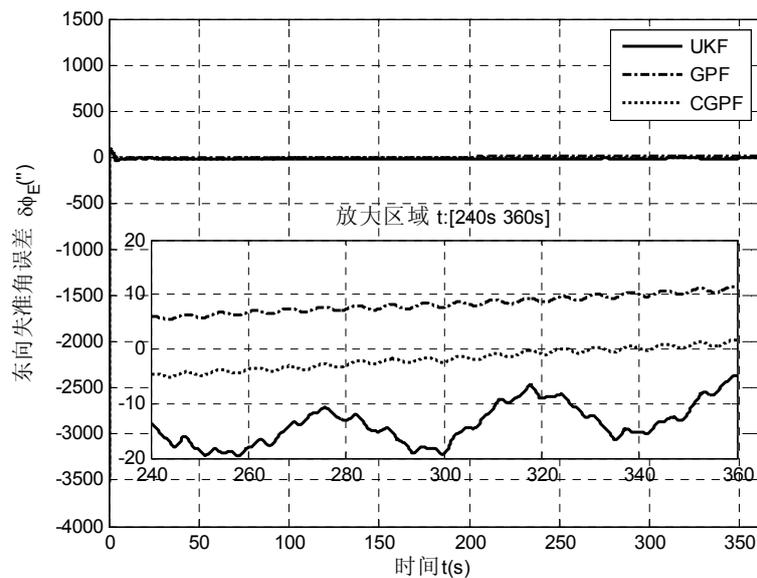


图 5.10 东向失准角误差

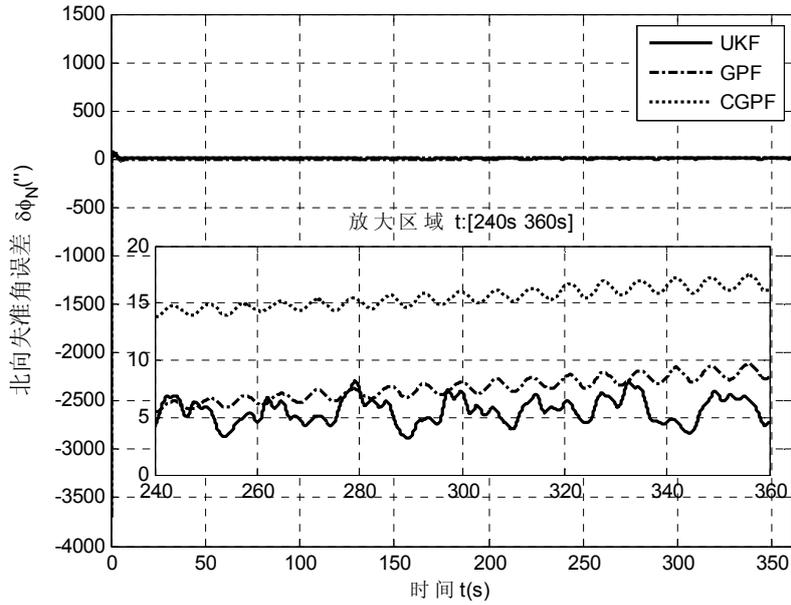


图 5.11 北向失准角误差

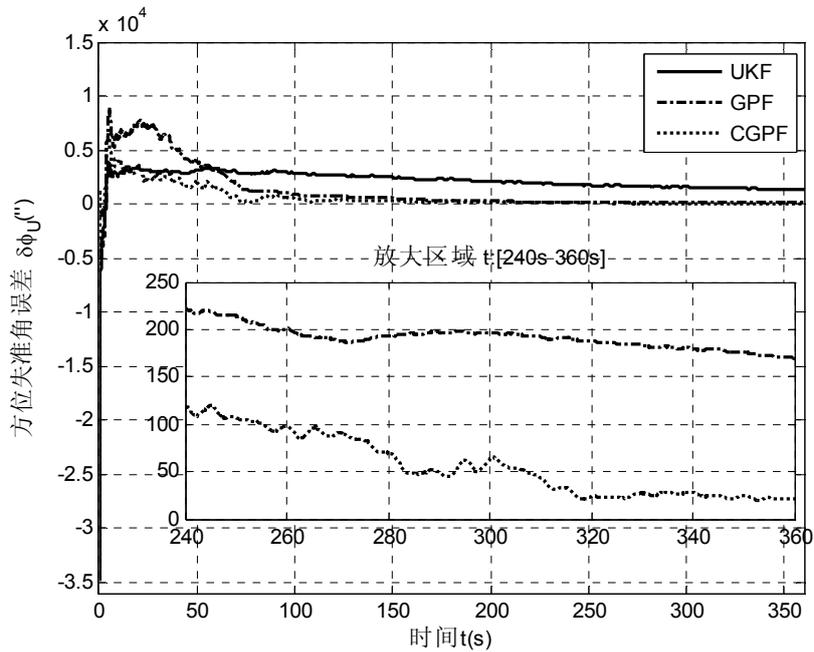


图 5.12 方位失准角误差

由图 5.10 和图 5.11 可知, UKF、GPF、CGPF 的水平失准角在 20s 内均收敛, 由表 5.3 可知三种滤波器的水平失准角的稳态误差相当。但在图 5.12 中, UKF 的方位失准角在 360s 内未收敛, 360s 时失准角误差为 1368.211", GPF 的在 260s 左右收敛, 其稳态误差为 183.62", RQMC-GPF 的在 320s 左右即收敛, 其稳态误差仅为 20.992"。

采用 2.5 节的仿真轨迹，在一阶马尔科夫噪声下，采用频率为 100Hz，粗对准时间为 120s，精对准仿真时间为 600s，精对准仿真结果如图 5.13、图 5.14、图 5.15 和表 5.4 所示。

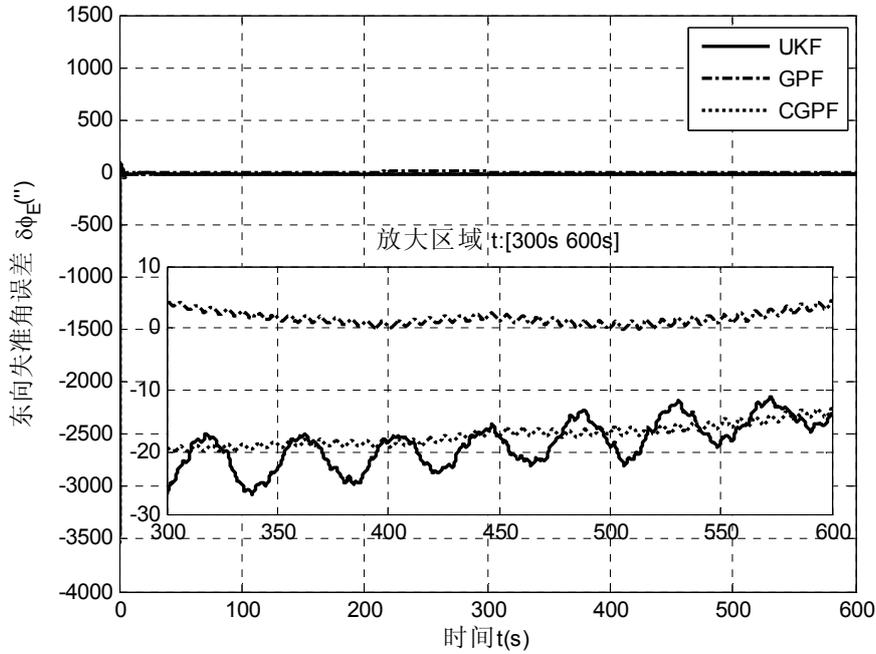


图 5.13 东向失准角误差

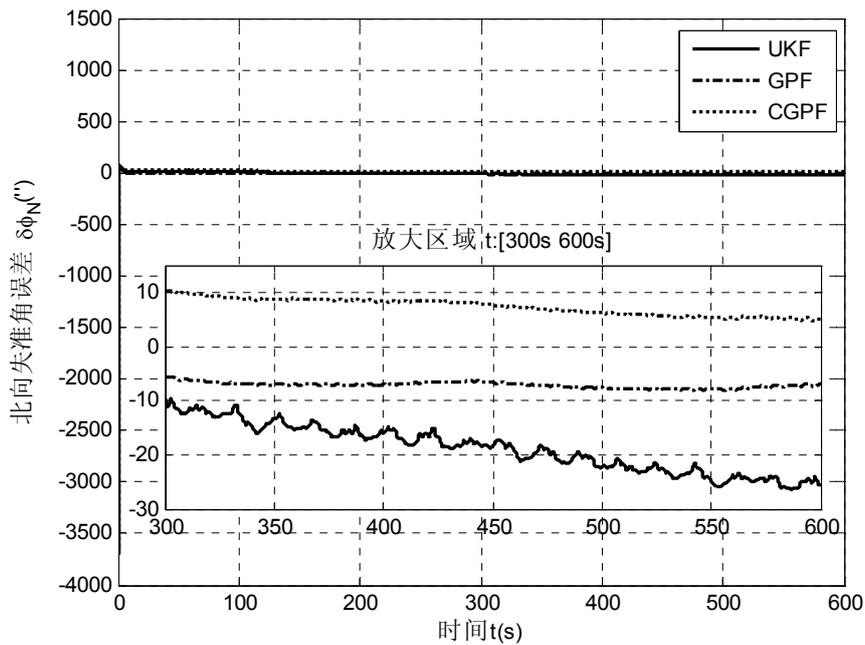


图 5.14 北向失准角误差

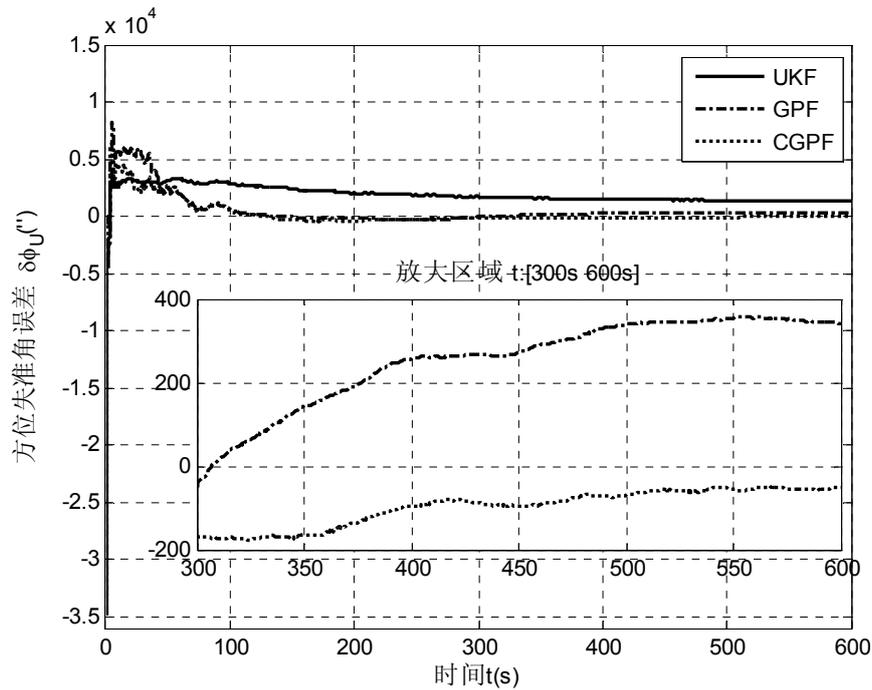


图 5.15 方位失准角误差

表 5.4 一阶马尔科夫噪声下失准角估计误差

姿态方向	UKF	GPF	CGPF
东向失准角误差 (")	-15.182	3.489	-13.839
北向失准角误差 (")	-24.694	-7.241	4.915
方位失准角误差 (")	1400.056	343.601	-37.195

在一阶马尔科夫噪声条件下，由图 5.13 和图 5.14 可知，UKF、GPF、CGPF 的水平失准角在 20s 内收敛，GPF 和 CGPF 水平失准角稳态误差相当，比 UKF 的小 10^4 左右。在图 5.15 中，UKF 的方位失准角在 600s 内未收敛，其稳态误差为 $1400.056''$ ；GPF 在 500s 左右收敛，其稳态误差为 $343.601''$ ；CGPF 在 450s 左右收敛，其稳态误差仅为 $-37.195''$ 。

在白噪声和一阶马尔科夫噪声条件下，CGPF 比 GPF 和 UKF 收敛速度快、稳态误差小，尤其是方位失准角的对比。不同噪声环境下的仿真结果，验证了 CGPF 算法的有效性和正确性，但从计算时间上看，GPF 最长，CGPF 次之，UKF 耗时最短。

5.5 本章小结

在本章中，首先介绍 GPF 算法。基于 RQMC 和 GPF 提出了一种新算法

RQMC-GPF, 仿真结果表明其性能优于 GPF 和 UKF。将 CKF 和 GPF 结合提出了另外一种新算法 CGPF, 仿真结果其性能同样优于 GPF 和 UKF。随着 VLSI 技术的发展, RQMC-GPF 和 CGPF 实时计算问题得到解决, 有一定的实际应用价值。

第 6 章 非线性滤波在干扰车载基座下初始对准试验研究

6.1 试验条件介绍

为了惯性凝固粗对准方法和基于非线性滤波的精对准方法的有效性，选取 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_{∞} 、UKF、CGPF 对车载激光陀螺捷联导航系统的数据进行了初始对准试验。采用某型激光陀螺的捷联导航系统系统技术指标为：激光陀螺常值漂移为 $0.01^{\circ}/h$ ，陀螺随机游走系数为 $0.005^{\circ}/\sqrt{h}$ ，加速度计常值偏置误差为 $100 \times 10^{-6}g$ ，加速度计量测白噪声标准差为 $50 \times 10^{-6}g$ 。实物如图 6.1 所示。



图 6.1 激光陀螺捷联惯导系统

实验采用的车辆及安装情况如图 6.2 所示。系统输出频率 100Hz，将激光陀螺捷联导航系统固定于车上，不加减震器。在 3 个不同的方向，每个方向采集 10 段数据，数据大小由试验人员决定，均超过 300s。采集数据期间工作人员在第 1 位置按开关车门、上下车的顺序试验，第 2 位置按晃动或上下车、开关车门的顺序试验。第 3 位置采用上下车、开关车门的顺序试验。保存试验数据后，采用不同的方法进行离线对准，

分析不同算法的特点，粗对准时间是 90s，精对准时间是 210s。



图 6.2 (a) 试验用车



图 6.2 (b) 激光陀螺捷联惯导系统的安装

6.2 对准结果分析

6.2.1 粗对准对比分析

为验证惯性凝固粗对准方法在车载干扰基座上的性能。采用魏春岭等^[153]推荐的 3 种解析方法，相同条件下，进行 90s 粗对准。3 组共 30 段数据粗对准的方位角如表

6.1~6.3 所示。

表 6.1 第 1 组数据粗对准的方位角

数据	惯性凝固 (°)	解析法 1 (°)	解析法 2 (°)	解析法 3 (°)
1	149.331297	154.226138	154.319412	154.272126
2	149.368763	150.164762	150.286478	150.226319
3	149.524905	147.068010	147.202236	147.135485
4	149.310612	148.758931	148.888998	148.822355
5	149.352535	132.702577	132.862431	132.785917
6	149.499154	139.200297	139.354824	139.277914
7	149.524972	135.684592	135.845125	135.766508
8	149.483077	142.767803	142.920442	142.844012
9	149.526320	139.689825	139.849397	139.770358
10	149.466523	142.579710	142.735141	142.657355
均值 (°)	149.438816	143.284265	143.426448	143.355835
RMS (°)	0.0876907098	6.76135746	6.74120811	6.75025366

表 6.2 第 2 组数据粗对准的方位角

数据	惯性凝固 (°)	解析法 1 (°)	解析法 2 (°)	解析法 3 (°)
1	-28.9356705	-96.8223494	-97.1323853	-97.1122395
2	-28.8113695	-63.4836566	-63.5266585	-63.5922751
3	-28.5946552	-53.5382563	-53.5289892	-53.6080632
4	-28.9697771	-17.7002272	-17.6181367	-17.6662101
5	-28.9584939	-9.52388569	-9.47437495	-9.50158429
6	-28.9490545	-11.0191172	-10.9634184	-10.9948457
7	-28.8616337	-10.2354535	-10.1835120	-10.2129599
8	-28.7983574	-96.5689978	-96.8065774	-96.7866148
9	-28.3434953	-12.2930534	-12.2308125	-12.2649129
10	-28.8553011	-13.3989073	-13.3335082	-13.3720296
均值 (°)	-28.8077808	-38.4583904	-38.4798373	-38.5111735
RMS (°)	0.197628949	36.1586290	36.2884465	36.2735570

表 6.3 第 3 组数据粗对准的方位角

数据	惯性凝固 (°)	解析法 1 (°)	解析法 2 (°)	解析法 3 (°)
1	-26.3768094	-119.625511	-119.797317	-119.731368
2	-26.5524438	-31.1746878	-31.0459642	-31.1146702
3	-26.3613203	-24.2282965	-24.1099348	-24.1685795
4	-26.1797361	-20.6526256	-20.5528093	-20.6050397
5	-26.3422044	-12.7660109	-12.6985826	-12.7329443
6	-26.4691438	-33.9065453	-33.7688036	-33.8434540
7	-26.1181718	-9.65962202	-9.60602299	-9.63283829
8	-26.3830417	-34.5536694	-34.4121186	-34.4885427
9	-26.3842662	-12.3085863	-12.2367564	-12.2710341
10	-26.2776165	-37.4249698	-37.2808729	-37.3608589
均值 (°)	-26.3444754	-33.6300525	-33.5509182	-33.5949330
RMS (°)	0.127375472	31.8640862	31.9373905	31.9067849

第 1 组数据开始 90s 内有开关车门的干扰，所以三种解析法粗对准的方差约为 6.75° ，而惯性凝固得粗对准的仅为 0.09° 。第 2 组的第 1、2 数据含有人为的晃动干扰，在精对准中也能体现出此晃动干扰，可参见图 6.23 和图 6.24。在晃动干扰下，惯性凝固法可有效克服晃动干扰，粗对准精度较高，偏离均值 0.13° ，而三种解析法的偏差较大，均大于 20° 。因为第 2 组的 3~10 段和第 3 组的数据含有人员上下车的干扰，三种解析法的方差较大，均大于 30° ，但是惯性凝固法的方差小于 0.20° 。对比 6.2.3 节的精对准后的均值，可知惯性凝固粗对准的方位角与精对准后的方位角差值在 1° 内，精度远高于解析法。30 段数据的粗对准试验表明惯性凝固法可抑制粗对准过程中对车载基座的干扰，值得工程应用。

6.2.2 典型精对准结果分析

第 3 组的第 6 段数据中有试验人员上车、下车和关车门的干扰，是试验中比较典型的数据。对此数据分别采用 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_∞ 、CGPF 进行精对准，滤波用误差方程的状态初值均为 0，4 种方法的精对准结果如图 6.3~6.7 所示。

