

卡尔曼滤波器参数分析与应用方法研究

王学斌¹ 徐建宏¹ 张章²

¹(北京北方计算中心 北京 100091)

²(信息工程大学信息工程学院 河南 郑州 450002)

摘要 介绍卡尔曼滤波器及其各种衍生方法。首先给出卡尔曼滤波器的算法流程以及所有参数的含义,并对影响滤波效果的五个主要参数进行了讨论。然后通过仿真实验研究不同的参数取值对于卡尔曼滤波的影响。最后总结在不同应用场景下使用卡尔曼滤波器的宗旨和要点。

关键词 卡尔曼滤波器 自适应卡尔曼 扩展卡尔曼

中图分类号 TP391.9 文献标识码 A

ON ANALYSIS AND APPLICATION APPROACH FOR KALMAN FILTER PARAMETERS

Wang Xuebin¹ Xu Jianhong¹ Zhang Zhang²

¹(North Computing Center Beijing 100091 China)

²(Zhengzhou Information Science and Technology Institute Zhengzhou 450002 Henan China)

Abstract Kalman filter and its derivative approaches are introduced in this paper. At first, the algorithmic process of Kalman filter and all the parameters are presented. Then five important parameters affecting the filtering effect are discussed. By means of simulative experiment, the impacts of different parameter's values on Kalman filter are studied. In the end, the purpose and the key points of the use of Kalman filter in different application scenes are concluded.

Keywords Kalman filter Adaptive Kalman Extended Kalman

0 引言

卡尔曼滤波器是由卡尔曼在 1960 年提出的一种最优线性状态估计方法^[1]。所谓状态估计,即通过数学方法寻求与观测数据最佳拟合的状态向量^[2]。卡尔曼滤波器是目前应用最广泛的状态估计方法之一,常常被用于通信、雷达、导航、自动控制等领域,例如航天器的轨道计算、机动目标跟踪、GPS 导航定位和生产环境自动监控。卡尔曼滤波器最大的优点是采用递归的方法来解决线性滤波的问题,它只需要当前的测量值和前一个采样周期的估计值就能够进行状态估计。由于这种递归方法不需要大量的存储空间,每一步的计算量小,计算步骤清晰,非常适合计算机处理,因此卡尔曼滤波受到了普遍的欢迎,在各种领域具有广泛的应用前景。

本文介绍了卡尔曼滤波器及其各种衍生方法,讨论了算法中各种参数的取值对于卡尔曼滤波的影响,总结了在不同应用场景下使用卡尔曼滤波器的宗旨和要点,可帮助研究者和工程人员全面了解和正确使用卡尔曼滤波器,对于如何应用卡尔曼滤波器解决不同领域中的现实问题具有一定的指导意义。

1 卡尔曼滤波器简介

1.1 问题描述

卡尔曼滤波器用于估计离散时间过程的状态变量 $x \in$

\mathcal{R}^n 。该离散时间过程由以下离散随机差分方程描述:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

其中 n 维向量 x_k 为 k 时刻的系统状态变量, n 维向量 x_{k-1} 是 $k-1$ 时刻的系统状态变量。 A 被称为状态转移矩阵(或称增益矩阵),是 $n \times n$ 阶的方阵。 A 将过去 $k-1$ 时刻状态和现在的 k 时刻状态联系起来。 $n \times l$ 阶矩阵 B 代表可选的控制输入 $u \in \mathcal{R}^l$ 的增益,在很多实际情况下并没有控制增益,因此实际中这一项常常为 0。 w_{k-1} 是 n 维向量,代表过程激励噪声,它对应了 x_k 中每个分量的噪声,是期望为 0,协方差为 Q 的高斯白噪声。

定义观测变量 $z \in \mathcal{R}^m$,得到量测方程:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

其中观测值 z_k 是 m 阶向量,状态变量 x_k 是 n 阶向量。 H 是 $m \times n$ 阶矩阵,代表状态变量 x_k 对测量变量 z_k 的增益。观测噪声 v_k 是期望为 0,协方差为 R 的高斯白噪声。