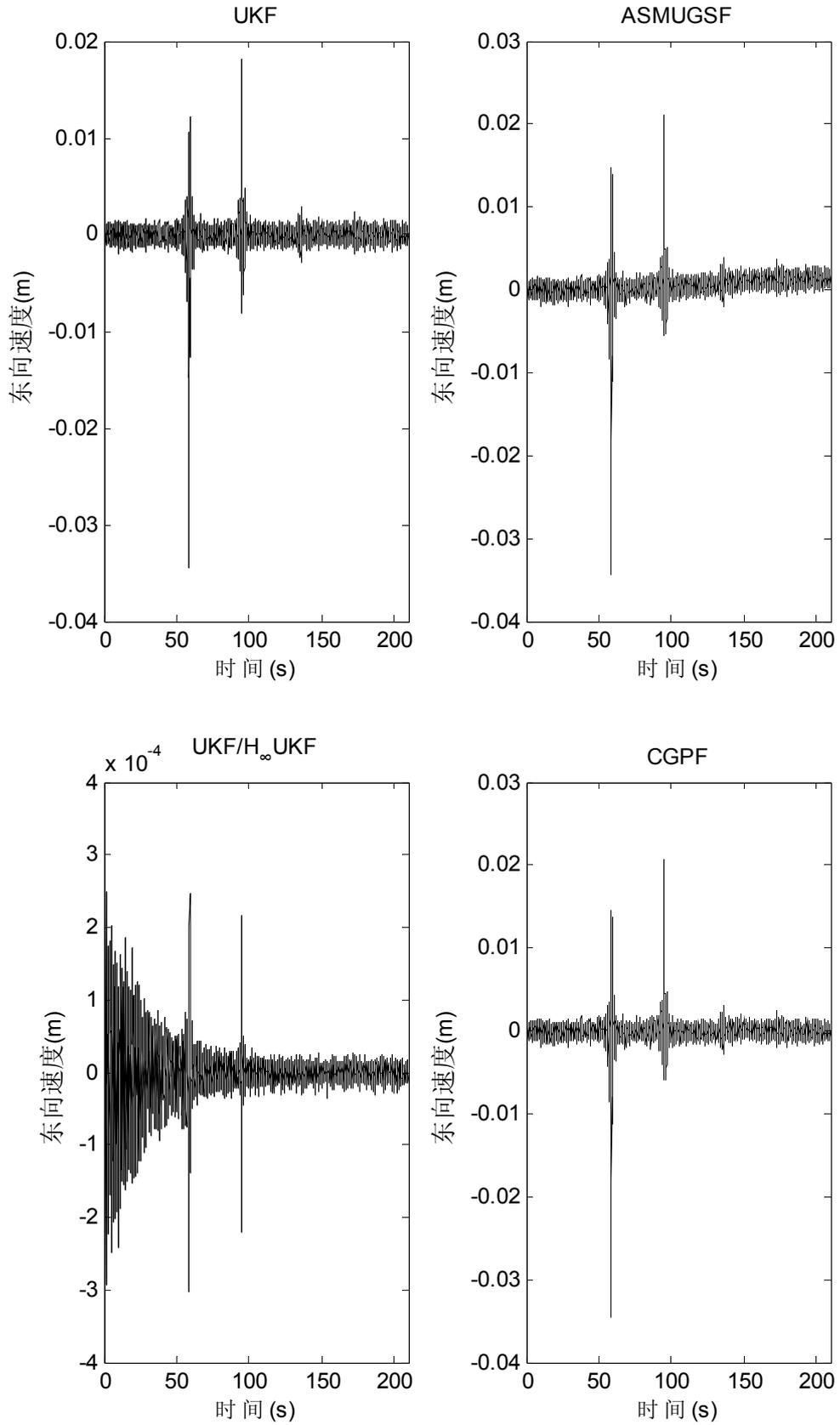


图 6.3 第 3 组第 6 段数据精对准的东向速度

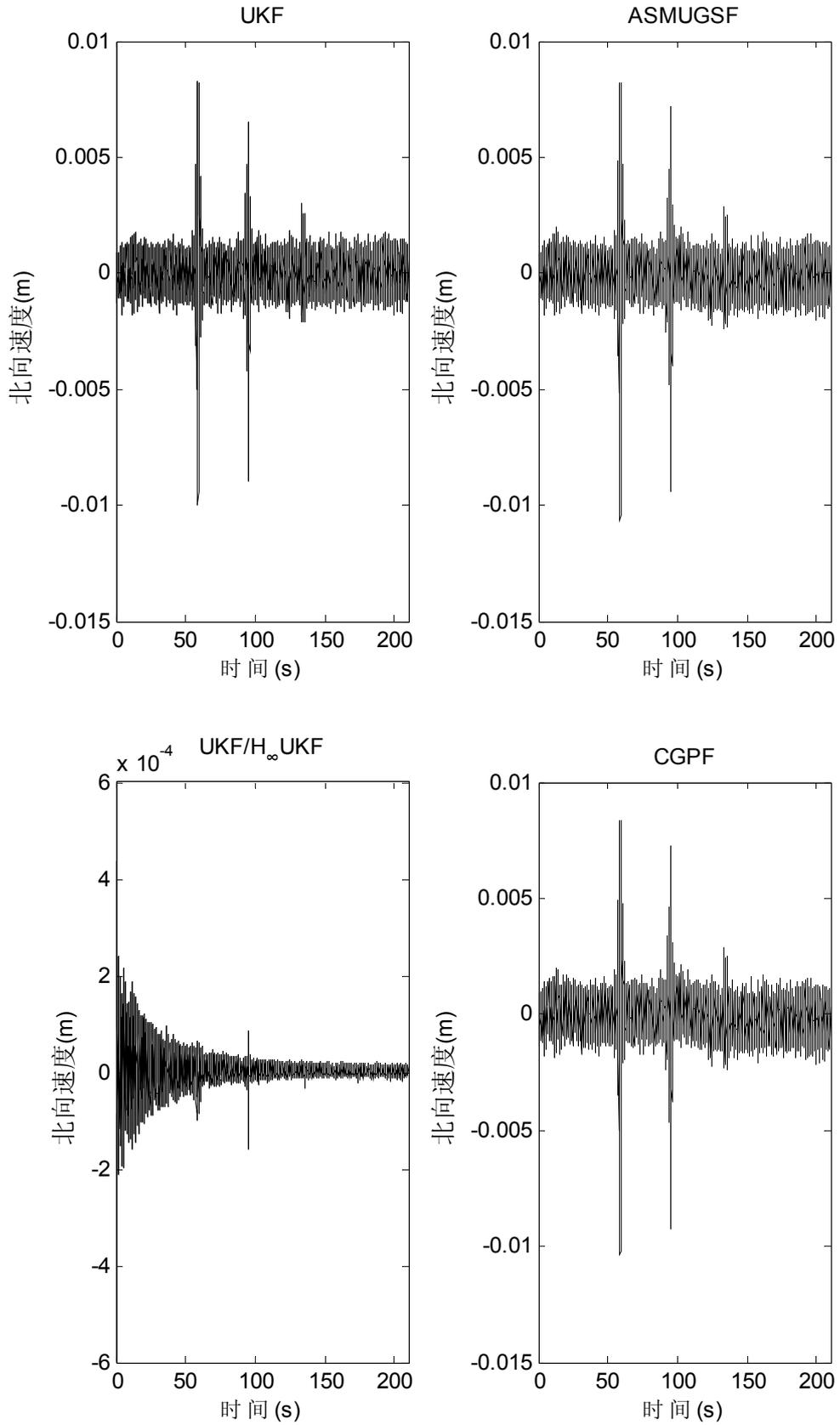


图 6.4 第 3 组第 6 段数据精对准的北向速度

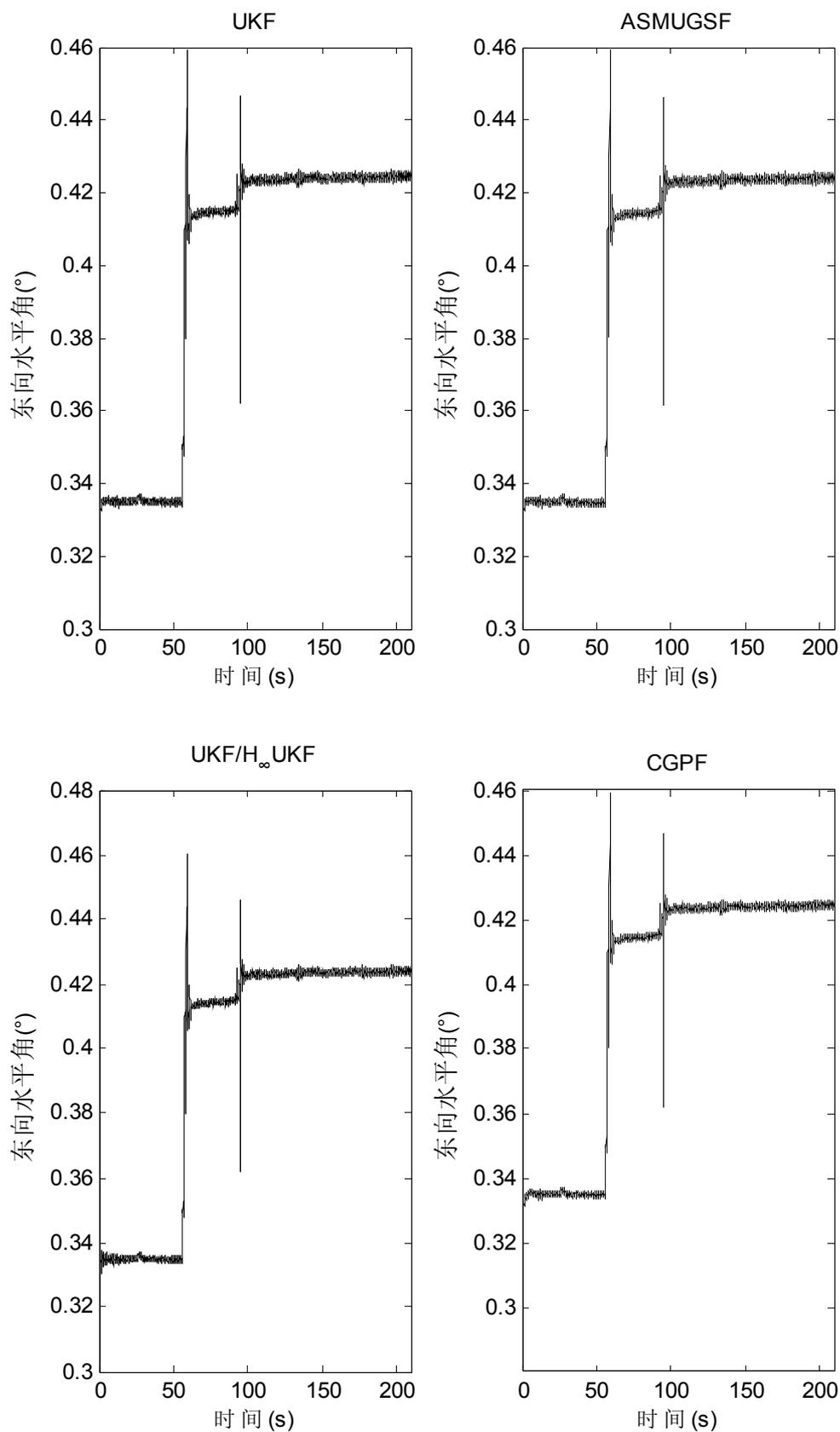


图 6.5 第 3 组第 6 段数据精对准的东向姿态角

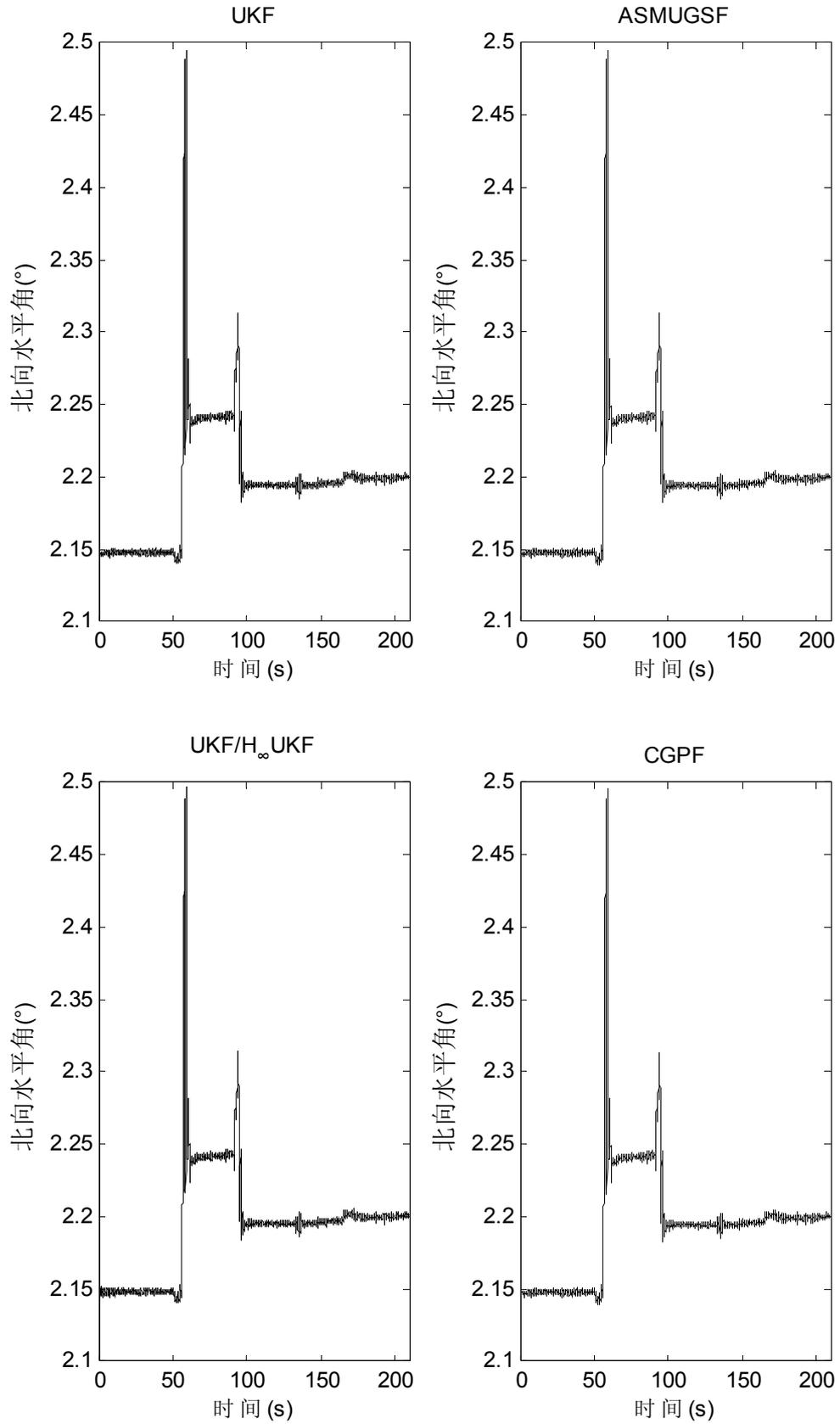


图 6.6 第 3 组第 6 段数据精对准的北向姿态角

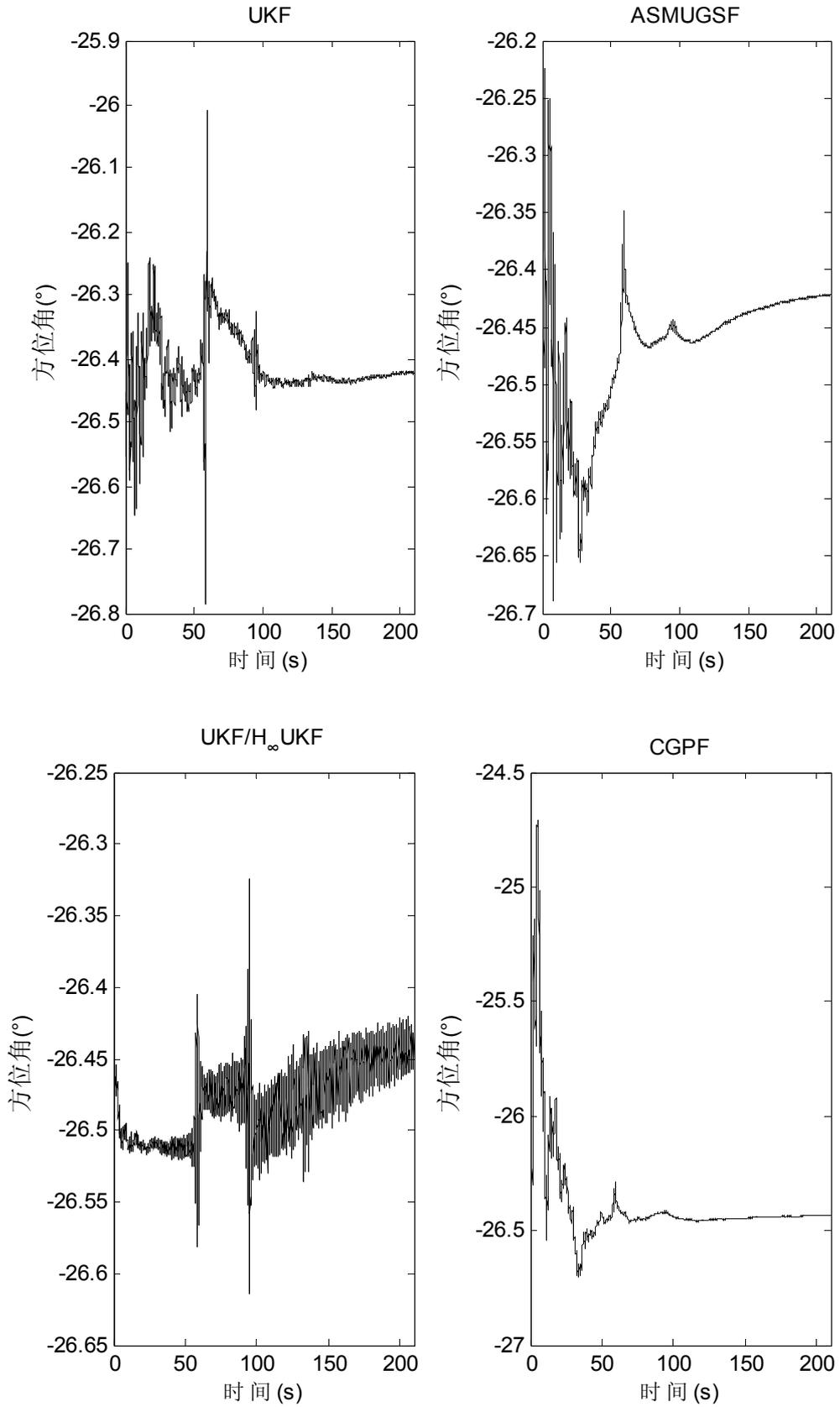


图 6.7 第 3 组第 6 段数据精对准的方位角

由图 6.3~6.7 可知, UKF/ H_{∞} UKF 收敛最快, 速度上干扰的抑制效果最好, 水平姿态角的精度与其他方法相当, 方位角收敛快, 精对准开始的 50s 内收敛的最好, 并可抑制干扰, 但抑制干扰后鲁棒界扩大, 精对准的方差大, 需要保存一定量的数据取均值作为精对准的结果。对仿真结果可知, 体现收敛速度快的特点, 但方位角的振荡范围扩大。另外, UKF/ H_{∞} UKF 的方位角的估计可清晰体现所受干扰, 为分析方位角的估计提供方便。其他三种方法对方位角的估计, UKF 收敛最慢, 对干扰的抑制最差; ASMUGSF 次之, CGPF 收敛速度最快, 收敛后对干扰的抑制最好。对比三种方法的仿真结果可知, 试验结果验证了三种算法在收敛速度和抑制干扰上的特点。从计算时间上看, UKF 最快, UKF/ H_{∞} UKF 次之, ASMUGSF 再次, CGPF 最慢。在 E5200 CPU、2G 内存的硬件条件下, format long 精度的 Matlab 试验环境中 10000 个粒子的 CGPF 完成本试验的耗时为 90s 左右, 是 UKF 的 10 倍。在实际应用中, 考虑系统资源和算法性能进行选取。

工程应用的环境复杂多变, 算法的稳定性很关键。下面给出四种滤波算法最差精对准结果, 即第 3 组第 7 段数据的对准。试验结果如图 6.7~6.12 所示。

由图 6.8、6.9 和 6.11 可知, 在 55s 左右此数据有实验人员下车的干扰, 在 90s 左右有跳变, 此后有三次开关车门的干扰。数据发生跳变时, UKF、UKF/ H_{∞} UKF 的方位失准角估计尚未收敛, 两种算法受影响较小, 沿先前的趋势继续收敛; ASMUGSF、CGPF 均已收敛, 数据跳变对这两种算法的影响较大, 且此后存在干扰, 但这两种算法在 80s 内迅速收敛。对比最终的收敛的情况, 可知 ASMUGSF、CGPF 均好于 UKF, 体现了两种算法的鲁棒性。

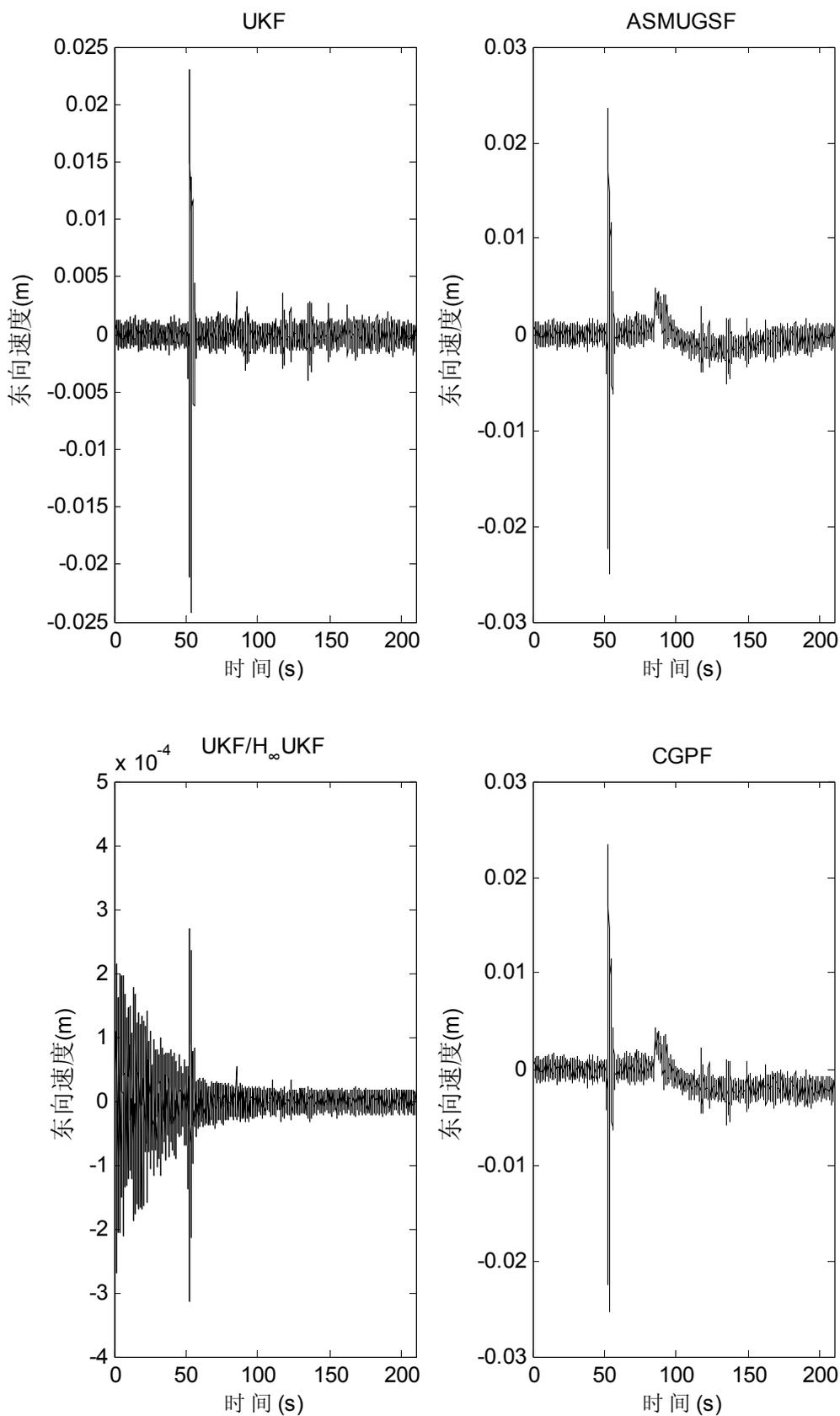


图 6.8 第 3 组第 7 段数据精对准的东向速度

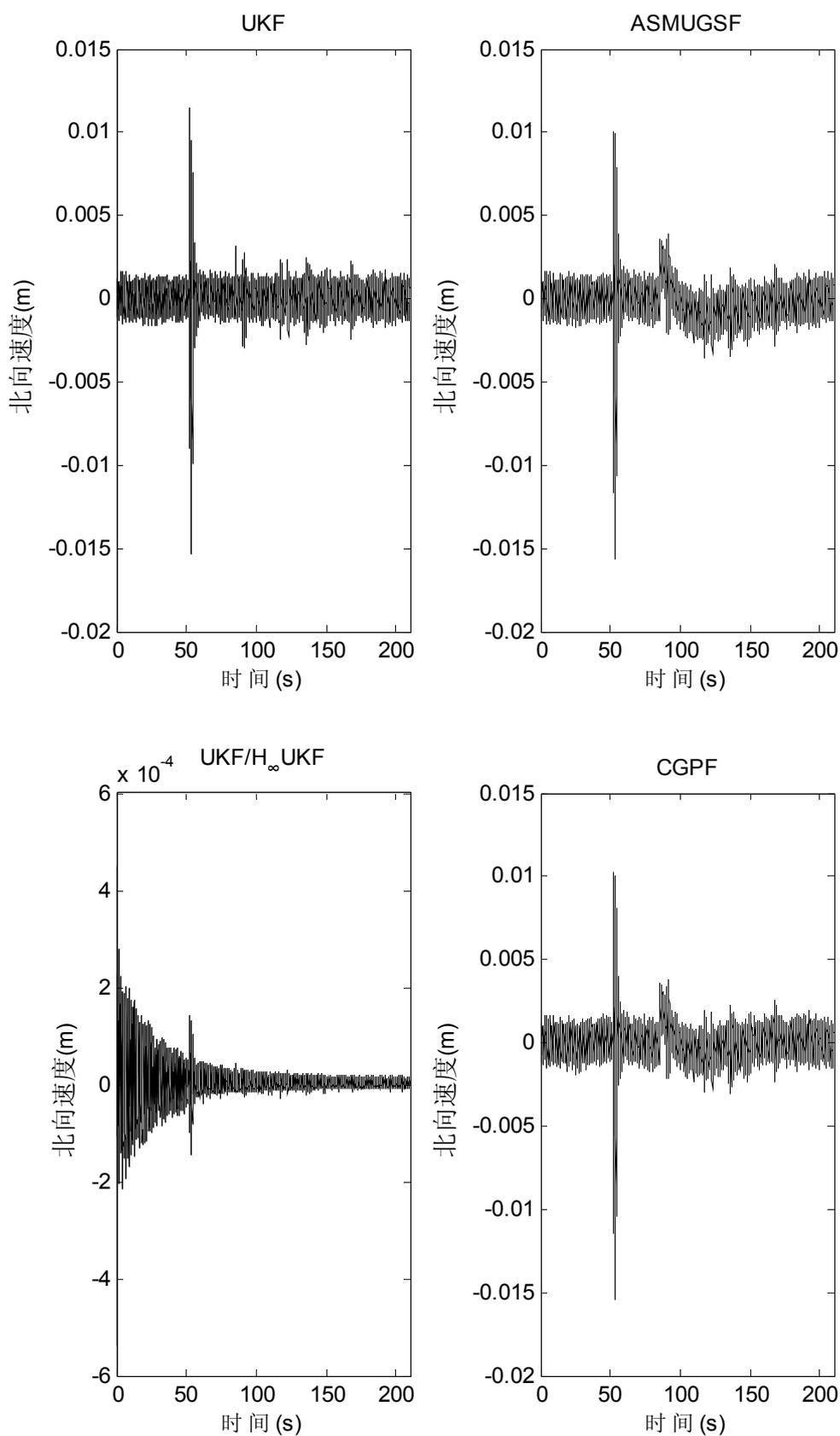


图 6.9 第 3 组第 7 段数据精对准的北向速度

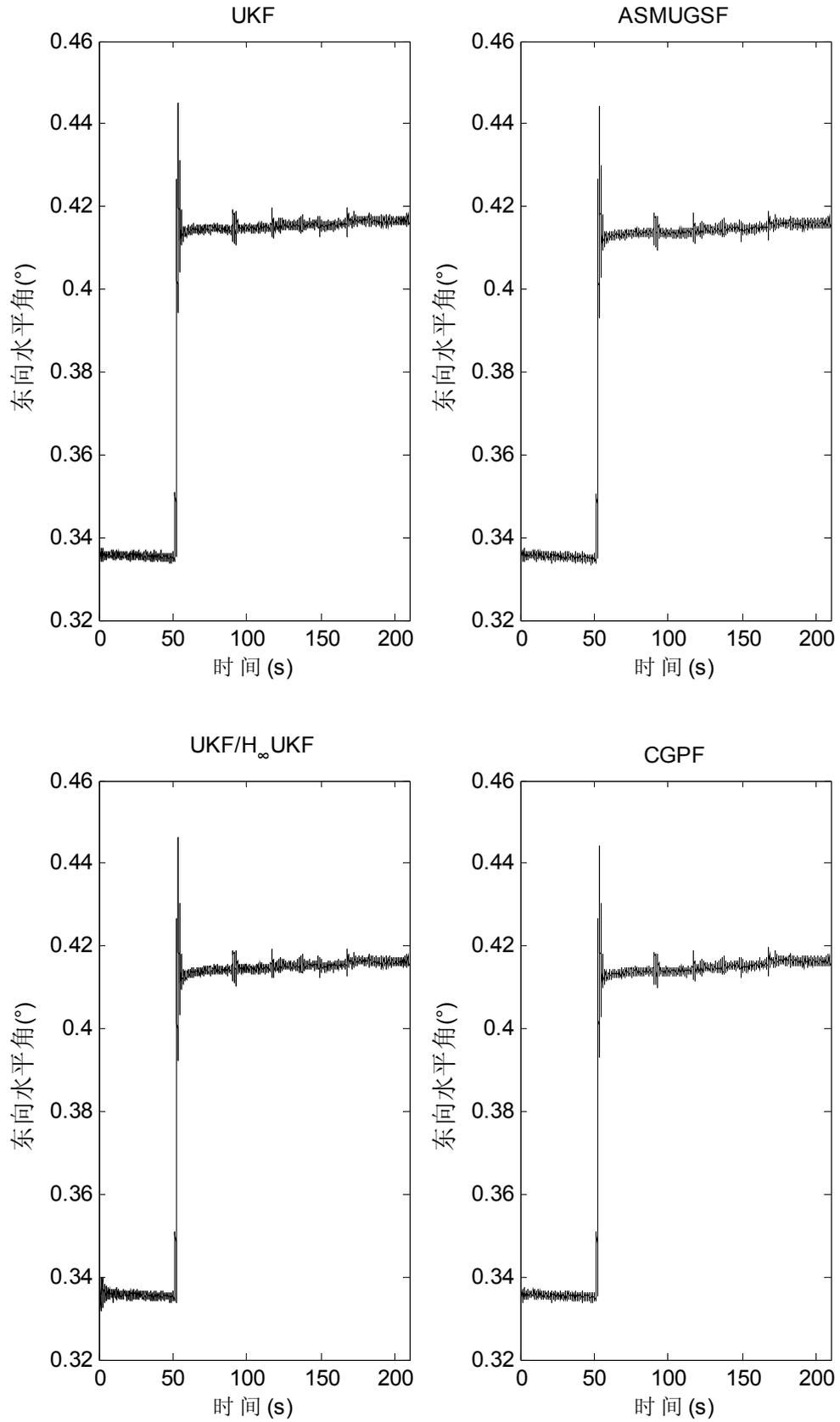


图 6.10 第 3 组第 7 段数据精对准的东向姿态角

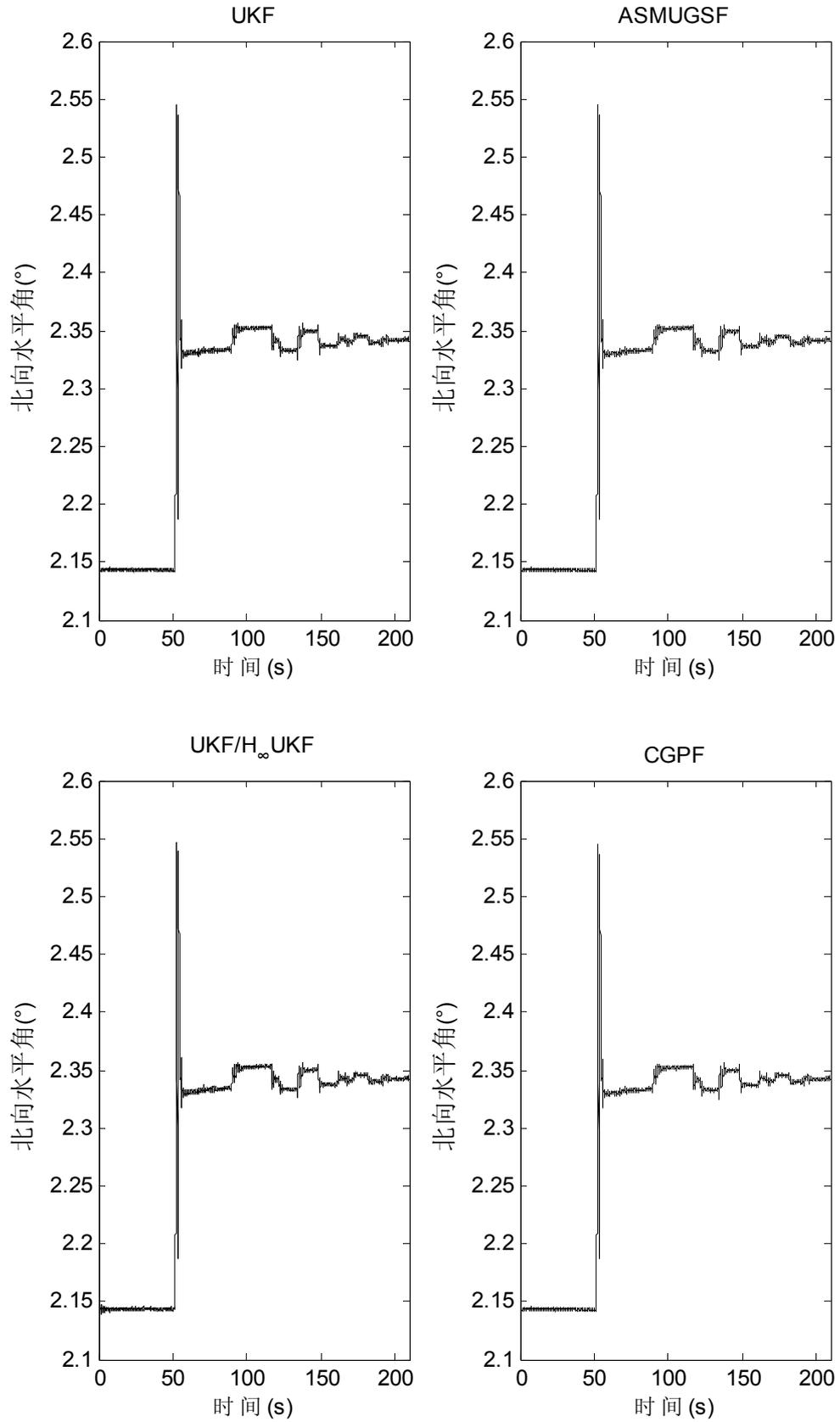


图 6.11 第 3 组第 7 段数据精对准的北向姿态角

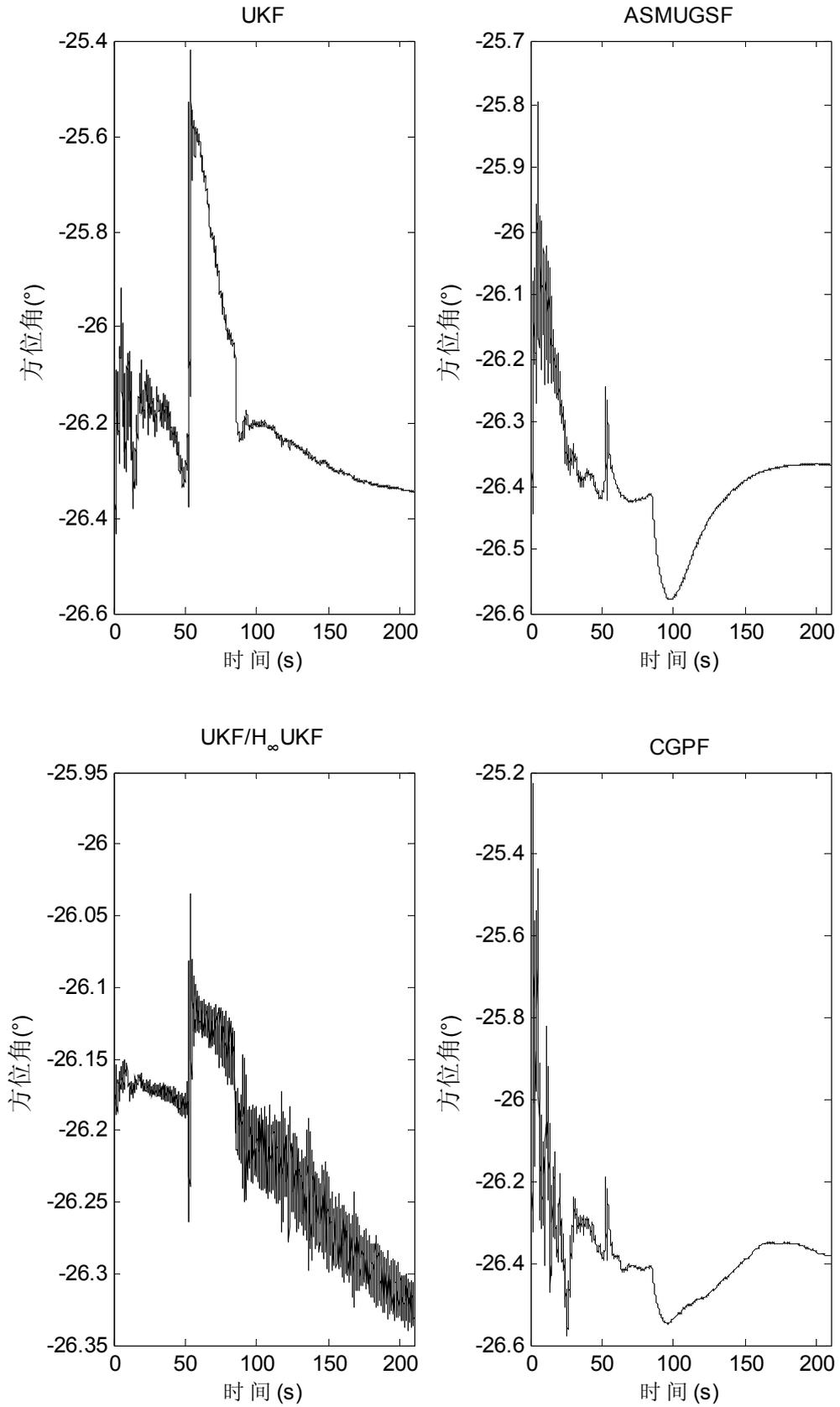


图 6.12 第 3 组第 7 段数据精对准的方位角

6.2.3 三组数据对准结果分析

采用 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_{∞} UKF、CGPF 对 3 组数据进行精对准，由于篇幅有限仅给出 3 组数据的两个水平姿态角的均方差和方位角对准结果，如表 6.4~6.8 所示。由表 6.4~6.5 可知，上下车及开关车门对北向姿态角（横滚角）影响较大，符合试验车摆放位置和激光陀螺惯导系统的安装方式，UKF/ H_{∞} UKF 的水平姿态角方差大于其他三种滤波算法，符合仿真试验的结论。由这表 6.6~6.8 可知 ASMUGSF 和 CGPF 的标准差相当，3 组数据均小于 0.02° ，UKF 的 3 组数据的标准差均小于 0.03° 。ASMUGSF 和 CGPF 比 UKF 在精度上提高 0.01° ，符合仿真试验的结论。因实际试验环境与仿真环境有一定差别，实际试验结果精度的提高幅度上不如仿真结果。UKF/ H_{∞} UKF 的结果是最后 20 点的均值，该滤波算法的均方差最差，与 UKF/ H_{∞} UKF 的仿真试验结论相符。但与 4.4.2 节的仿真试验比较可知，UKF/ H_{∞} UKF 的方位角估计上比 UKF 精度高，在实际车载试验中体现不出。

表 6.4 3 组数据东向姿态角的均方差

位置	RMS_UKF($^{\circ}$)	RMS_ASMUGSF ($^{\circ}$)	RMS_UKF/ H_{∞} UKF ($^{\circ}$)	RMS_CGPF ($^{\circ}$)
1	0.0058566843	0.0059092767	0.0055123054	0.0058865073
2	0.0479673846	0.0479333266	0.0479105728	0.0479141924
3	0.0378283240	0.0377844390	0.0379088980	0.0377679910

表 6.5 3 组数据北向姿态角的均方差

位置	RMS_UKF($^{\circ}$)	RMS_ASMUGSF ($^{\circ}$)	RMS_UKF/ H_{∞} UKF ($^{\circ}$)	RMS_CGPF ($^{\circ}$)
1	0.0690612442	0.0690534111	0.0690493167	0.0691085960
2	0.0631112215	0.0631124899	0.0635301082	0.0631167500
3	0.0748030980	0.0747751107	0.0751401779	0.0748167496

表 6.6 第 1 组数据精方位角对准结果

数据	UKF (°)	ASMUGSF (°)	UKF/ H_{∞} UKF (°)	CGPF (°)
1	149.36955873	149.36042898	149.34822298	149.37817236
2	149.36406412	149.35948883	149.38260294	149.36526814
3	149.38612152	149.35860820	149.39607221	149.38883067
4	149.31398353	149.32693473	149.30802591	149.36026744
5	149.37675242	149.37888500	149.39131637	149.41502718
6	149.36430388	149.34532229	149.37307524	149.38491836
7	149.32007124	149.34141195	149.38193171	149.36824796
8	149.37589253	149.35917547	149.38776510	149.37704695
9	149.38340618	149.34082565	149.38838764	149.36180437
10	149.36934284	149.32671397	149.36896023	149.36964097
均值 (°)	149.36234970	149.34977951	149.372636033	149.37692244
RMS (°)	0.02501934	0.01648231	0.026552107	0.01642939

表 6.7 第 2 组数据方位角精对准结果

数据	UKF (°)	ASMUGSF (°)	UKF/ H_{∞} UKF (°)	CGPF (°)
1	-28.862609015	-28.845705455	-28.8654344885	-28.847213108
2	-28.824955099	-28.811837048	-28.8321161599	-28.828845399
3	-28.790584574	-28.795397129	-28.7569690446	-28.810460775
4	-28.848700793	-28.806271134	-28.8732914065	-28.823982984
5	-28.818397559	-28.783701159	-28.8241878211	-28.784192738
6	-28.806219313	-28.795590508	-28.8450147990	-28.837472065
7	-28.815183969	-28.816168541	-28.8394590191	-28.826204467
8	-28.801809605	-28.790369699	-28.8027495615	-28.815836371
9	-28.787738972	-28.807343932	-28.7323004921	-28.843328684
10	-28.824859964	-28.816693461	-28.8067660835	-28.827510842
均值 (°)	-28.81810589	-28.806907807	-28.817828888	-28.824504743
RMS (°)	0.02381447	0.01758884	0.04492300	0.01815560

表 6.8 第 3 组数据方位角精对准结果

数据	UKF (°)	ASMUGSF (°)	UKF/ H_{∞} UKF (°)	CGPF (°)
1	-26.444695058	-26.436242192	-26.441003643	-26.447499804
2	-26.448554624	-26.425788819	-26.452575722	-26.427870856
3	-26.397097729	-26.409228938	-26.403351594	-26.419485565
4	-26.403187243	-26.407870652	-26.372759344	-26.409831608
5	-26.424103345	-26.422564487	-26.424664664	-26.433551609
6	-26.423017177	-26.421443988	-26.437331107	-26.431045514
7	-26.346101335	-26.365859531	-26.329217079	-26.380463199
8	-26.389141012	-26.406484459	-26.425334284	-26.406325975
9	-26.422848344	-26.404699413	-26.348277022	-26.401109085
10	-26.401943980	-26.396663934	-26.394301273	-26.400026022
均值 (°)	-26.410068985	-26.409684641	-26.4028815732	-26.415720924
RMS (°)	0.02985057	0.01942962	0.041469539	0.01986163

为了深入分析干扰对初始对准的影响和 4 种滤波算法的性能, 除 6.2.2 节中已详细分析的典型数据, 其他 28 段数据精对准的方位角如图 6.13~6.40 所示。