1.2 卡尔曼滤波算法

卡尔曼滤波算法有两个基本假设:(1) 信息过程的足够精确的模型,是由白噪声所激发的线性(也可以是时变的)动态系统;(2) 每次的测量信号都包含着附加的白噪声分量^[3]。当满足以上假设时,可以应用卡尔曼滤波算法。

卡尔曼滤波算法分为两步:首先使用滤波器根据上一时刻

($k - 1$ 时刻) 的后验估计值来估计当前时刻(k 时刻) 的状态, 得到 k 时刻的先验估计值; 然后使用当前时刻的测量值来更正这个估计值, 得到当前时刻的后验估计值。因此卡尔曼滤波器分为时间更新方程和测量更新方程。

时间更新方程根据前一时刻的状态估计值推算当前时刻的状态变量先验估计值和误差协方差先验估计值; 测量更新方程负责将先验估计和新的测量变量结合起来构造改进的后验估计。时间更新方程和测量更新方程也被称为预测方程和校正方程。因此卡尔曼算法是一个递归的预测—校正方法。

卡尔曼滤波器时间更新方程如下:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (3)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (4)$$

卡尔曼滤波器状态更新方程如下:

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R} \quad (5)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (6)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (7)$$

以上五个公式就是卡尔曼滤波算法的全部描述。下一节将详细介绍公式中所有的参数含义。

1.3 参数介绍

\hat{x}_{k-1} 和 \hat{x}_k : 分别表示 $k - 1$ 时刻和 k 时刻的后验状态估计值, 是滤波的结果之一。

\hat{x}_k^- : k 时刻的先验状态估计值, 是滤波的中间计算结果。

P_{k-1} 和 P_k : 分别表示 $k - 1$ 时刻和 k 时刻的后验估计协方差, 是滤波的结果之一。

P_k^- : k 时刻的先验估计协方差, 是滤波的中间计算结果。

H : 量测矩阵, 它负责将 m 维的测量值转换到 n 维, 使之符合状态变量的数学形式, 是滤波的前提条件之一。

z_k : 测量值, 是滤波的输入。

K_k : 滤波增益阵, 是滤波的中间计算结果。

A : 状态转移矩阵, 实际上是对目标状态转换的一种猜想模型。例如在机动目标跟踪中, 状态转移矩阵常常用来对目标的运动建模, 其模型可能为匀速直线运动或者匀加速运动。当状态转移矩阵不符合目标的状态转换模型时, 滤波会很快发散。

Q : 过程激励噪声协方差。该参数被用来表示状态转移矩阵与实际过程之间的误差。因为我们无法直接观测到过程信号, 所以 Q 的取值是很难确定的, 下文中将详细研究该问题。

R : 测量噪声协方差。滤波器实际实现时, 测量噪声协方差 R 一般可以观测得到, 是滤波器的已知条件。

2 参数分析与研究

除去一些确定的因素和中间值, 影响滤波的主要有五个因素:

- 初始的状态变量 x_0 。
- x_0 的协方差 P_0 。
- 状态转移矩阵 A 。
- 过程激励噪声协方差 Q 。
- 测量噪声协方差 R 。

其中, 初始的状态变量影响最小, 可以直接取值为第一个测量值, 在滤波可以收敛的情况下会很快收敛。下文重点研究后面四个因素。

首先给出一个用以研究的例子, 下面的研究都以该例子作为研究对象: 假设一个机动目标的状态变量为 $X(k) = [x(k) \quad \dot{x}(k) \quad \ddot{x}(k)]^T$, 其中第一项为 k 时刻的位置(假设为单维坐标轴上的位置, 对于多维坐标可以对每一维进行单独滤波后合成), 第二项为速度, 第三项为加速度; 假设雷达仅能观测目标的位置, 则量测矩阵 $H(k) = [1 \ 0 \ 0]$ 。物体的状态初始值为 $[0 \ 3 \ 1]$, 即位置坐标为 0, 速度为 3, 加速度为 1。物体以加速度 1 做了 50 个周期的匀加速运动, 每个观测的间隔为 1。观测误差为期望 0, 方差 50 的高斯白噪声。