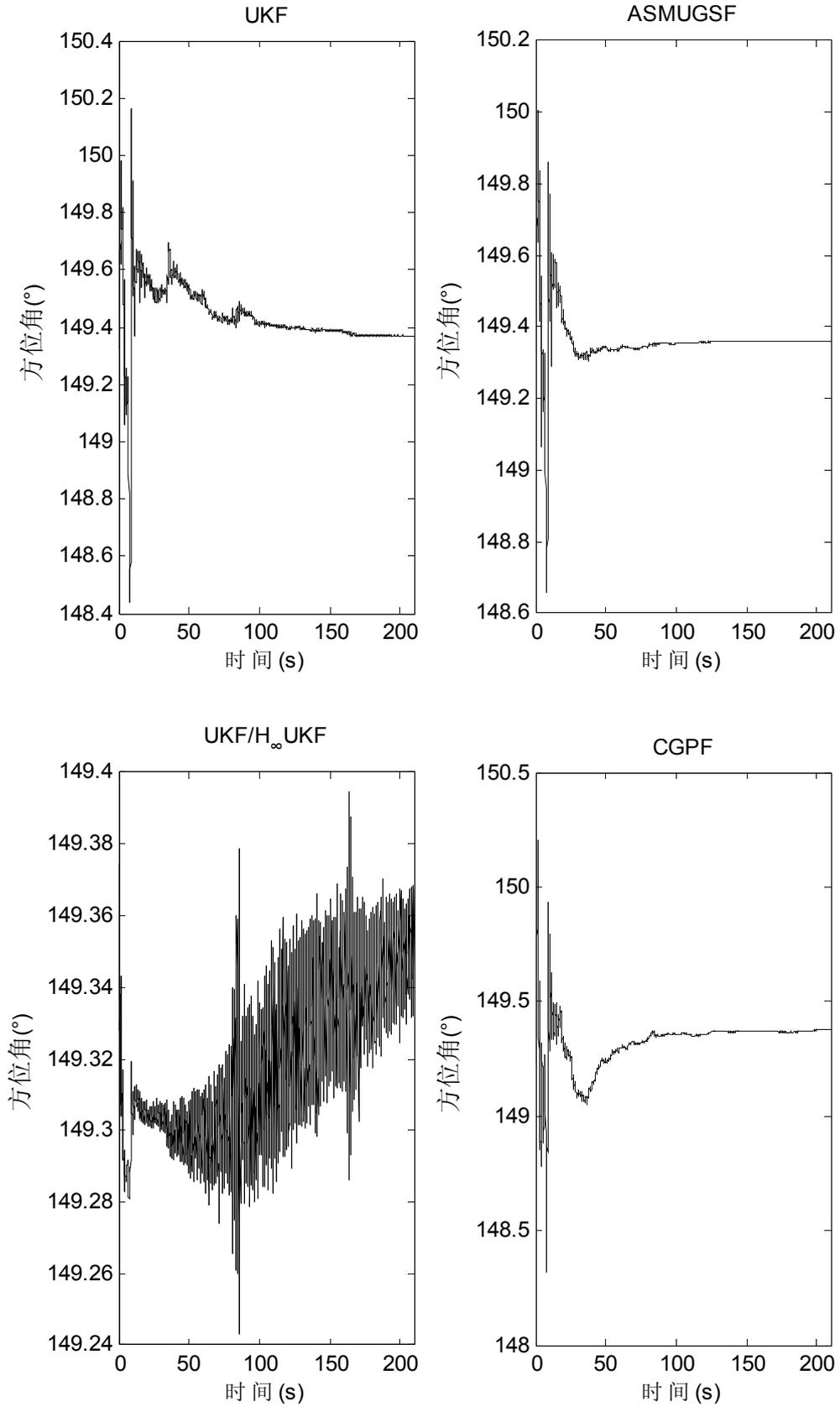


图 6.13 第 1 组第 1 段数据精对准的方位角

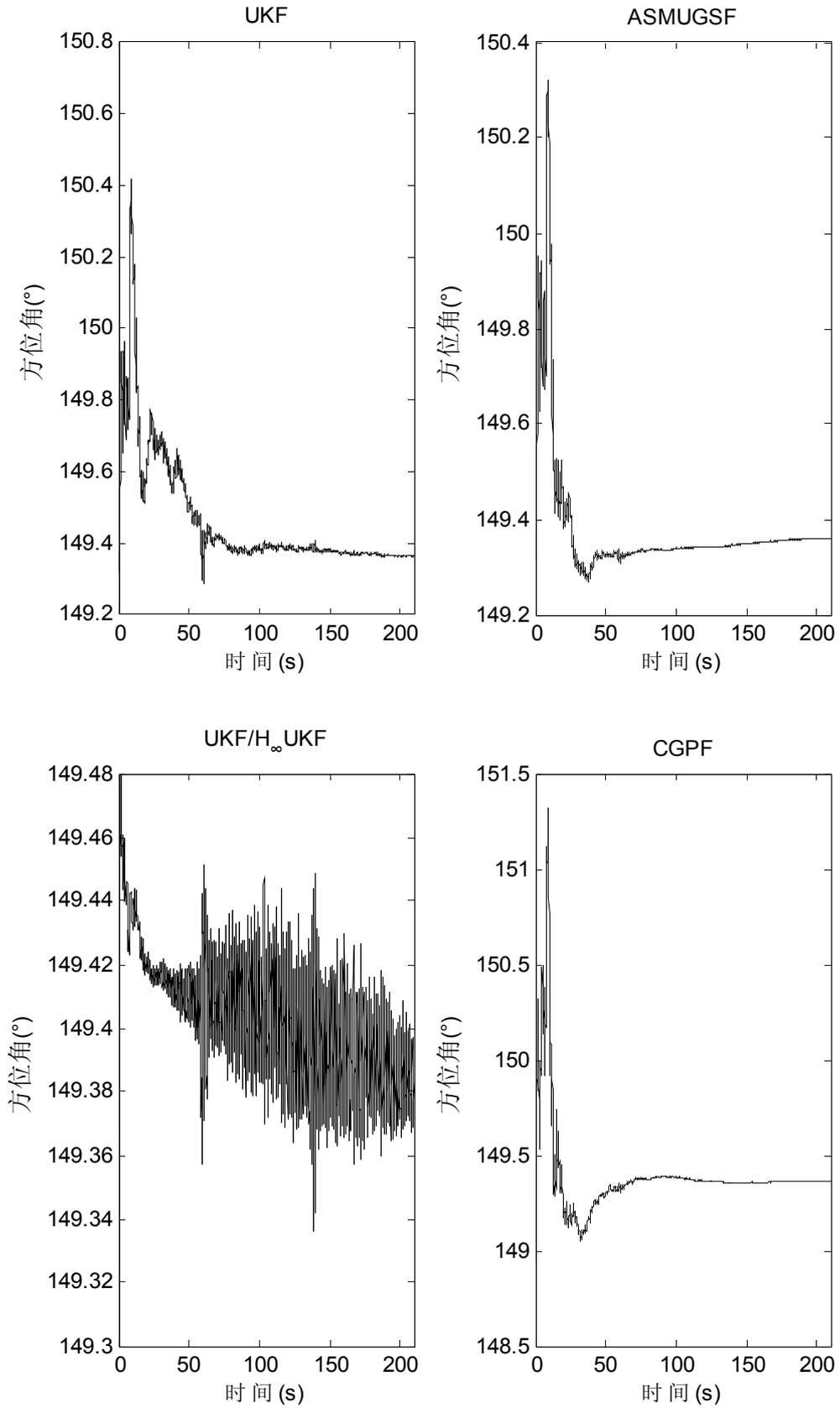


图 6.14 第 1 组第 2 段数据精对准的方位角

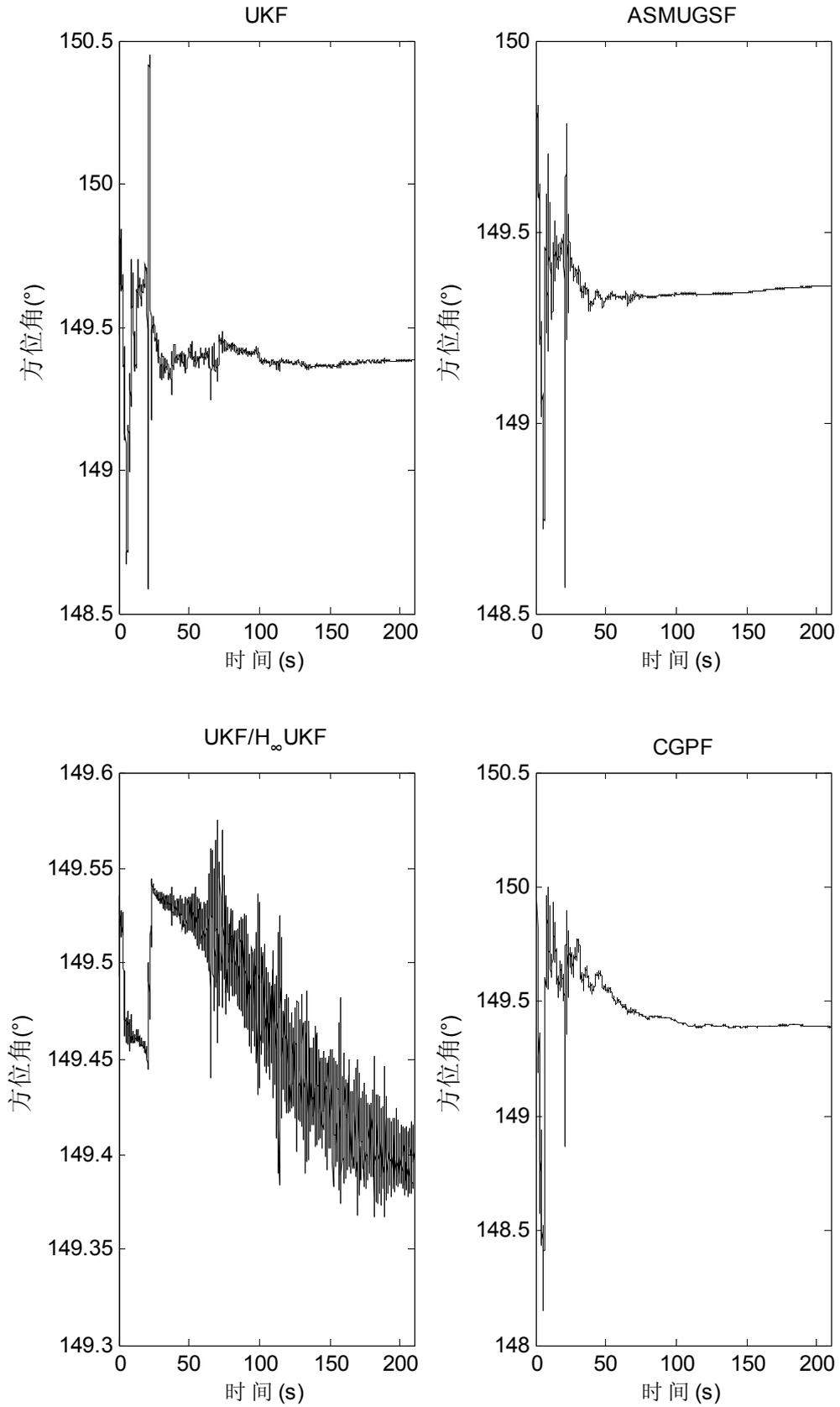


图 6.15 第 1 组第 3 段数据精对准的方位角

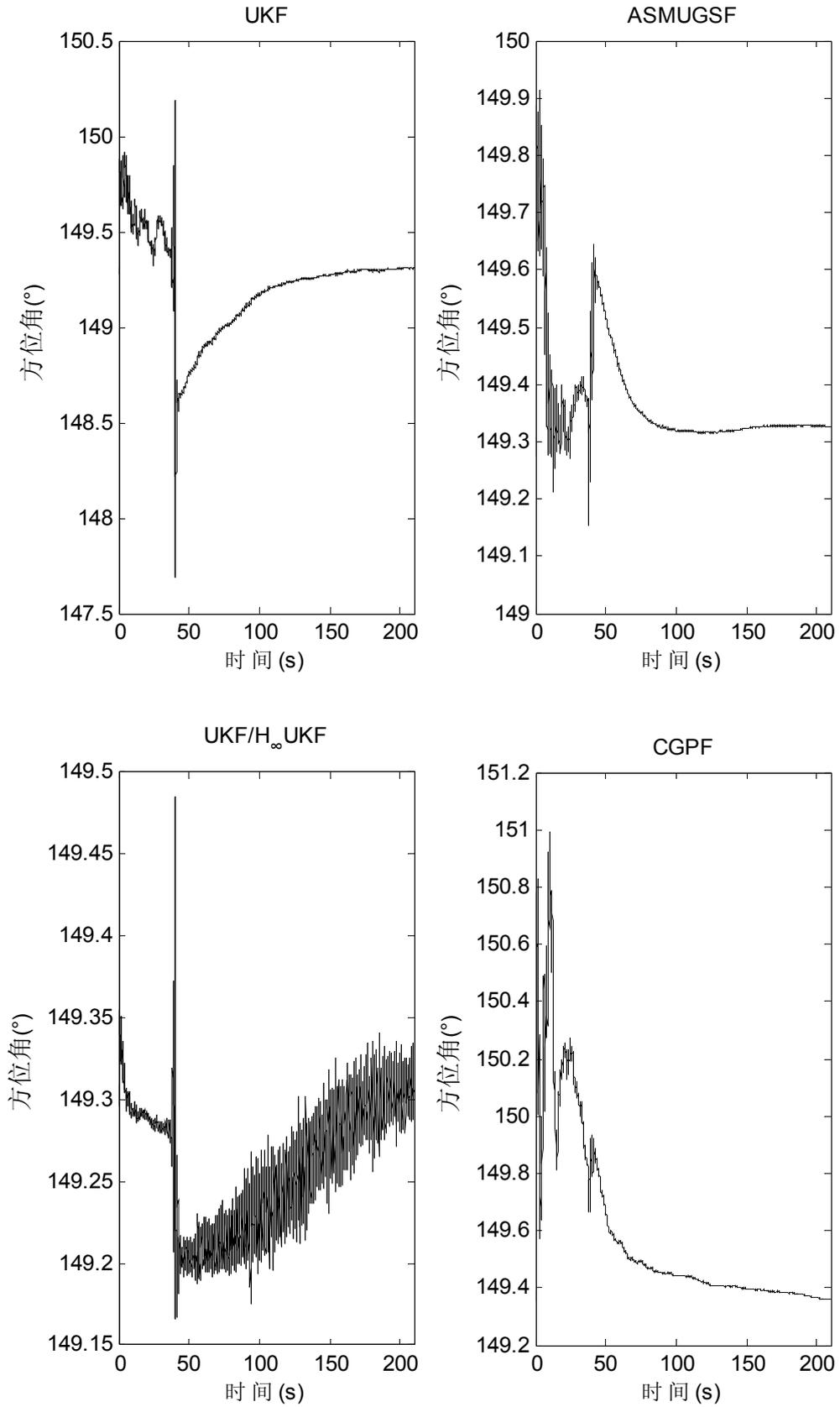


图 6.16 第 1 组第 4 段数据精对准的方位角

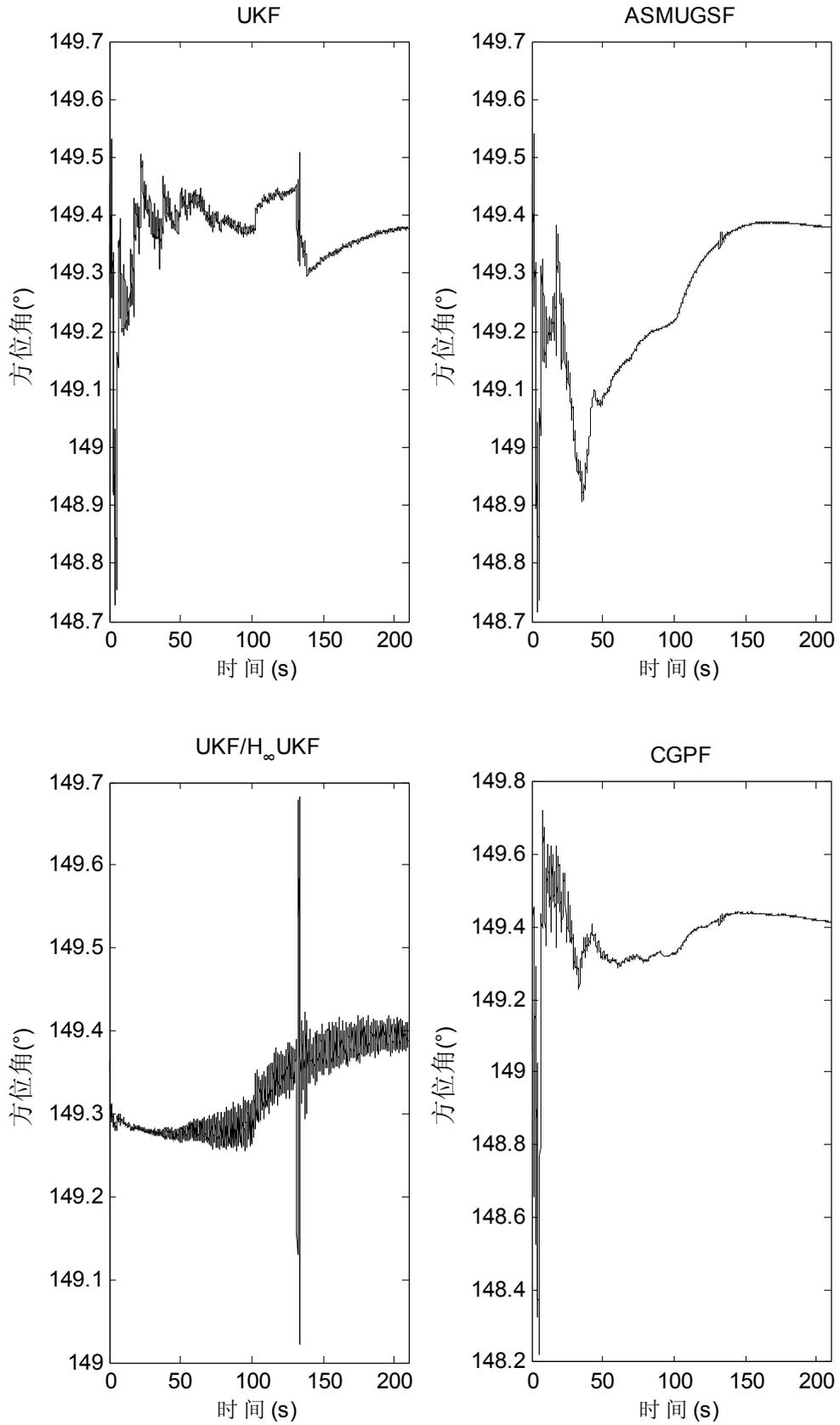


图 6.17 第 1 组第 5 段数据精对准的方位角

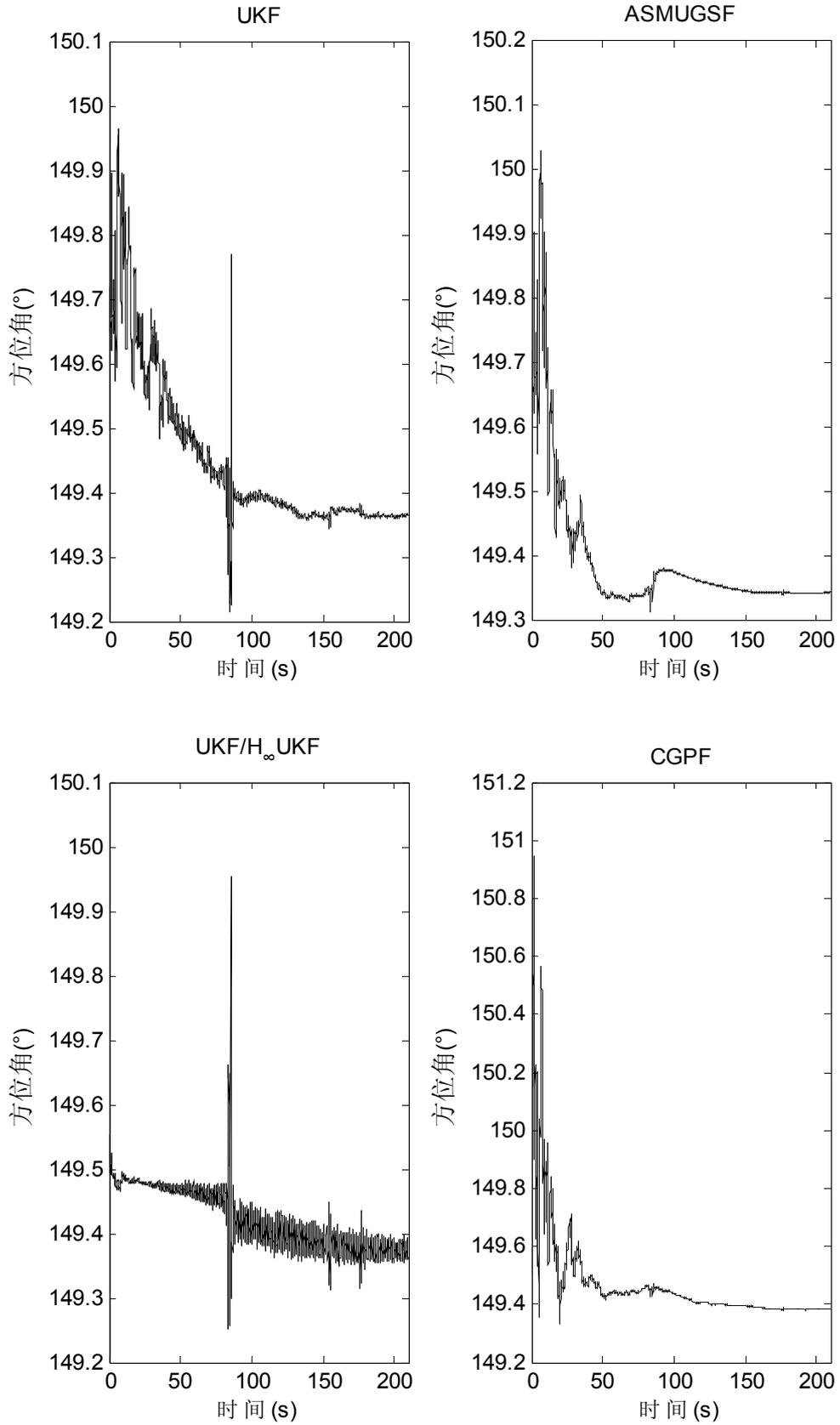


图 6.18 第 3 组第 6 段数据精对准的方位角

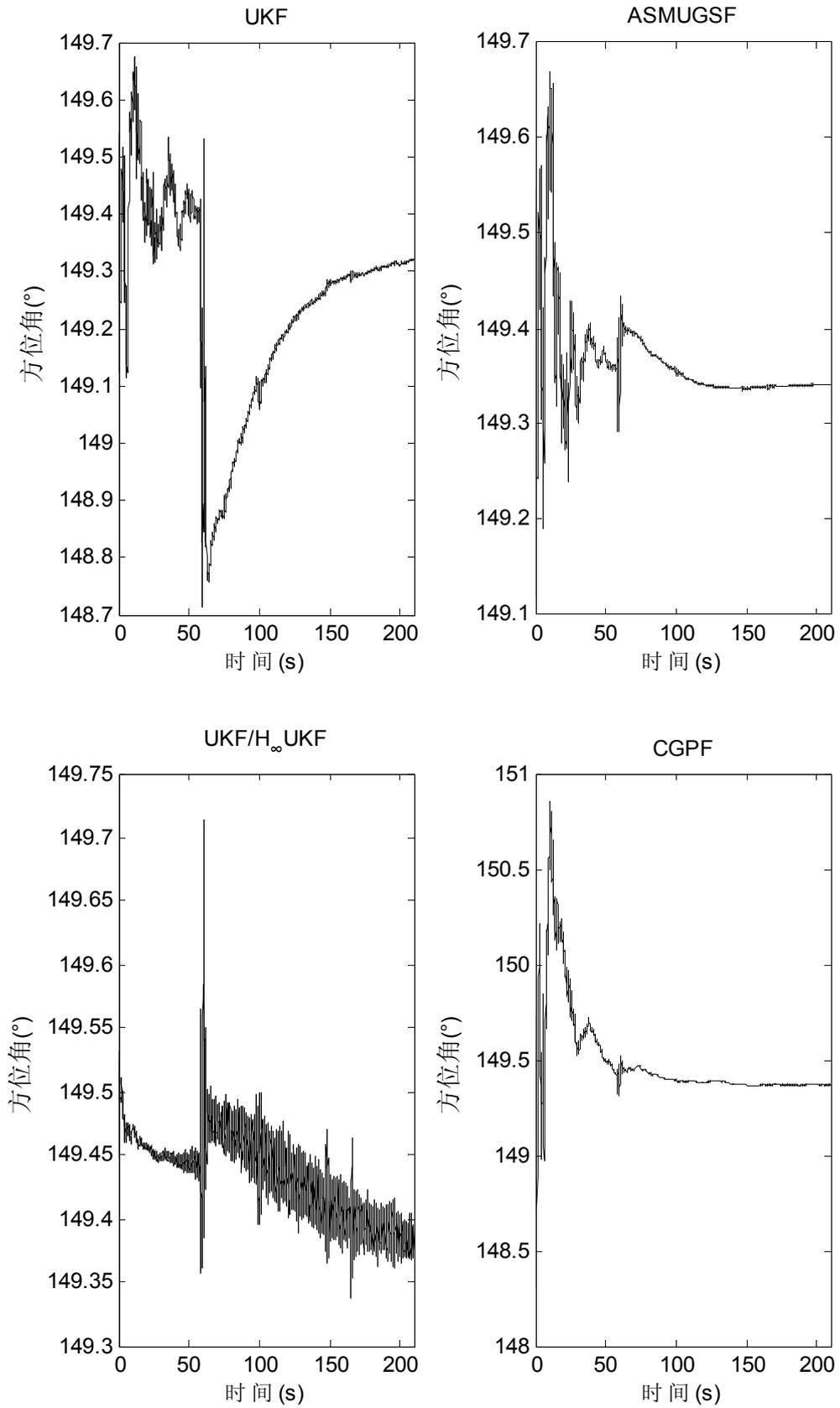


图 6.19 第 1 组第 7 段数据精对准的方位角

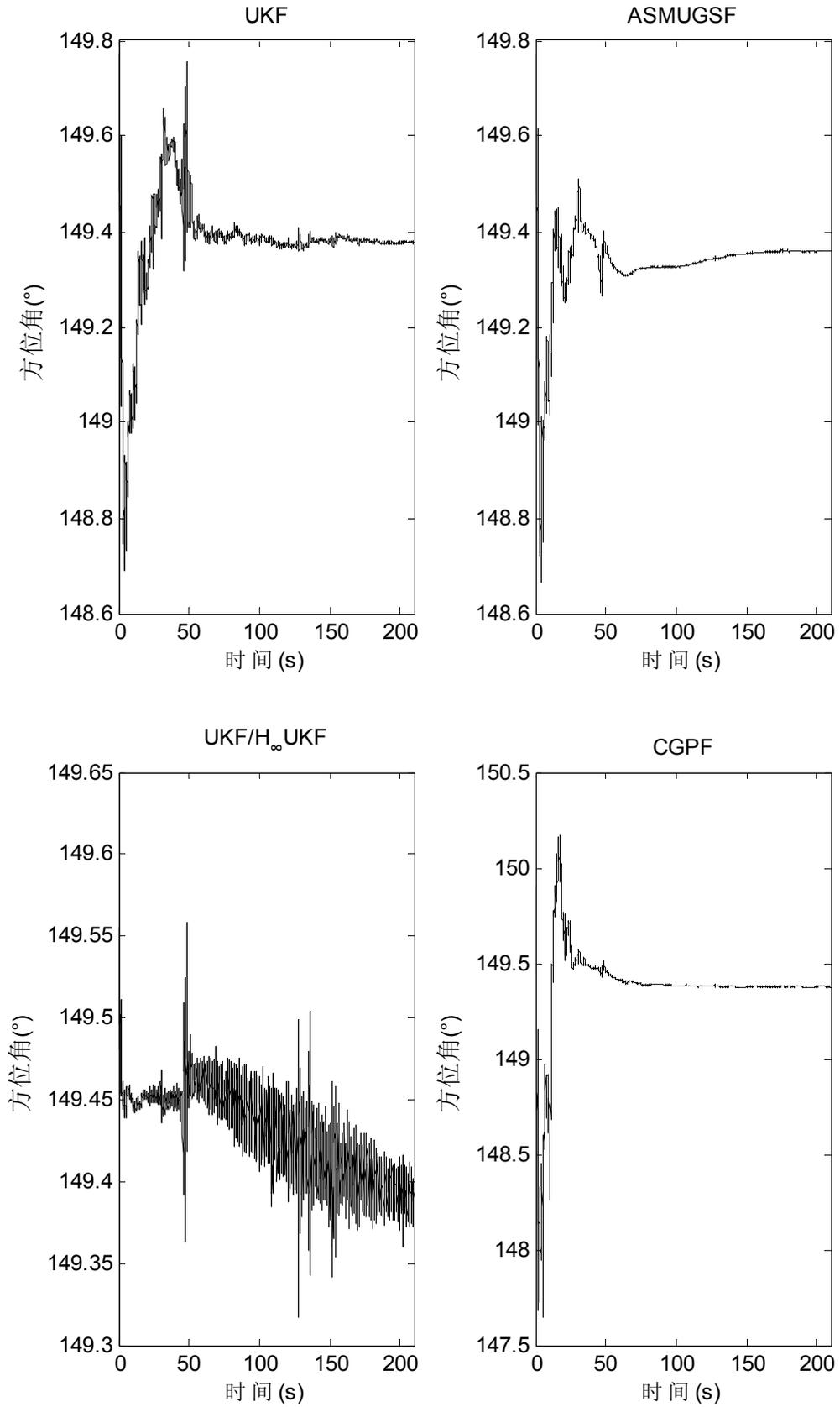


图 6.20 第 1 组第 8 段数据精对准的方位角

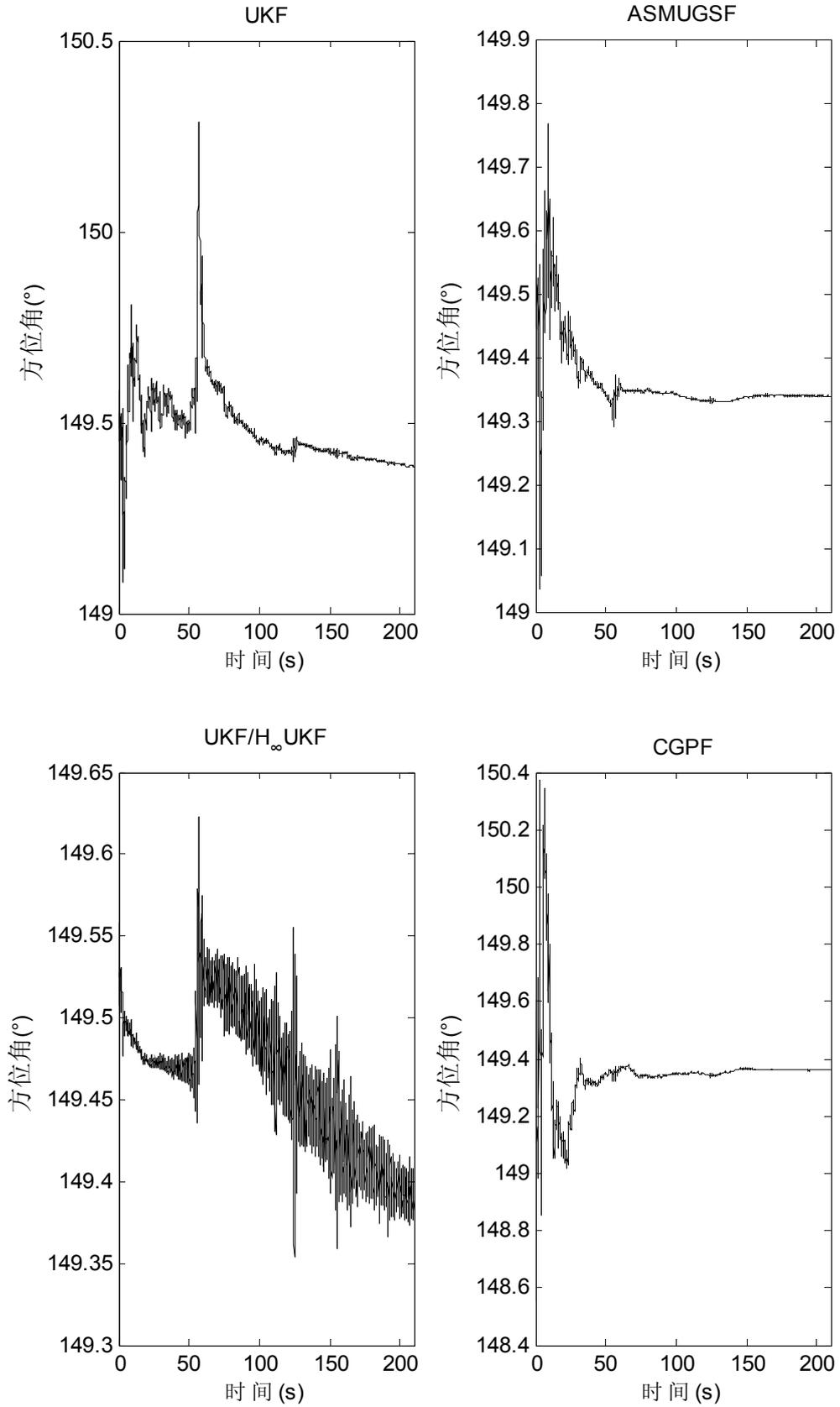


图 6.21 第 1 组第 9 段数据精对准的方位角

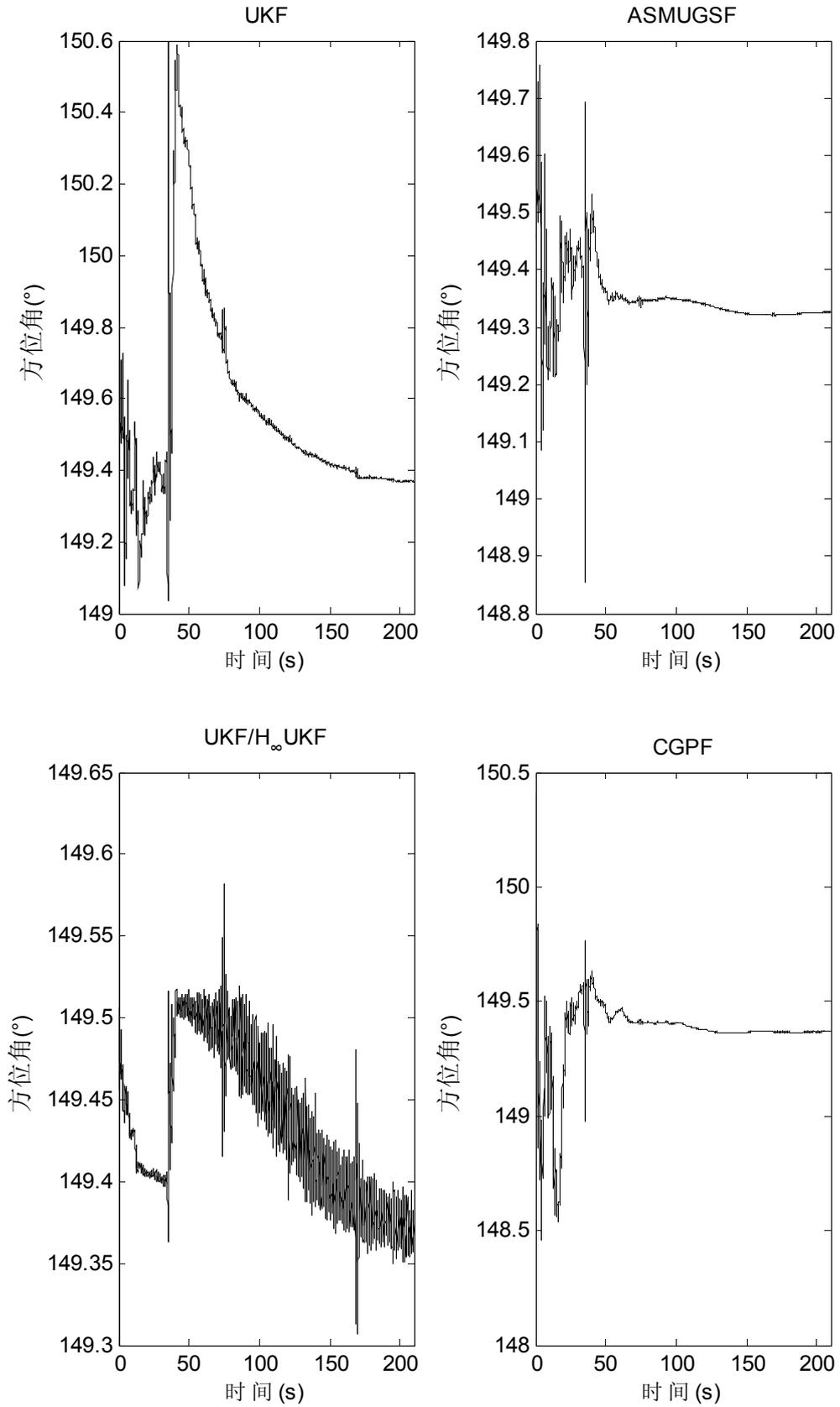


图 6.22 第 1 组第 10 段数据精对准的方位角

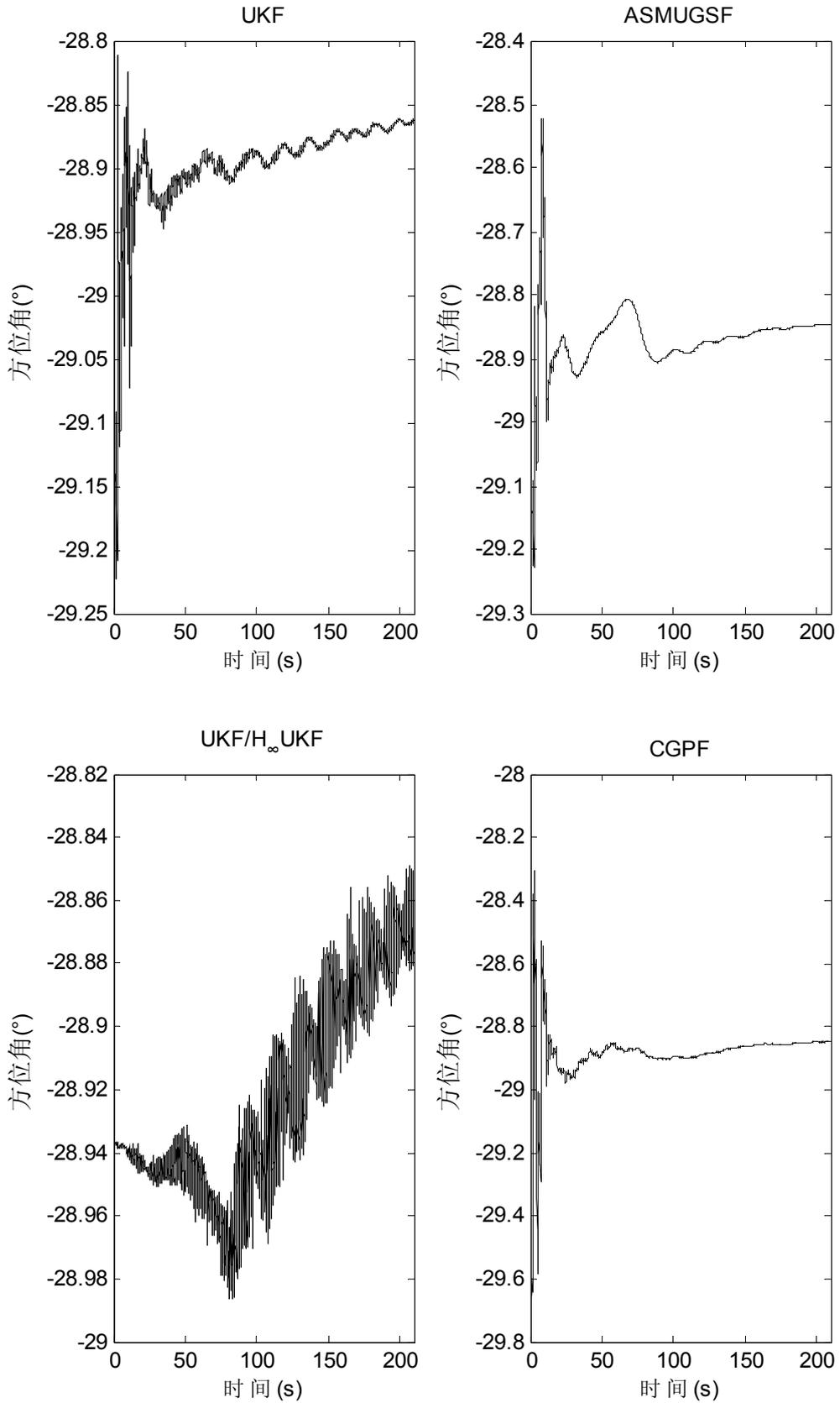


图 6.23 第 2 组第 1 段数据精对准的方位角

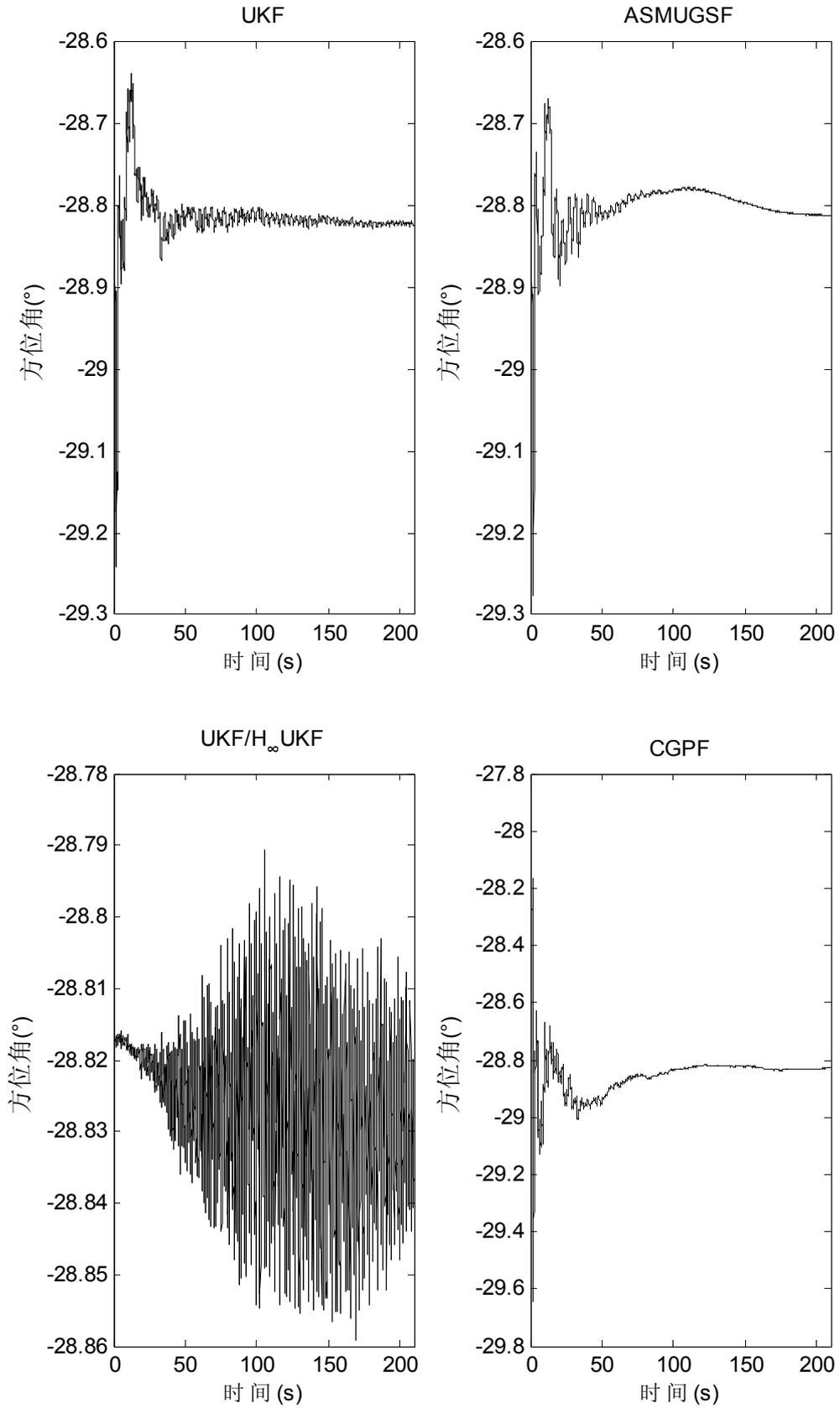


图 6.24 第 2 组第 2 段数据精对准的方位角

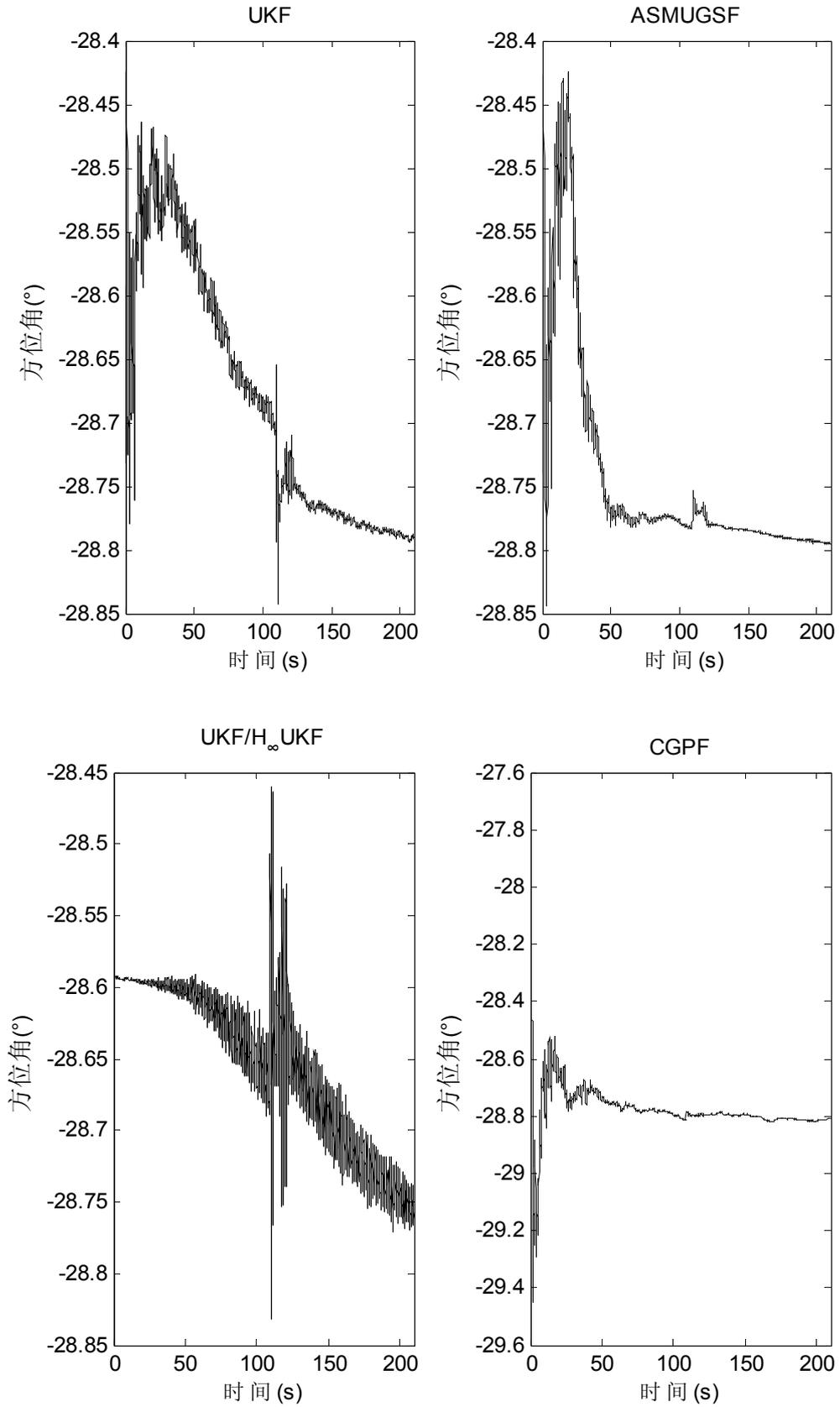


图 6.25 第 2 组第 3 段数据精对准的方位角

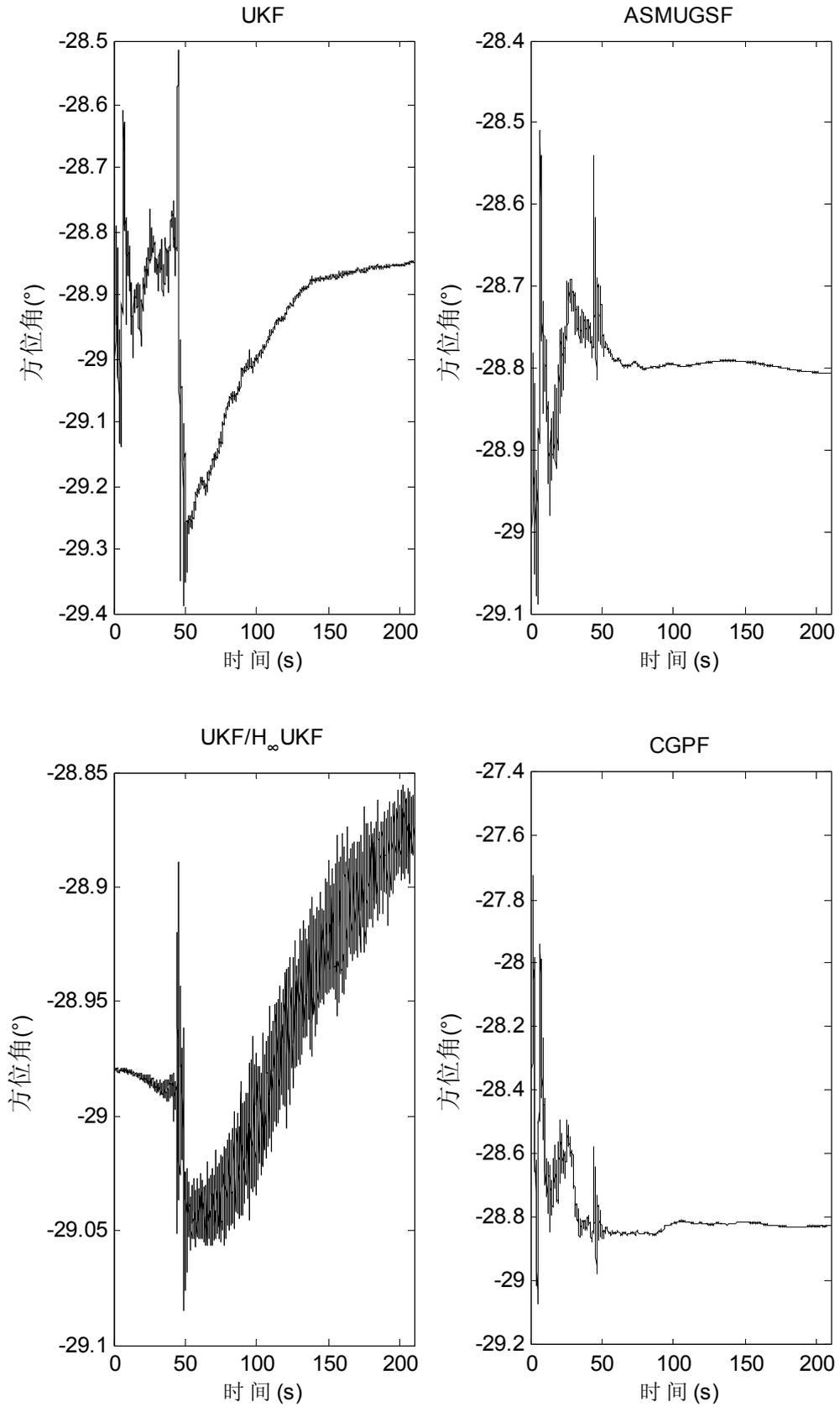


图 6.26 第 2 组第 4 段数据精对准的方位角

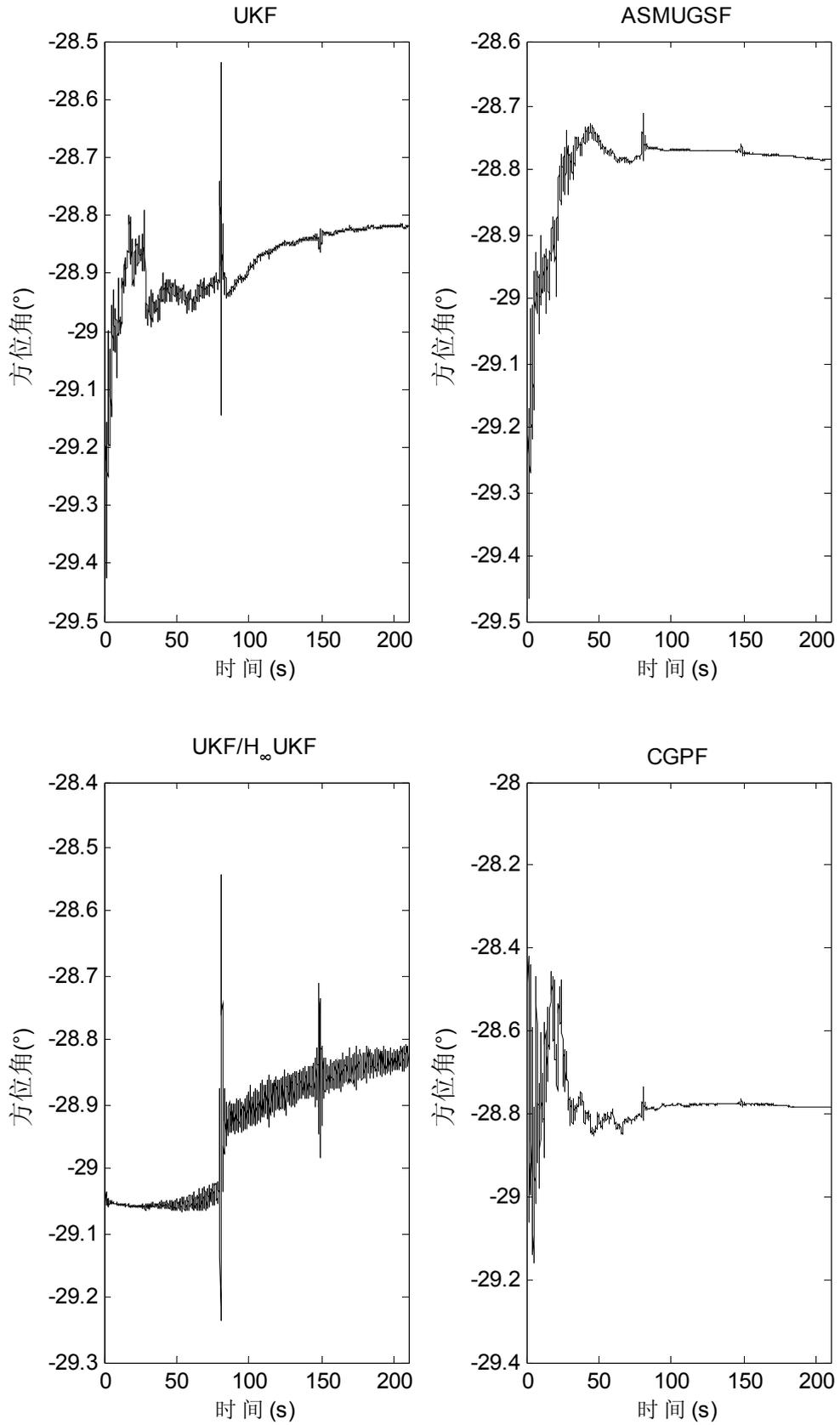


图 6.27 第 2 组第 5 段数据精对准的方位角

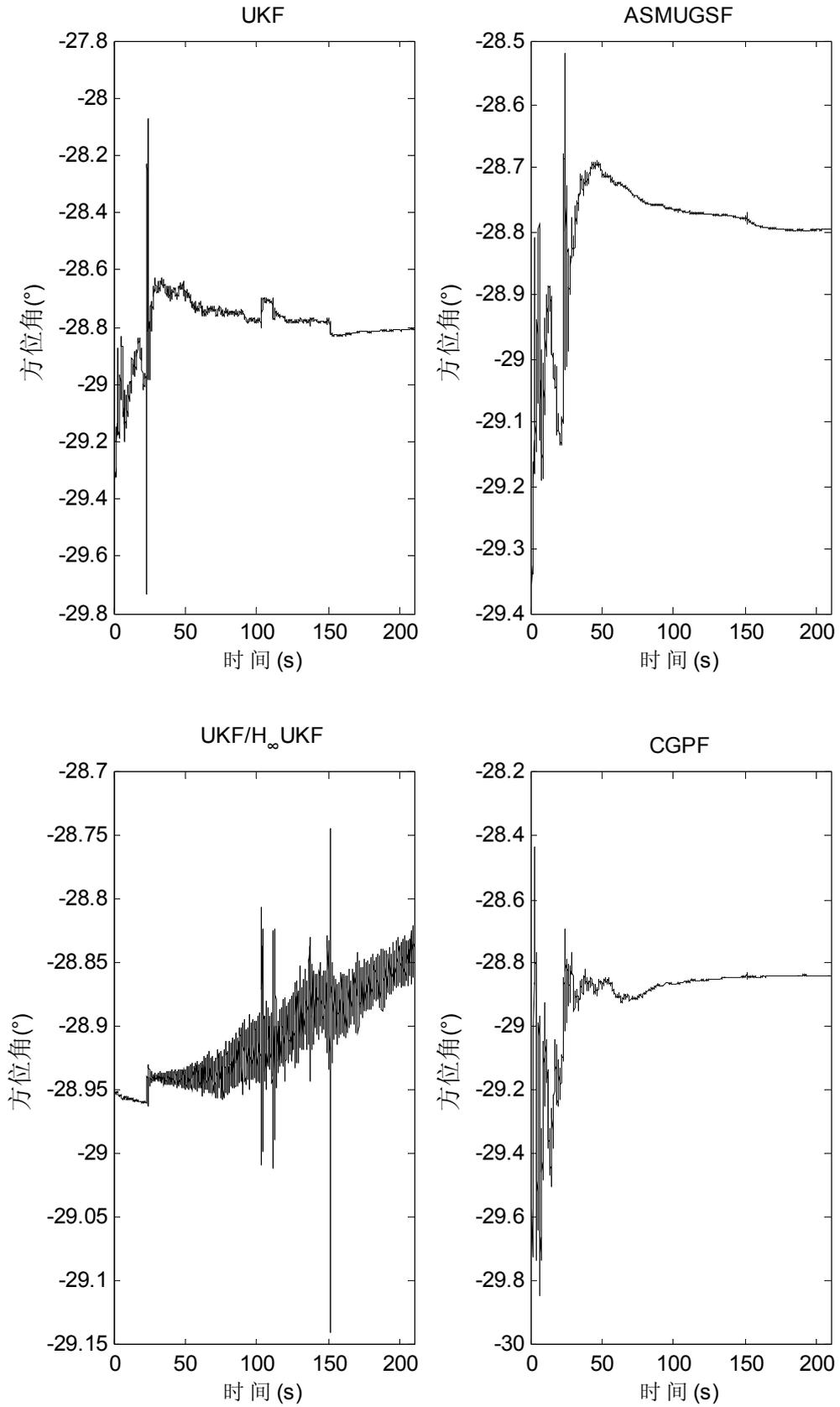


图 6.28 第 2 组第 6 段数据精对准的方位角

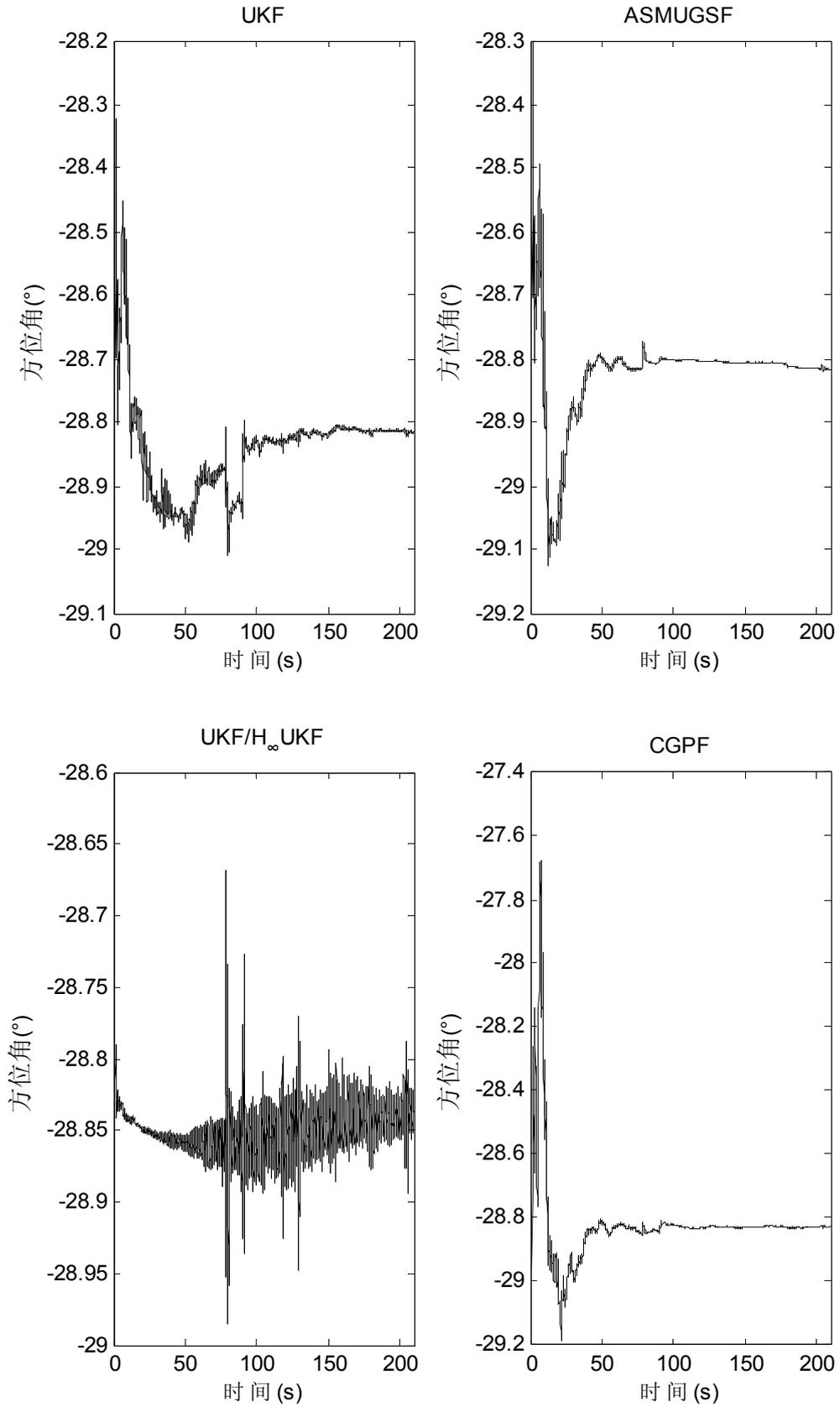


图 6.29 第 2 组第 7 段数据精对准的方位角

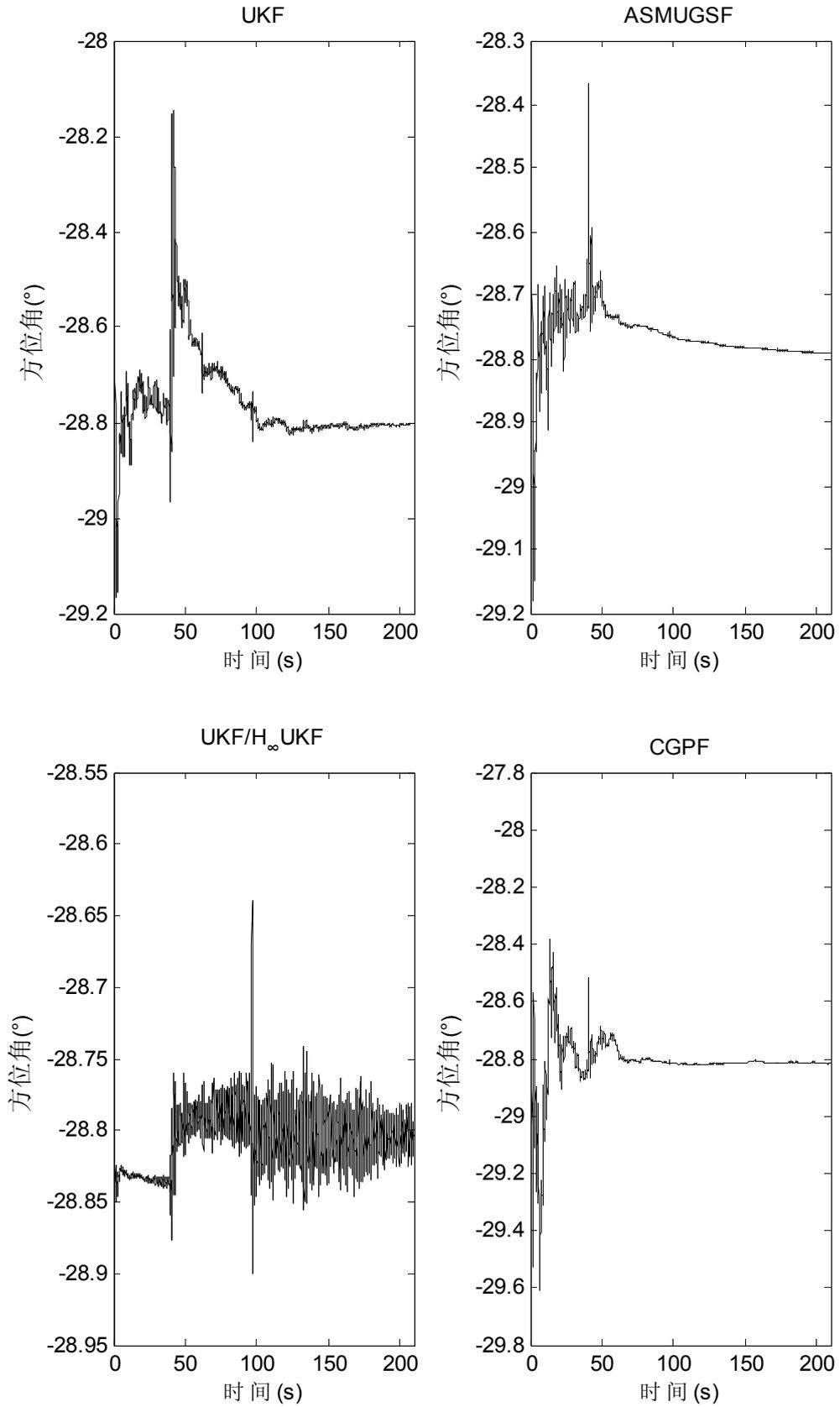


图 6.30 第 2 组第 8 段数据精对准的方位角

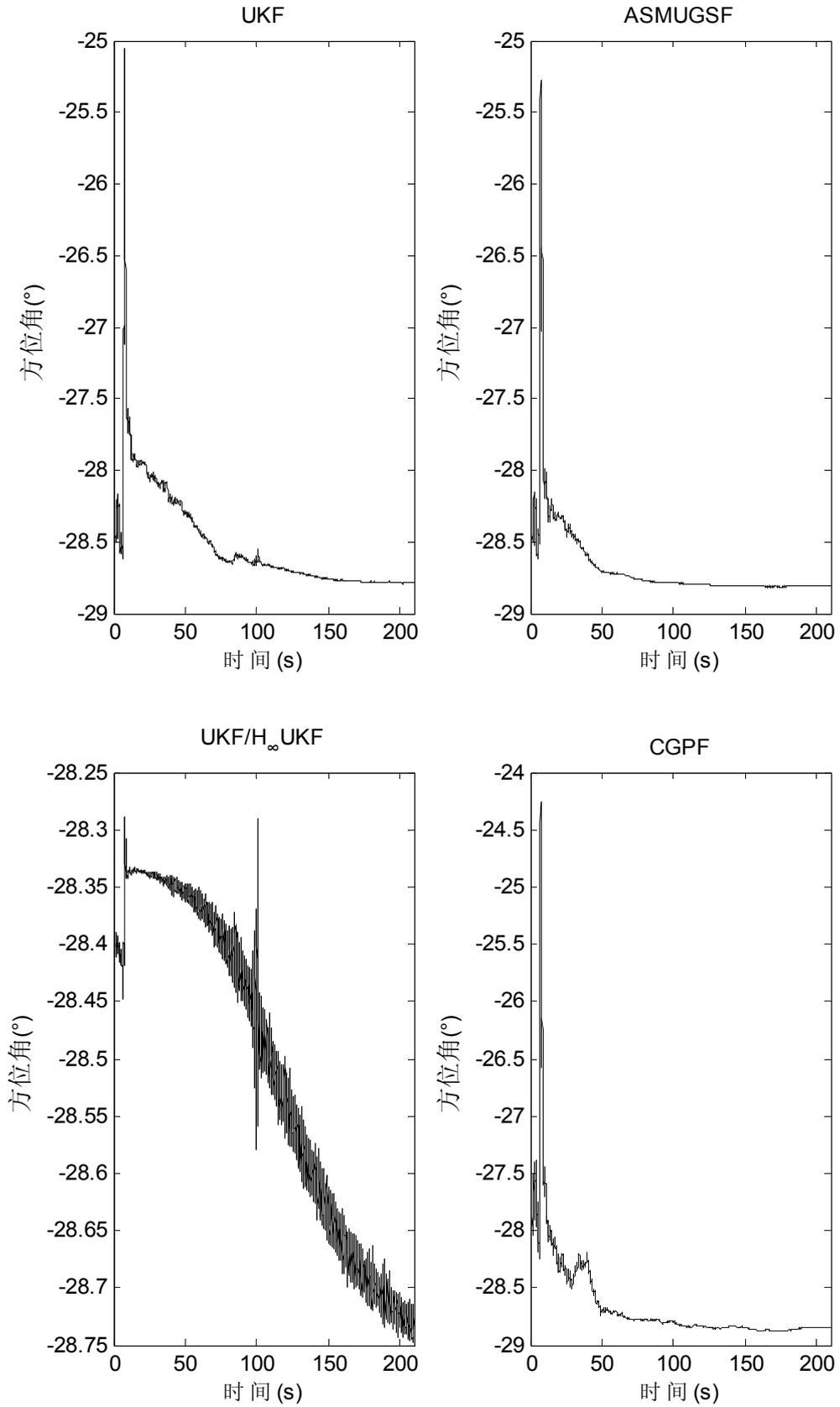


图 6.31 第 2 组第 9 段数据精对准的方位角

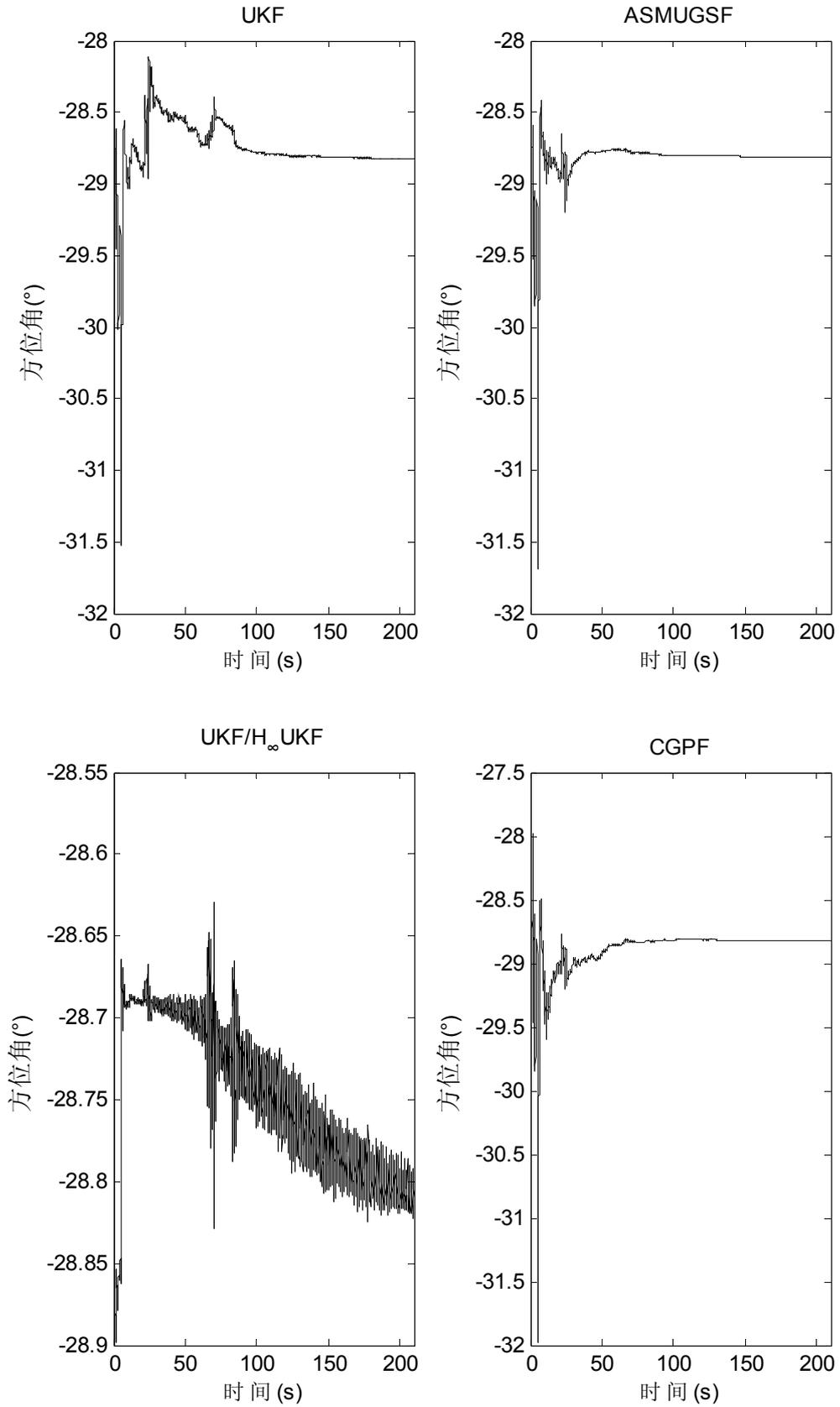


图 6.32 第 2 组第 10 段数据精对准的方位角

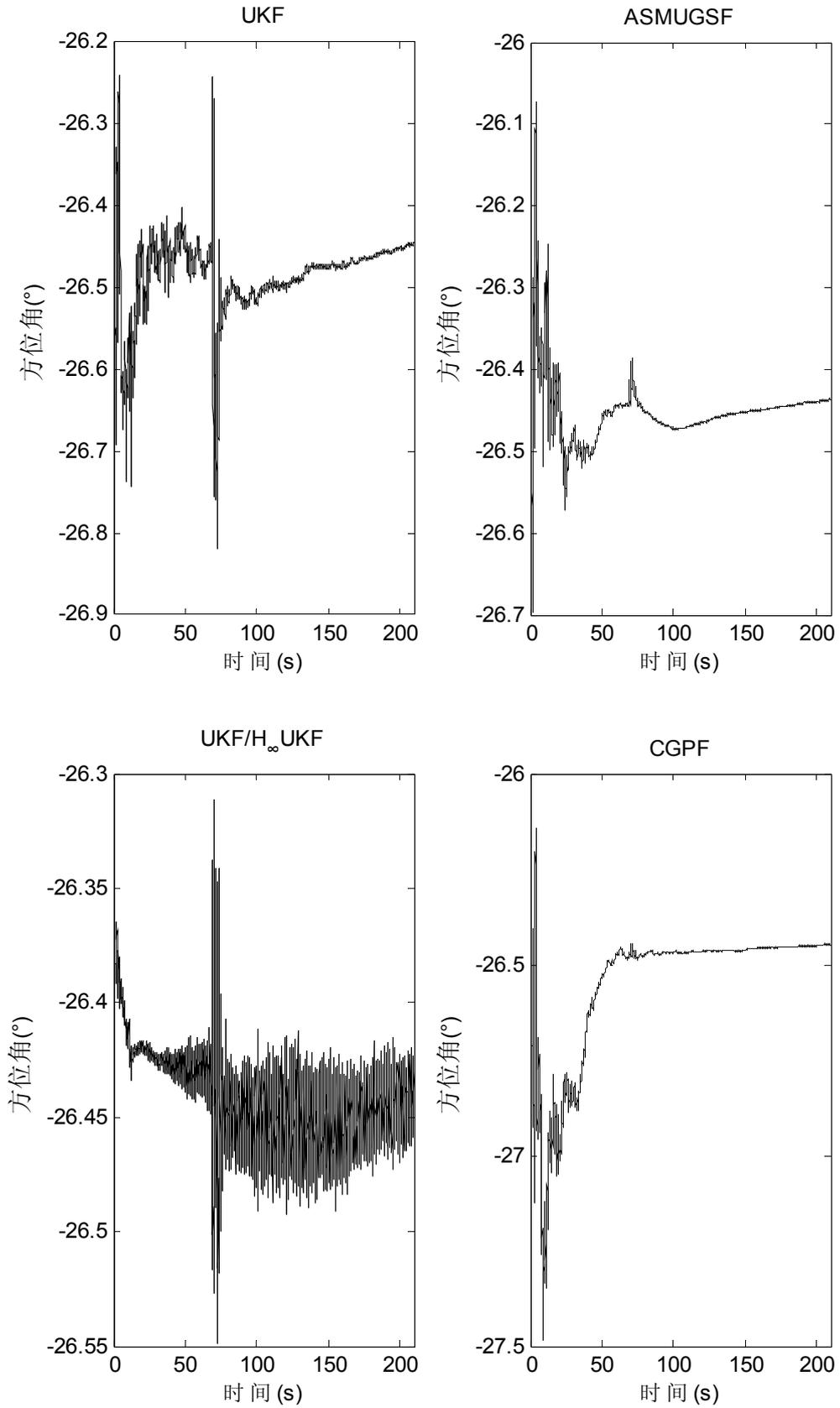


图 6.33 第 3 组第 1 段数据精对准的方位角

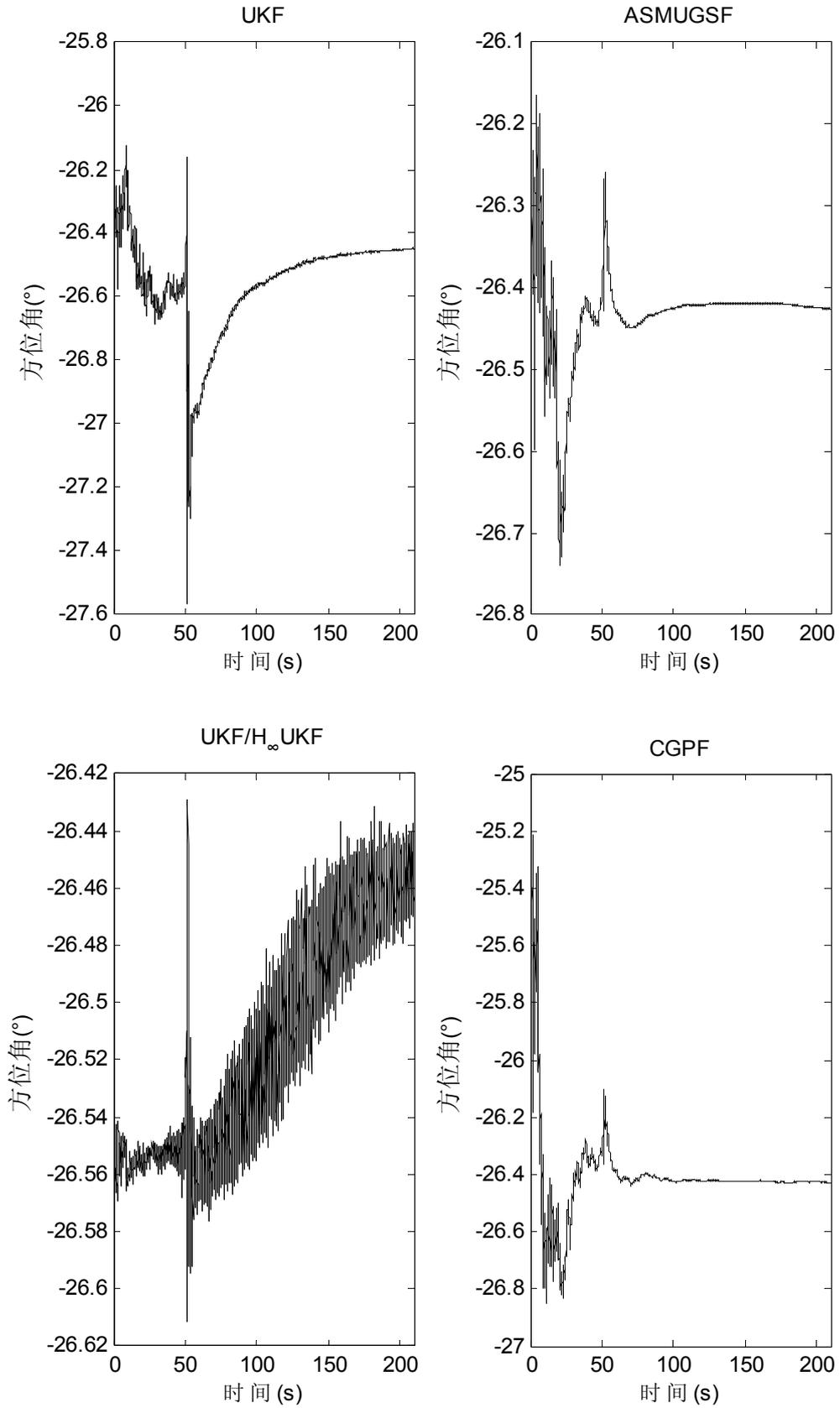


图 6.34 第 3 组第 2 段数据精对准的方位角

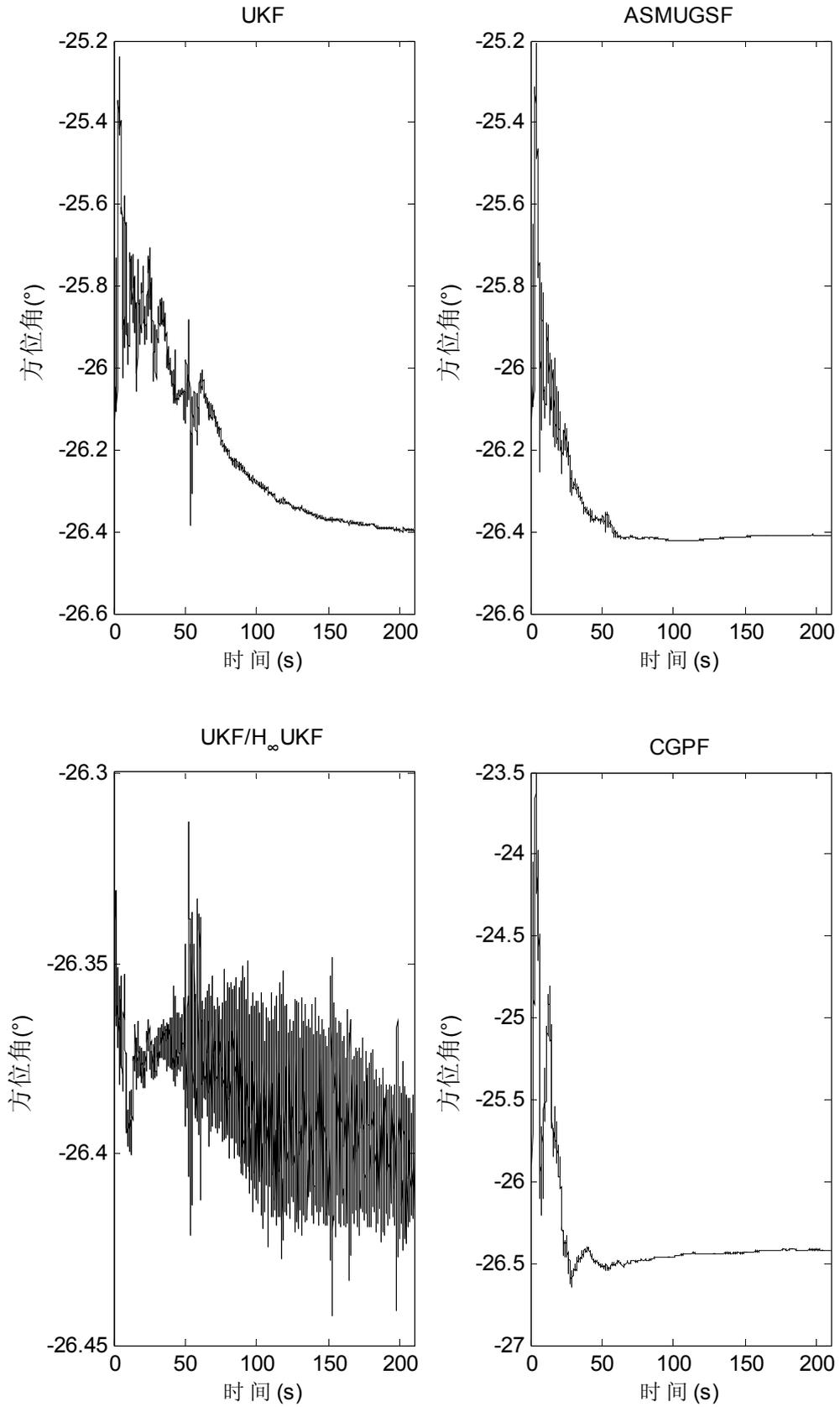


图 6.35 第 3 组第 3 段数据精对准的方位角

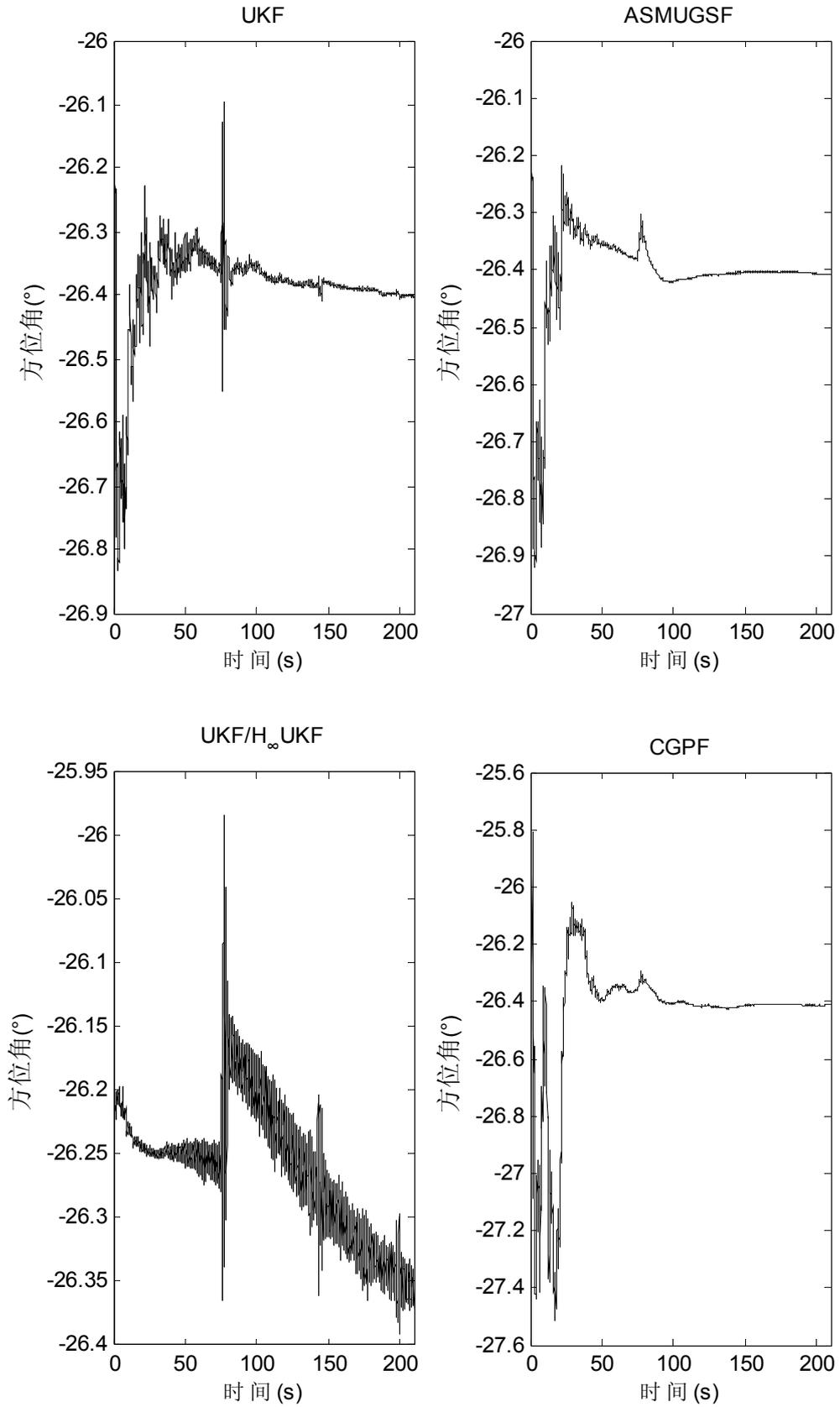


图 6.36 第 3 组第 4 段数据精对准的方位角

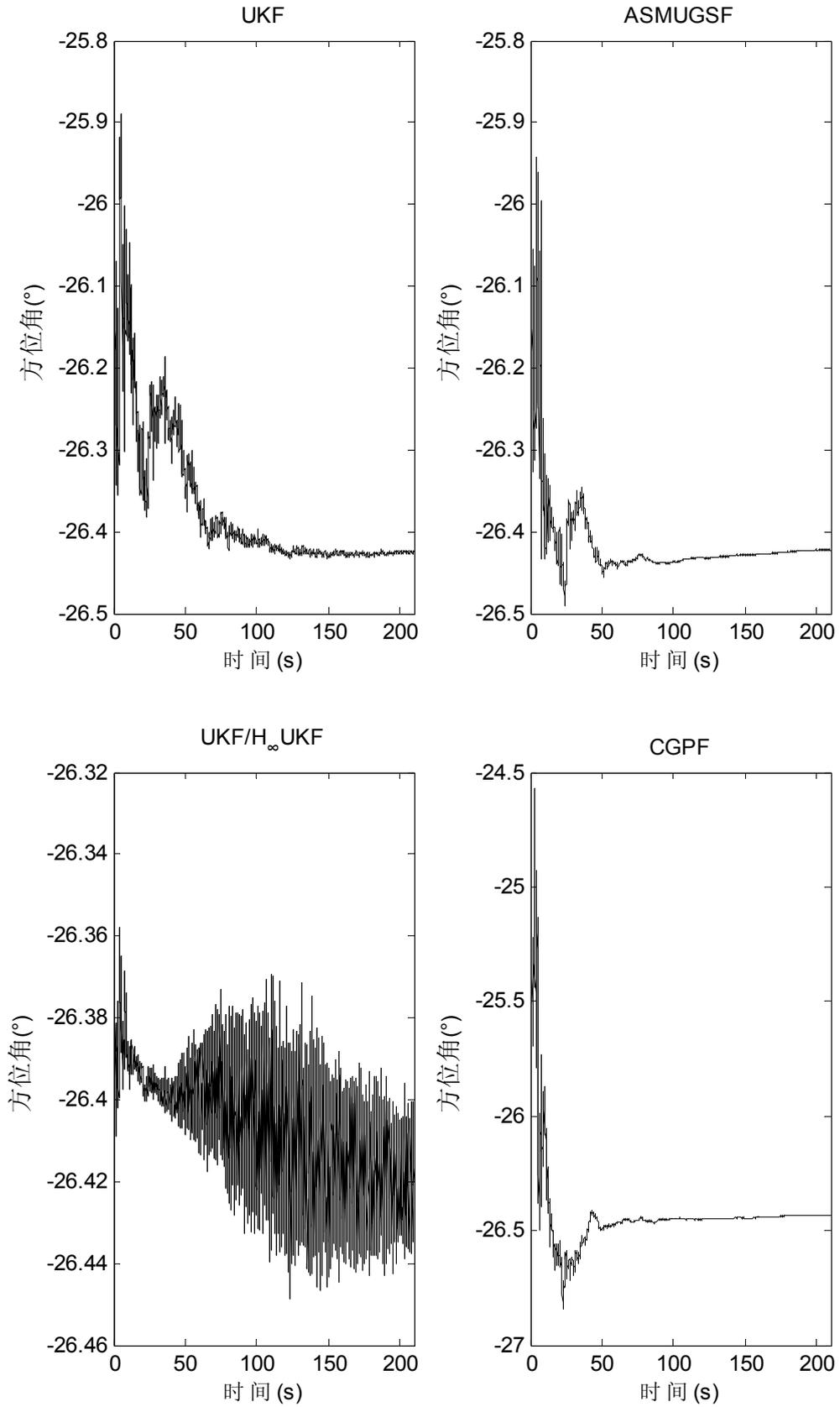


图 6.37 第 3 组第 5 段数据精对准的方位角

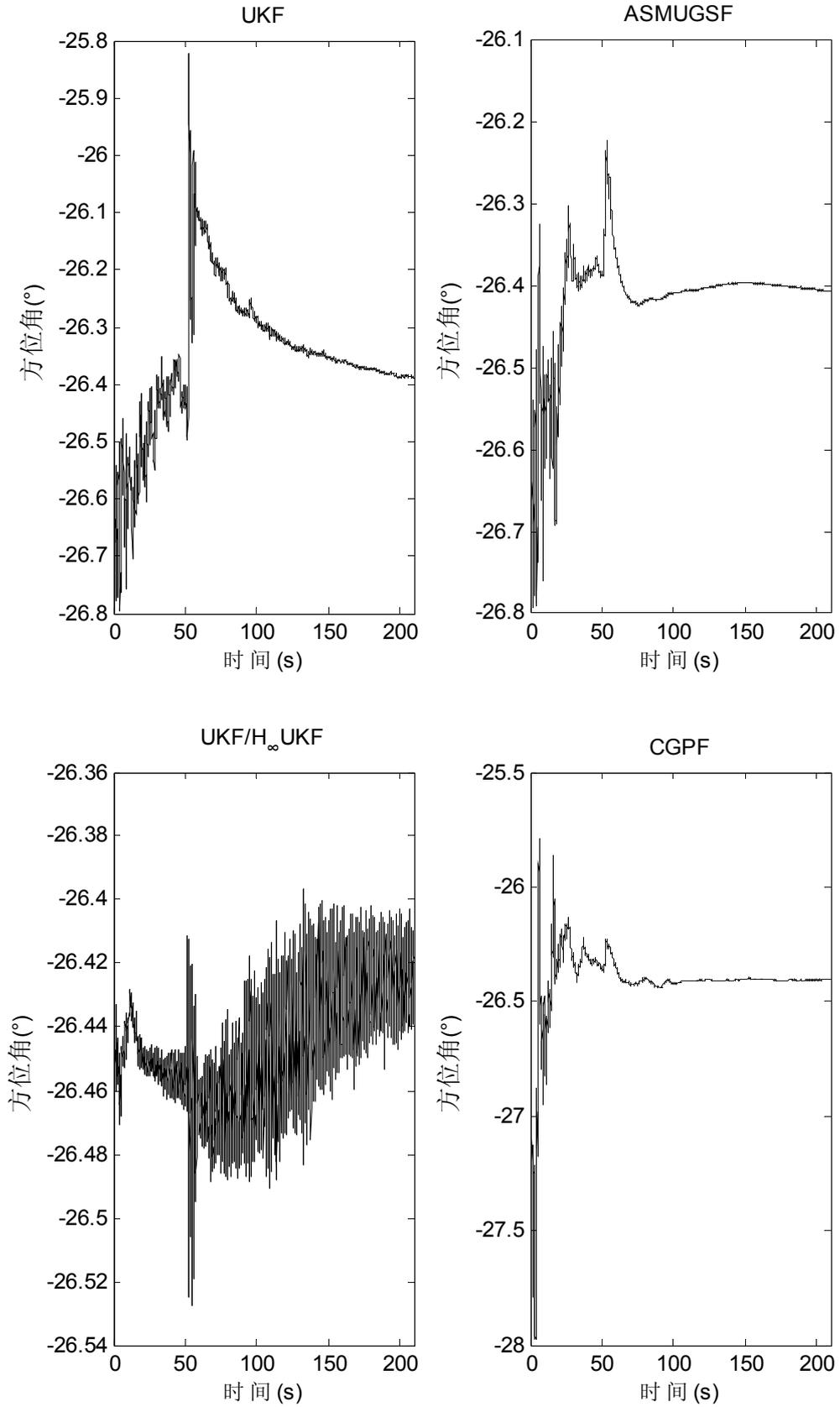


图 6.38 第 3 组第 8 段数据精对准的方位角

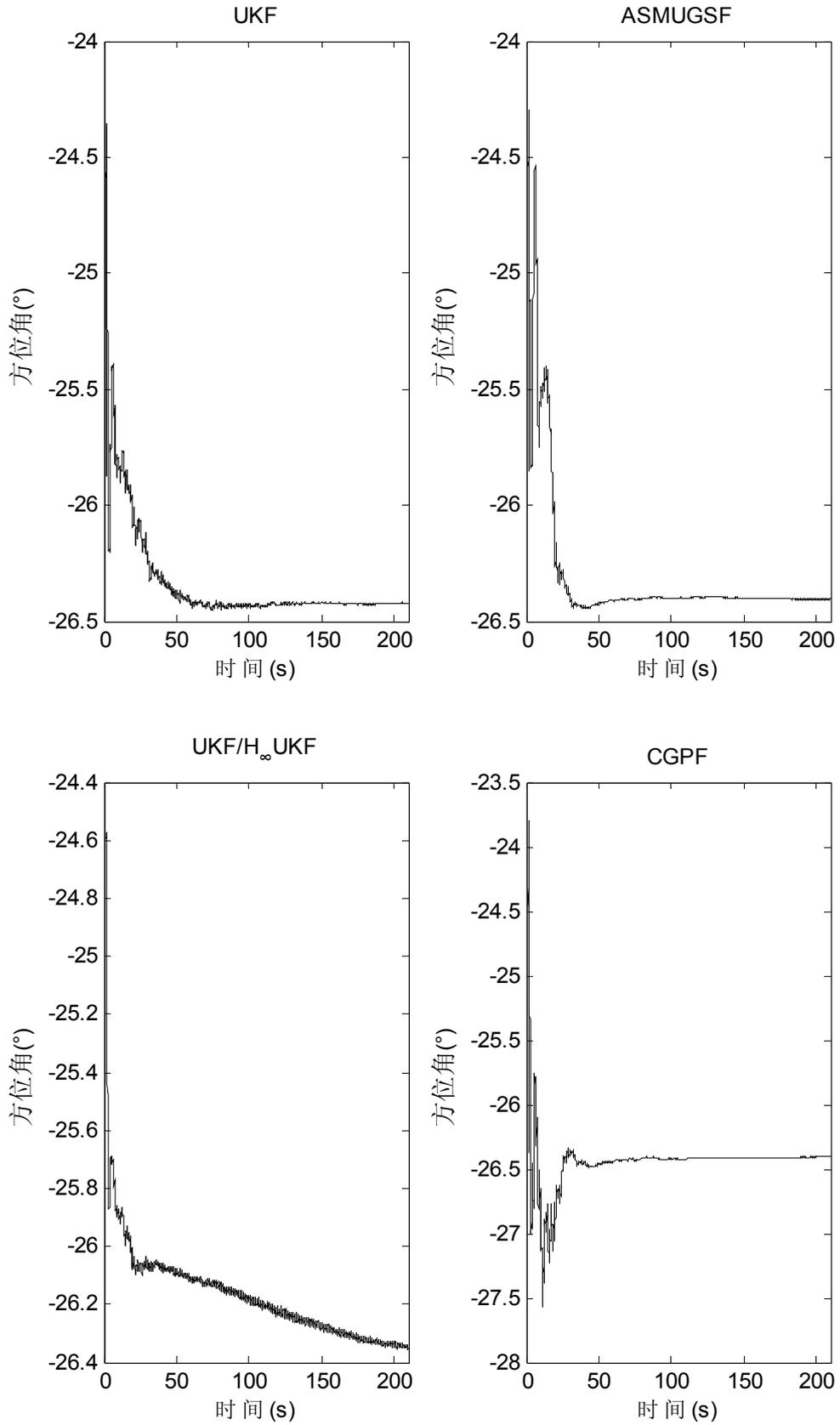


图 6.39 第 3 组第 9 段数据精对准的方位角

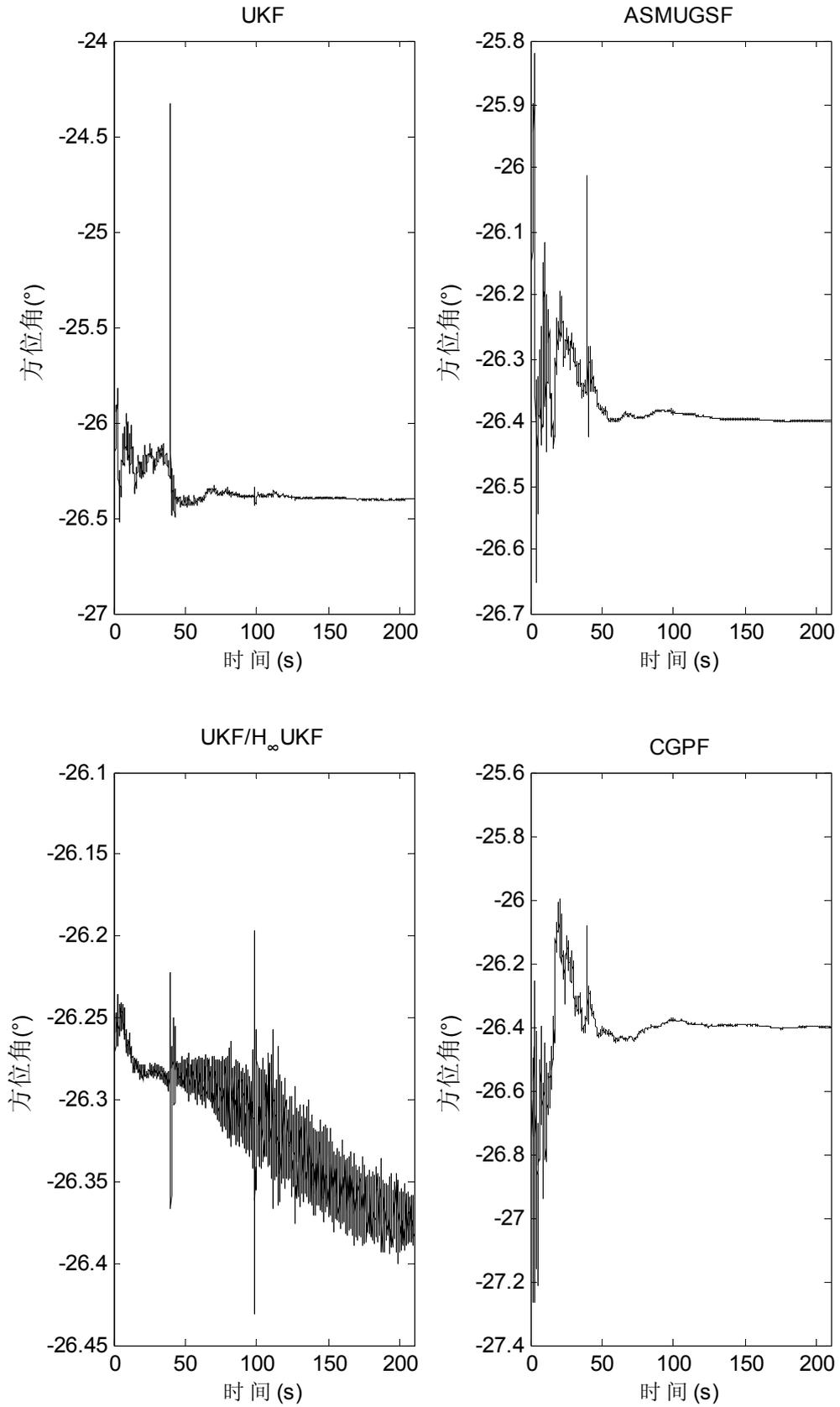


图 6.40 第 3 组第 10 段数据精对准的方位角

由图 6.3~6.40 可知, 30 段数据精对准阶段的情况为: 1 段数据没有明显干扰, 2 段数据有晃动干扰, 7 段的数据在滤波算法收敛前有干扰(以 ASMUGSF 和 CGPF 的方位角为标准, 下同), 15 段数据在滤波算法收敛后有干扰, 5 段数据在滤波算法收敛前后均有干扰。经对比 4 种干扰情况下滤波算法方位角的收敛情况可知, 收敛前的干扰对算法的收敛影响较大, 收敛后 ASMUGSF 和 CGPF 对干扰的抑制比较好, CGPF 最好, 收敛前后均有干扰的试验数据的对准结果体现的非常明显。30 段数据中, CGPF 的方位角收敛快于 ASMUGSF 的有 21 段, 可知其收敛优于 ASMUGSF, 均明显优于 UKF。UKF/ H_{∞} UKF 收敛快, 但均方差较大。

综合上述图标可知, CGPF 算法的收敛和抑制干扰优于 ASMUGSF, 单位位置重复精度相当。在这三方面 CGPF、ASMUGSF 均优于 UKF。UKF/ H_{∞} UKF 的精对准在最初 50s 收敛快, 对干扰抑制快但 50s 后收敛变慢, 且均方差变大。

在干扰车载试验前, 已完成转台 8 位置静基座对准试验, 受篇幅所限未加入到论文中。经分析惯性凝固粗对准+UKF 与预滤波+解析粗对准+闭环 KF^[154]的精度相当, ASMUGSF 和 CGPF 精度相当, CGPF 收敛速度优于 ASMUGSF, 均快于 UKF, 精度上二者比 UKF 提高 20"。3 种滤波算法的性能与干扰车载基座的试验结果相符。

6.3 本章小结

在本章中, 选取了 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_{∞} UKF、CGPF, 并采用惯性凝固粗对准方法, 对干扰下车载基座的试验数据进行初始对准试验研究。粗对准试验表明惯性凝固粗对准方法优于三种解析式粗对准方法。ASMUGSF、CGPF 在单位位置重复精度、收敛速度和对干扰的抑制上均优于 UKF, 在收敛速度和对干扰的抑制上, CGPF 略优于 ASMUGSF。UKF/ H_{∞} UKF 在开始 50s 内收敛快, 对干扰抑制快, 但其 50s 后均方差变大, 需改善。实际试验的结果体现了仿真试验的大部分结论。本章的试验研究为实际工程应用提供了一定的参考依据。

结论

针对非线性非高斯的捷联惯导系统的初始对准问题，论文以晃动基座下初始对准为例，建立非线性模型，使用两种噪声模型，对几种典型的非线性滤波算法从理论上进行了较为深入的研究，针对其中的不足提出了改进方案，并将其应用到论文的初始对准仿真中。论文取得了如下研究成果：

1. 分析 DDF、UKF、CKF 三类典型 SPKF 的性能，为选择 SPKF 算法提供参考。在此基础上，针对系统噪声和测量噪声的先验统计特性未知或不准确，应用标准 UKF 导致滤波精度下降甚至发散的问题，论文应用带噪声统计估计器的自适应 UKF 算法，分别在高斯白噪声和一阶马尔科夫环境下进行仿真研究，仿真结果表明自适应 UKF 依然具有较好的稳定性和适应性，比标准 UKF 滤波精度高、收敛速度快。

2. 研究了分裂合并无迹高斯和滤波算法，利用高斯混合模型在近似随机变量分布密度，尤其是非高斯噪声模型上的优异性能，针对先验噪声统计特性一般是未知的或时变的，结合带过程噪声方差估计器的自适应 UKF 算法，提出了针对过程噪声空间的自适应分裂合并无迹高斯和滤波算法，在不同噪声条件下进行初始对准仿真试验，仿真结果表明该算法在方位失准角的估计上比标准 UKF 收敛快，稳态误差小，水平失准角的精度会略微下降，在精对准的控制范围内，总体性能优于 UKF。