2.1 初始协方差矩阵的研究

为研究初始协方差矩阵对滤波效果的影响, 我们首先随意指定一个协方差矩阵, 然后通过扩大和缩小该值来观察滤波效果。假设初始协方差矩阵为:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

分别以 $0.1 * P_0$ 、 P_0 、 $10 * P_0$ 、 $100 * P_0$ 和 $1000 * P_0$ 为初始协方差矩阵进行滤波, 结果如表 1、图 1 所示。

表 1 初始协方差矩阵滤波误差表

滤波参数	均方误差	与测量值均方误差的比率
0.1P	20.59	54.50%
P	22.88	60.54%
10P	24.25	64.16%
100P	24.45	64.70%
1000P	24.48	64.77%
测量值	37.79	100%

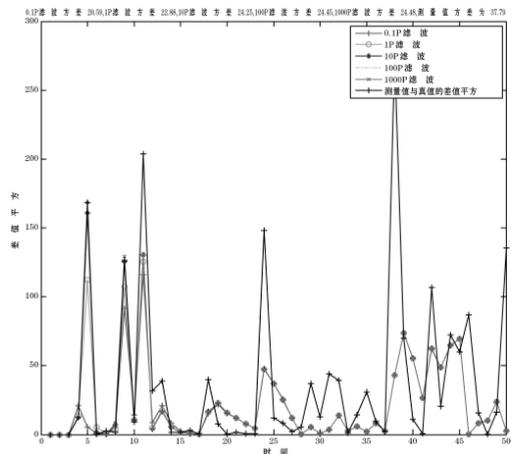


图 1 初始协方差矩阵对滤波的影响效果图

结论如下: 只要不为零, 初始方差矩阵的取值对滤波效果影响很小, 都能很快收敛。

2.2 状态转移矩阵的研究

所谓状态转移矩阵, 是将目标从 $k - 1$ 状态转移到 k 状态的一个矩阵。这实际上是根据经验对下一个时间周期目标状态的一种预测。在某些情况下, 这种预测是确定的, 而另一些情况下, 这种预测是未知的。

(1) 状态转移确定时

卡尔曼滤波有时也被分为标量卡尔曼滤波和向量卡尔曼滤波。标量卡尔曼滤波常常被用来测量一个标量值, 例如某个时刻某容器的温度、湿度等。此时 A 为标量 1。

在航天领域中,卡尔曼滤波常被用来测量一段已知运动方程的航天器状态,例如匀速直线运动(CV运动)或者匀加速运动(CA运动)此时 A 为一个矩阵,例如:

$$CV = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad CA = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当被估计的过程或观测变量与过程的关系是非线性的,此时不能够直接应用卡尔曼滤波,而需要使用雅可比矩阵将关系线性化。这种将期望和方差线性化的卡尔曼滤波器称作扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman Filter)^[4],简称EKF。EKF也广泛的应用于各种领域。

EKF是一种次优滤波,由于其考虑了泰勒级数的展开,因此大大增加了其运算量。而文献[5]则将Unscented变换引入卡尔曼滤波理论,建立了Unscented卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)数学模型。与EKF算法相比,UKF方法能获得精确到三阶矩均值和协方差,具有更高的滤波精度,并且该方法可直接使用系统的非线性模型,不需对非线性系统线性化,也不需像二次滤波方法那样计算Jacobian或Hessians矩阵,提高了计算速度。

(2) 状态转换不确定时

有时,卡尔曼滤波被用来测量机动目标的运动轨迹,这些机动目标的运动方程往往是未知的,因此无法得到一个确定的状态转换矩阵。在这种情况下有两条思路:

第一,用其它预测方法来代替状态转移矩阵进行预测,例如灰色卡尔曼滤波方法。这是一种基于灰色预测的跟踪卡尔曼滤波方法,其核心技术是在卡尔曼滤波过程中,迭代所需的预测值不再依赖所建立的目标运动状态方程,而是用前几个时刻的估计值建立灰色微分方程来预测下一时刻的值^[6]。