3. 研究了 H_{∞} UKF 算法，该算法用 UT 变换较少了线性化误差，并降低恶劣条件下系统模型和噪声不确定性对滤波性能的影响，详细推导了 H_{∞} UKF 与 UKF 的关系，加深对 H_{∞} UKF 的理解，推导了 H_{∞} UIF 算法，对比 UIF 和 UKF 平滑滤波的关系，得到 H_{∞} UKF 的平滑算法，平滑 H_{∞} 类滤波在鲁棒界内的振荡，初始对准仿真结果表明在方位失准角的估计上 H_{∞} UKF 比 UKF 收敛速度快，滤波精度高，但 H_{∞} UKF 牺牲了水平对准的精度。针对 H_{∞} UKF 的不足，提出了 UKF/ H_{∞} UKF 混合滤波算法。仿真试验表明混合滤波算法，改善了 H_{∞} UKF 的性能。

4. 研究了 GPF，利用 QMC 采样的点集比 MC 的分布均匀、偏差小的优点，并在点集的生成算法中适当引入随机化消除不同样本间的相关性，提出了 RQMC-GPF 算法。相同条件下 QMC 积分精度高于 MC，仿真结果表明相同条件下，不同噪声环境中 RQMC-GPF 均比 GPF 收敛速度快、稳态误差小，在滤波性能上 RQMC-GPF 优于标准 UKF，但计算复杂度高，限制其实际应用。GPF 算法的关键之一是重要性函数的

选择, 而 CKF 比 UKF 计算负担小、精度相当, 采用 CKF 来获取 GPF 的重要性函数, 提出了 CGPF, 该算法具有 GPF 所具有的免重采样的优点, 且计入最新的测量信息可以克服权值退化的问题, 且进一步改善了 GPF 的实时性, 在两种噪声的晃动基座初始对准仿真中, 在失准角的估计上比 GPF、UKF 收敛速度快且稳态误差小, 且比 GPF 更接近于实际应用。

5. 选取 UKF、ASMUGSF、UKF/ H_{∞} UKF、CGPF 结合惯性凝固粗对准方法, 对干扰车载基座的激光陀螺捷联惯导系统进行初始对准试验研究。相对于 3 种解析式粗对准法, 惯性凝固粗对准法在干扰下仍能保持较高的精度, 达到精对准的要求。详细分析了 3 组共 30 段有干扰的实际试验数据的精对准结果, 在收敛速度、对干扰的抑制上, CGPF 略优于 ASMUGSF, 两者的单位位置重复精度相当, 在这 3 方面两者均优于 UKF。UKF/ H_{∞} UKF 在精对准开始时收敛快, 50s 后收敛变慢, 且方差较大, 后 50s 的性能有待提高。

本文的主要创新点如下:

1. 应用带噪声估计器的 AUKF 到晃动基座初始对准中, 通过两种噪声模型的仿真试验验证了该算法的稳态精度和收敛速度优于 UKF。

2. 提出了 ASMUGSF 算法, 通过晃动基座仿真试验和实际干扰车载基座试验验证了算法的性能, 该算法的稳态精度和收敛速度均优于 UKF。

3. 提出了 UKF/ H_{∞} UKF 算法, 通过晃动基座仿真试验和实际干扰车载基座试验验证了算法的性能, 试验结果表明该算法部分性能优于 UKF。

4. 提出了 RQMC-GPF 算法, 通过两种噪声模型的晃动基座仿真试验验证了该算法的稳态精度和收敛速度优于 GPF、UKF。

5. 提出了 CGPF 算法, 通过晃动基座仿真试验和实际干扰车载基座试验验证了算法的性能, 仿真试验中稳态精度和收敛速度优于 UKF 和 GPF, 干扰车载基座试验中稳态精度和收敛速度优于 UKF。

在论文研究内容的基础上, 还可以做以下几方面的深入研究:

1. 论文提出的高斯和滤波算法, 仅限于过程噪声空间, 但高斯和滤波算法不仅限于此, 可适当加入过程空间、测量空间及测量噪声空间的高斯混合模型, 完善算法内容, 并可将此算法应用到组合导航的非线性估计中。

2. 仿真中 H_{∞} UKF 及其混合滤波牺牲水平失准角估计精度, 可在降低水平失准角稳态误差上做深入研究, 且论文推导的平滑算法, 更适于捷联导航系统的估计, 鉴于

H_∞ UKF 的鲁棒性，可扩大 H_∞ UKF 的应用范围。

3. 针对论文提出的两种 GPF 的实际应用问题，研究其并行实现的实时技术，实现其对应的 Verilog 代码，借助灵活的 FPGA 或专用 IC 技术，以期应用在实际工程中。

4. 针对本文提出的算法，今后补充需摇摆转台初始对准试验及晃动车载基座初始对准试验，解决大风、人为等晃动下初始对准的问题。

参考文献

- [1]Malladi K M, Kumer R V R, Rao K V. A Gauss-Markov model formulation for the estimation of ARMA model of time-varying signals and systems [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998,; 657-660.
- [2]Andria G, Salvatore L. Inverter drive signal processing via DFT and EKF[J]. Electric Power applications, 1970, 137(2): 111-119.
- [3]Wan E A, Nelson A T. Removal of noise from speech using the dual EKF algorithm[C]. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 1998, 1: 381-384.
- [4]Orton M, Marrs A. A Bayesian approach to multi-target tracking and data fusion with out-of-sequence measurements[J]. IEEE Target Tracking: Algorithm and Application, 2001, 1(1): 1-5.
- [5]Wang Yali. Bearings-Only Maneuvering Target Tracking Based on STF and UKF[C]. International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering, 2008: 295-299.
- [6]Khairnar D G, Nandakumar S, Merchant S N. Nonlinear Target Identification and Tracking Using UKF[C]. IEEE International Conference on Granular Computing, 2007: 761-764.
- [7]周露平, 王智灵, 陈宗海. 基于 M-估计的 UKF 算法及其在运动估计中的应用[J]. 模式识别与人工智能, 2007, 20(6): 849-854.
- [8]Iltis R A. A tracking mode receiver for joint channel estimation and detection of asynchronous CDMA signals[C]. Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signals Systems, and Computers, 1999, 2: 998-1003.
- [9]Bucy R S. Nonlinear filtering[M]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1970.
- [10]Zhengfang Zhang, Jianghua Feng. Sensorless control of salient PMSM with EKF of speed and rotor position[C]. International Conference on Electrical Machines and Systems, 2008: 1625-1628.
- [11]万德钧, 房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京: 东南大学出版社, 1998.
- [12]邓自力. 最优滤波理论及其应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000.
- [13]Tanizaki H. Nonlinear filters: Estimation and Applications[M]. Springer, 1996.
- [14]Nørgaard M, Poulsen K N, Ravn O. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2000, 36(8): 1627-1638.

- [15]柴霖, 袁建平, 罗建军. 非线性估计理论的最新进[J]. 宇航学报, 2005, 26(3): 380-384.
- [16]杨小军, 潘泉, 王睿. 粒子滤波进展与展望[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 261-267.
- [17]胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.
- [18]黄德鸣. 惯性技术神奇的指路魔杖[M]. 济南: 山东教育出版社, 2001.
- [19]刘瑞华. 基于 MEMS-IMU 的捷联惯性组合导航系统研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2002.
- [20]陈兵舫, 张育林. 惯导系统初始对准误差模型研究[J]. 上海航天, 2001, 6: 4-8.
- [21]谷宏强, 袁亚雄, 李斌. 捷联惯导系统快速自对准误差模型的建立[J]. 火力与指挥控制, 2008, 33(12): 137-139.
- [22]丁国强, 周卫东, 郝燕玲. 传递对准误差模型及其 QCDKF 算法[J]. 华中科技大学学报, 2010, 38(8): 89-94.
- [23]戴邵武, 李娟, 戴洪德, 周绍磊, 陈明. 一种快速传递对准方法的误差模型研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(3): 942-946.
- [24]徐晓苏, 孙学慧, 扶文树. 弹载捷联惯导系统快速两位置自对准[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(2): 139-142.
- [25]周广涛, 陈明辉, 刘星伯, 孙佳. 新的两位置组合对准方法研究[J]. 传感器与微系统, 2008, 27(2): 17-20.
- [26]王艳东, 范跃祖. 捷联惯导系统多位置对准仿真研究[J]. 计算机仿真, 2001, 18(2): 21-23.
- [27]王新龙, 申功勋. 一种快速精确的惯导系统多位置初始对准方法研究[J]. 宇航学报, 2002, 23(4): 81-84.
- [28]马建军, 郑志强. 基于插值非线性滤波的 SINS 静基座初始对准[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(12): 2783-2789.
- [29]严恭敏, 秦永元. 捷联惯导系统静基座初始对准精度分析及仿真[J]. 计算机仿真, 2006, 23(10): 36-40.
- [30]谢波, 裴昕国, 万彦辉. 捷联惯导系统动基座初始对准研究[J]. 弹箭与制导学报, 2004, 24(4): 267-56.
- [31]郭龙, 刘洁瑜. 强跟踪滤波在捷联惯导动基座初始对准中的应用[J]. 弹箭与制导学报, 2008, 28(5): 37-40.
- [32]正梅, 程向红, 万德钧. 模糊卡尔曼滤波器在初始对准抗野值修正中应用[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13(6): 18-20.
- [33]范科, 赵伟, 陈达立, 刘建业. 自适应滤波算法在捷联惯导初始对准中的应用研究[J]. 战术导

弹技术, 2009, (1): 70-74.

[34]裴福俊, 居鹤华, 崔平远. 基于 Kalman/UKF 组合训练神经网络的初始对准方法, 2008, 20(23): 6494-6497.

[35]王新龙, 申功勋, 唐德麟. 适于惯导系统初始对准的神经网络实时算法研究[J]. 航天控制, 2002, 2: 45-52.

[36]谢波, 裴听国, 万彦辉. 捷联惯导系统动基座初始对准中的可观测性分析[J]. 战术导弹技术, 2004, (4): 58-65.

[37]房建成, 周锐, 祝世平. 捷联惯导系统动基座对准的可观测性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 1999, 25(6): 714-719.

[38]Wei Chun Ling, Zhang Hong Yue. SINS in-Flight Alignment Using Quaternion Error Models[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2001, 14(3): 167-170.

[39]陈拯民. RVE, AQE 误差模型在 SINS 动基座对准中的应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.

[40]马建军, 郑志强. 数字罗盘辅助实现 MIMU 静基座初始对准[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(10): 2260-2263.

[41]熊剑, 刘建业, 赖际舟, 钱伟行. 一种陀螺量测信息辅助的快速初始对准方法[J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1455-1459.

[42]Anderson B, Moore J. Optimal Filtering[M]. Prentice Hall, 1979.

[43]Van Trees H L. Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I[M]. John Wiley, 1968.

[44]Gauss K F. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium[M]. Hamburg, 1809: 5-20.

[45]Fisher A R. On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves[J]. Messenger of Math, 1917, 41: 44-1555. .

[46]Kolmogorov A N. Interpolation and Extrapolation Von Stationaren Zufalligen Folgen[J]. Bull, Acad. Sci. USSR, Ser, Math, 1941, 5: 3-14.

[47]Wiener N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series[R]. OSRD 370, Report to the Services 19, Research Project DIC6037, MIT, 1942: 62-74.

[48]Kalman R E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem[J]. Journal of Basic Eng (ASME), 1960, 80: 35-46.

[49]Kalman R E. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory[J]. Journal of Basic Eng (ASME), 1960, 83: 95-108.

- [50]Blum R H. A Stagewise Parameter Estimation Procedure for Correlated Data[J]. Numer Math, 1961, 3: 202-208.
- [51]Battin R H. A Statistical Optimizing Navigation Procedure for Space Flight[J]. ARSJ, 1962, 32: 1681-1696.
- [52]Kalman R E. New Methods in Wiener Filtering Theory[M]. John&Sons Inc, 1963.
- [53]Bierman G J. Sequential Square Root Filtering and Smoothing of Discrete Linear Systems[J]. Automatica, 1974, 10: 147-158.
- [54]Carsion N A. Fast Triangular Factorization of the Square Root Filter[J]. AIAA Journal, 1973, 11(3): 1259-1265.
- [55]Schmidt S F. Computational Techniques in Theory and Applications of Kalman Filtering[R]. NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDOGRAPH 139, 1970.
- [56]Speyer J L. Measurement Updating Using the U-D Factorization[J], Automatica, 1976, 12(3): 375-382.
- [57]Speyer J L. Computation and Transmission Requirements for a Decentralized Linear Quadratic Gaussian Control Problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1979, 24(2): 266-269.
- [58]Willsky A S, Bello M G, Castanon D A. Combining and Updating of Local Estimates and Regional Maps along Sets of One-Dimensional Tracks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1982, 27(4): 799-813.
- [59]Bierman G J, Belzer M R. A Decentralized Square Root Information Filter/Smoothen[C]. In Proceedings of the 24 th IEEE Conference on Decision and Control. Ft. Lauderdale, FL, 1985(12): 1902-1905.
- [60]Kerr T H. Decentralized Filtering and Redundancy Management for Multi-Sensor Navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electric. 1987(5), 23(1): 83-119.
- [61]Carlson N A. Federated Square Root Filters for Decentralized Parallel Processes[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electric, 1990, 26(3): 517-524.
- [62]Sage A P, Husa G W. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics[C]. Joint American Control Conference. America, 1969, 1: 769-774
- [63]Oshman Y, Bar-Itzhack I Y. Square Root Filtering via Covariance and Information Eigenfactors[J]. Automatica. 1986, 22(5): 599-604.
- [64]Friedland B. Separate-Bias Estimation and some Application in Control and Dynamic Systems[J].

Academic Press, 1983, 20: 1-46.

[65]Jazwinski A H, Roberts R A. Limited Memory Optimal Filtering[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, 135: 558-563.

[66]Doob J L. Stochastic Processes[M]. John Wiley & Sons, 1953.

[67]Jazwinski A H. Stochastic Processes and Filtering Theory[M]. Academic Press, 1970.

[68]Ho Y C, Lee R C K. A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1964, 9(1): 333-339.

[69]Sorenson A, Alspach D. Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sums Approximations[J]. Automatica. 1971, 7(2): 465-479.

[70]Kushner H J. Dynamical Equations for Optimum Nonlinear Filtering[J]. Journal of Differential Equations, 1967, 26(3): 179-190.

[71]Maybeck P S. Stochastic Models Estimation and Control[M]. Academic, 1982.

[72]Jazwinski A H. Stochastic Processes and Filtering Theory[J]. American Science, 1992, 80(2): 128-141.

[73]Pachter M, Chandler P R. Universal Linearization Concept for Extended Kalman Filters[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 1993, 29(3): 946-961.

[74]MERWE R V, Doucet A, The Unscented Particles Filter[R]. Technical Report CUED/FINFENG/TR 380, 2000.

[75]Hue C, Perez P. Sequential Monte Carlo Method for Multitarget Tracking and Data Fusion[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2002, 50(2): 309-325.

[76]Djuric P M, Joon C H. An MCMC Sampling Approach to Estimation of Nonstationary Hidden Markov Models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(5): 1113-1123.

[77]Tierney I, Mira A. Some Adaptive Monte Carlo Methods for Bayesian Inference[J]. Statistics in Medicine, 1999, 118(2): 2507-2515.

[78]Deok J L. Nonlinear Bayesian Filtering with Applications to Estimation and Navigation[D]. Texas A&M University, 2005.

[79]Sunahara Y. An Approximate Method of State Estimation for Nonlinear Dynamical Systems[C]. Joint Automatic Control Conference. Colorado, 1969.

[80]Bucy R S, Renne K D. Digital Synthesis of Nonlinear Filter[J], Automatica, 1971, 7(3): 287-289.

[81]Jazwinski A H. Filtering for Nonlinear Dynamical Systems[J]. IEEE Transactions On Automatic

Control, 1966, 11: 765-766.

[82]Henrikson R. The Truncated Second-order Nonlinear Filter Revisited[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27: 217-251.

[83]Wishner R P, Tabaezyski J A. Comparison of Three Nonlinear Filters[J], Automatica, 1969: 457-496.

[84]Song T L. The Modified Gain Extended Kalman Filter and Parameter Identification in Linear System[J]. Automatica, 1986, 22(1): 59-75.

[85]Fisher L. Factorized Extended Kalman Filter[C]. Proceedings of SPIE. San Diego, 1985: 119-129.

[86]Ruokonen T. Failure Detection Performance Analysis of the Optimal Nonlinear Filter for Identification Problem[C]. Proceedings of American Control Conference. Chicago, IFAC, 1989: 876-878.

[87]Algrain M C, Saniie J. Interlaced Kalman Filtering of 3-D Angular Motion Based on Euler's Nonlinear Equations[J]. IEEE Transactions on AES, 1994, 30(1): 175-185.

[88]Ruth A. Satellite Angular Rate Estimation from Vector Measurements[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1998, 21(3): 450-457.

[89]杨元喜, 徐天和. 基于移动开窗法协方差估计和方差分量估计的自适应滤波[J]. 武汉大学学报, 2003, 28(6): 714-718.

[90]崔先强. 噪声协方差阵加权估计的 Sage 自适应滤波[J]. 测绘科学, 2002, 27(2): 26-30.

[91]刘广军, 吴小平, 郭晶. 次优 Sage 滤波器发散的综合抑制[J]. 信息工程大学学报, 2002, 3(1): 43-45.

[92]Yoshimura T, Sueda T. A Technique for Compensating the Filter Performance by a Fictitious Noise[J]. IEEE Transactions on ASME, 1978, 100(2): 154-156.

[93]Schei T S. A Finite-difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms[J]. Automatica, 1997, 33(11): 2053-2058.

[94]Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Advances in Derivative Free State Estimation for Nonlinear Systems[R]. Technical Report IMM/REP15, 2000.

[95]Julier S, Uhlmann J K, Durrant W H F. A New Approach for Filtering Nonlinear System[C]. Proceeding of the American Control Conference. Seattle, WA, USA, 1995: 1628-1632.

[96]Julier S, Uhlmann J K, Durrant W H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3):

477-482.

[97]Julier S, Uhlmann J K. Unscented Filter and Nonlinear Estimation[C]. Proceeding of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.

[98]Julier S, Uhlmann J K. A New Extension of Kalman Filter to Nonlinear Systems[C]. In Proc. of AeroSense: The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls. Orlando, FL, 1997.

[99]Tenne D, Singh T. The Higher Order Unscented Filter[C]. In Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, CO, 2003.

[100]Wu Y X, Hu D W, Wu M P. A numerical-integration perspective on Gaussian Filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(8): 2910-2921.

[101]Jenkaran A, Simon H, Robert J E. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature[C]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953-977.

[102]Jenkaran A, Simon H. Cubature Kalman Filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.

[103]Gordon N, Salmond D. Novel Approach to Non-linear and Non-Gaussian Bayesian State Estimation[C]. Proceedings of Institute Electric Engineering, 1993, 140(2): 107-113.

[104]Zariskii V S, Svetnik V B, Shimelevich L I. Monte Carlo Techniques in Problems of Optimal Information Processing[J]. Automation and Remote Control, 1975, 3(3): 2015-2022.

[105]Pitt M, Shephard N. Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters[J]. Journal of the American Statistical Association, 1999, 94(446): 590-599.

[106]Merwe R V, Doucet A. The Unscented Particle Filter.Advances in Neural Information Processing Systems[M]. MIT, 2000.

[107]Rudolph M, Doucet A.The Unscented Particle Filter[R]. Engineering Department, Cambridge University, 2000.

[108]Jayesh H K, Petar M J. Gaussian Particle Filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(10): 2592-2601.

[109]Jayesh H K, Petar M J. Gaussian Sum Particle Filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(10): 2602-2612.

[110]Bolic M, Athalye A, Djuric P M, Hong S. Algorithmic modification of particle filters for hardware implementation[C]. Proc. of the European Signal Processing Conference. Vienna, Austria, 2004:

1641-1646.

[111]Yang Dongkai, Zhou Xinli. U-GPF information fusion algorithm for GPS/DR integrated positioning system[C]. International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Hong Kong, China, IEEE, 2007: 1424-1427.

[112]程水英, 张剑云. 基于无味高斯粒子滤波的空-海 BO-TMA 的研究[J]. 现代雷达, 2007, 29(8): 68-71.

[113]Grimble M J. H_{∞} Design of Optimal Linear Filters[C]. Proc. 1987 MTNS. Phoenix, Arizona, 1987.

[114]Einicke G, White L. Robust extended Kalman filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999. 47(9): 2596-2599.

[115]Shaked U, Berman N. nonlinear filtering of discrete-time processes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(9): 2205-2209.

[116]侯代文. 非线性滤波及其在说话人跟踪中的应用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2008.

[117]向礼. 非线性滤波方法在导航系统中的应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.

[118]Dmitriyev S P, Stepanov O A, Shepel S V. Nonlinear Filtering Methods Application in INS Alignment[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1997, 33(1): 260-271.

[119]Yu M J, Lee J G, Park H W. Comparison of SDINS in-flight Alignment using Equivalent Error Models[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1999, 35(3): 1046-1054.

[120]王丹力, 张洪钺. 惯导系统初始对准的非线性滤波算法[J]. 中国惯性技术学报, 1999, 7(3): 17-21,46.

[121]陈兵舫, 张育林, 杨乐平. H_{∞} 鲁棒滤波在惯导初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2000, 8(4): 58-62.

[122]周战馨, 高亚楠, 陈家斌. 基于无轨迹卡尔曼滤波的大失准角 INS 初始对准[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(1): 173-175.

[123]丁杨斌, 王新龙, 申功勋. Unscented 卡尔曼滤波在 SINS 静基座大方位失准角初始对准中的应用研究[J]. 宇航学报, 2006, 27(6): 1201-1204.

[124]张红梅, 邓正隆. 一种新的惯性导航初始对准滤波方法[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13(1): 1-4.

[125]丁杨斌, 申功勋. Unscented 粒子滤波在静基座捷联惯导系统大方位失准角初始对准中的应用研究[J]. 航空学报. 2007, 28(2): 397-401.

- [126]熊凯, 张洪钺. 粒子滤波在惯导系统非线性对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2003, 11(6): 20-26.
- [127]Doucet A, Fretas J F G, Gordon N. Introduction to Sequential Monte Carlo Methods[M]. Sequential Monte Carlo Methods in Practice, Springer-verlag, 2000.
- [128]夏家和, 秦永元, 游金州. 摇摆状态下基于非线性误差模型的惯导对准研究[J]. 宇航学报, 2010, 31(2): 410-415.
- [129]周菊花, 程向红. 简化 UKF 在 SINS 摇摆基座上的初始对准[J]. 弹箭与制导学报, 2009, 29(3): 65-68.
- [130]秦永元. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社, 2006 年 5 月.
- [131]Kau C J, Jiang Y F, Lin L P. Error estimation of INS ground alignment through observability analysis[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(1): 92-97.
- [132]于飞, 翟国富, 高伟, 李倩. 舰船捷联惯导系统粗对准方法研究[J]. 传感器与微系统, 2009, 28(5): 15-18.
- [133]Gu D G, Sheimy N E, Hassan T. Coarse alignment for marine SINS using gravity in the inertial frame as a reference [C]. IEEE Position, Location and Navigation Symposium, 2008: 961-965.
- [134]Kaminski P G, Bryson A E, Schmidt S F. Discrete Square Root Filtering: A Survey of Current Techniques[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, 16(6): 727-735.
- [135]赵琳, 王小旭, 薛红香, 夏全喜. 带噪声统计估计器的 Unscented 卡尔曼滤波器设计[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1483-1488.
- [136]Jargani L, Shahbazian M, Salahshoor K, State Estimation of Nonlinear Systems Using Novel Adaptive Unscented Kalman Filter[C], International Conference on Emerging Technologies. Islamabad, October 2009: 124-129.
- [137]Faubel F, Klakow D, The split and merge unscented Gaussian mixture filter[J]. IEEE Signal Process Letter, 2009, 16(9): 786-789.
- [138]Faubel F, Geogres M. Robust Gaussian Mixture Filter Based Mouth Tracking in a Real Environment[C]. Visual Computing Research Conference. Saarbrücken, Dec, 2009.
- [139]付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman 滤波理论及其在惯导系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [140]Gelb A. Applied Optimal Estimation[M]. Massachusetts: MIT Press, 1974.
- [141]Deok Jin Lee. Nonlinear Estimation and Multiple Sensor Fusion Using Unscented Information

- Filtering[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 861-864.
- [142]Wenling Li, Yingmin Jia. H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform[J]. Signal Processing, 2010, 90: 3301-3307.
- [143]Terejanu G, Singh T, Scott P D. Unscented Kalman Filter/Smoother for a CBRN puff-based dispersion model[C]. 2007 10th International Conference on Information Fusion. Quebec, 2007: 1-8.
- [144]Psiaki M L, Wada M, Derivation and Simulation Testing of a Sigma-Points Smoother[J]. Journal of Guidance, Control, 2007, 30(1): 78-86.
- [145]Lin G H, Xu H F, Masao F. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo sampling methods for a class of stochastic mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2008, 67(3): 423-441.
- [146]Carlin B P, Polson N G, D S Stoffer. A Monte Carlo Approach to Non-normal and Non-linear State-space Modeling[J]. Journal of the American Statistical Association, 1992, 87(418): 493-500.
- [147]Stuckmeier J. Fast generation of low-discrepancy sequences[J]. Computer Applied Mathematics, 1995, 61: 29-41.
- [148]Fang K T, Wang Y. Number Theoretic Methods in Statistics[M]. New York: Chapman & Hall, 1994.
- [149]Dong Guo, Xiaodong Wang. Quasi Monte Carlo Filtering in Nonlinear Dynamic Systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2087-2098.
- [150]武元新, 对偶四元数导航算法与非线性高斯滤波研究[D]. 国防科学技术大学, 2005.
- [151]Hong S, Djuric P M, Bolic M. Simplifying Physical Realization of Gaussian Particle Filters with Block Level Pipeline Control[J], MEURASIP Journal of Applied Signal Processing, 2005, 4: 575-585.
- [152]侯代文. 非线性滤波及其在说话人跟踪中的应用研究[D], 大连: 大连理工大学, 2008
- [153]魏春岭, 张洪钺. 捷联惯导系统粗对准方法比较[J]. 航天控制, 2000, 3: 16-21.
- [154]吕少麟, 谢玲. 晃动基座下激光陀螺捷联导航系统初始对准的预滤波[J]. 光学精密工程, 2009, 17(10): 2520-2527.

攻读学位期间发表论文与研究成果清单

- [1] Wang Jun-Hou, Chen Jia-Bin. ADAPTIVE UNSCENTED KALMAN FILTER FOR INITIAL ALIGNMENT OF STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS[C]. 2010 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. QingDao, China, 2010: 1384-1389 (EI: 20104613374872).
- [2] Wang Jun-Hou, Chen Jia-Bin. An adaptive split and merge unscented Gaussian sum filter for initial alignment of SINS[C]. 22010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Xi' an, China, 2010: 1892-1897 (EI: 20104813423759).
- [3] Wang Jun-Hou, Song Chun-Lei, Yao Xing-Tai, Chen Jia-Bin. Sigma point H-infinity filter for initial alignment in marine strapdown inertial navigation system[C]. Proceedings of the 2010 2nd International Conference on Signal Processing Systems. DaLian, China, 2010: V1580-V1584 (EI: 20104013270521).
- [4] Wang Jun-Hou, Song Chun-Lei, Chen Jia-Bin. A novel Gaussian particle filter based on randomized quasi Monte Carlo for initial alignment in SINS[C]. 2010 IEEE International Conference on Information and Automation. Harbin, China, 2010: 1245-1250 (EI: 20103413171668).
- [5] Wu Weisheng, Song Chunlei, Wang Junhou. Cubature Gaussian particle filter for initial alignment of strapdown inertial navigation system[C]. 2010 1st International Conference on Pervasive Computing, Signal Processing and Applications. Harbin, China, 2010: 1196-1200 (EI: 20105213521092).
- [6] Sun Shoucai, Song Chunlei, Wang Junhou. Central difference Gaussian Particle filter for initial alignment of strapdown inertial navigation system[C]. Proceedings of 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing. DaLian, China, 2010: 97-101 (EI: 20104813424787).

致谢

本论文是在导师陈家斌教授的精心指导下完成的，自论文的选题到各章中若干重要问题的研究都倾注了陈老师的智慧和心血。导师渊博的知识、敏锐的洞察力以及富有启发性的分析使我受益匪浅，导师严谨认真的治学作风和勤奋创新的工作态度使我备受鞭策，也是我今后人生学习的楷模。在攻读博士学位论文期间，不仅给我提供了优越舒适的学习和科研环境，而且在学习、工作和生活中给予了无私的帮助。在此，谨向我最尊敬的陈家斌教授致以最由衷的感谢和敬意！

在我的课题研究过程中，定位定向导航教研室的全体老师和同学在我攻读博士学位期间给予了许多无私的帮助和支持。在此向宋春雷老师、谢玲研究员、李磊磊老师、徐建华老师、刘星桥老师、思考老师表示深深的感谢。

感谢实验室赵敦慧博士、王勇博士、韩永强博士等在学习上和生活上给予的帮助和支持！尤其是王勇博士对于我的课题研究提出了很多建设性的建议，给予了我很多无私帮助，在此表示深深的谢意。

衷心感谢我的父母，多年来他们在生活上、精神上给予我极大的关心、鼓励和帮助，是他们在我最困难的时候给予我极大的支持，使得我顺利完成学业。在此我衷心地祝愿他们身体健康、一生幸福平安！

最后，作者由衷感谢各位尊敬的学界前辈在百忙之中评阅论文，感谢你们对我提出的宝贵意见和建议！