第二,用多个已知模型的卡尔曼滤波组合起来进行混合预测,例如交互式多模型方法^[7](IMM方法),该方法的思想是用多个运动模型混合起来滤波,每个模型都有一个单独的滤波器。IMM方法采用一个马尔科夫链控制多个模型之间的切换,把各个模型上一时刻的滤波值进行交互作为各模型的下一时刻的输入,然后分别进行滤波,得到的结果进行加权交互输出作为最终的结果。这是一种自适应的方法,利用多个滤波器的加权值来进行自适应调整,避免了目标机动时的滤波发散,可以获得较好的综合效果。

2.3 过程激励噪声协方差的研究

首先再看一遍过程激励噪声协方差的定义:卡尔曼滤波器用于估计离散时间过程的状态变量 $x \in \mathcal{R}^n$ 。这个离散时间过程由式(1)描述,其中 w_{k-1} 是 n 维向量,它被称为过程激励噪声,对应了 x_k 中每个分量的噪声,是期望为0,协方差为 Q 的高斯白噪声。

对 Q 的处理有两种方法,一是认为 Q 是一个确定的值,二是认为 Q 是不确定的,是一个随机变量。

(1) Q 值确定时

对于一些稳定的过程, Q 值是确定的,此时的任务就是找出最优的 Q 值。一种方法是通过调整滤波器系数来获得更好的性能。通过离线测试来确定对于某种过程的最优 Q 值。

下面是针对前文例子的一系列 Q 值测试,首先任意指定一个过程激励噪声协方差矩阵:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1e-4 & 0 & 0 \\ 0 & 1e-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1e-4 \end{bmatrix}$$

分别以 $0.1 * Q_0$ 、 Q_0 、 $10 * Q_0$ 、 $100 * Q_0$ 和 $1000 * Q_0$ 为过程激励噪声协方差阵进行滤波,结果如表2所示。

表2 过程激励噪声协方差阵滤波误差表

滤波参数	均方误差	与测量值均方误差的比率
0.1Q	16.68	39.69%
Q	19.87	47.26%
10Q	25.04	59.57%
100Q	33.58	79.89%
1000Q	39.92	94.97%
测量值	42.04	100%

滤波过程中每个点的差值平方数据如图2所示。

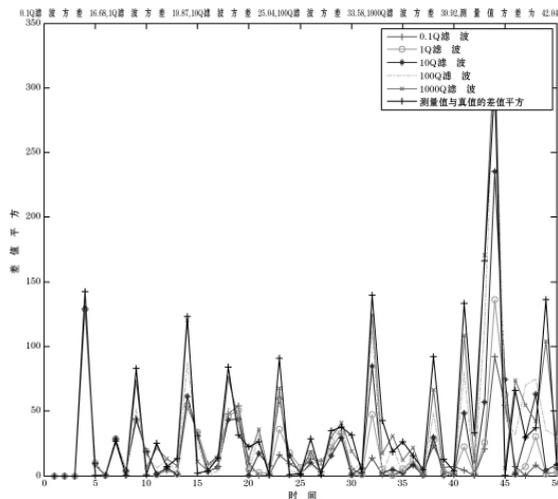


图2 过程激励噪声协方差矩阵对滤波的影响效果图

结论是:当状态转换过程为已确定时, Q 的取值越小越好。当 Q 取值逐渐增大时,滤波收敛变慢,且状态变量的扰动变大。

(2) Q 取值不确定时

另一些情况下状态转换过程是不确定的,或者说是随时间变化的。这个时候 Q 的取值就不能为一个确定值,而是一个随时间变化的变量 $Q(k)$ 。这个时候卡尔曼滤波就变成了自适应卡尔曼滤波^[4]。

自适应卡尔曼滤波是为了解决机动目标和模型不准目标的跟踪问题。这种方法在滤波过程中,利用新的观测数据,对信号模型、噪声的统计特性等实时进行修正,以保持最优或次优滤波。目标加速度非零均值的引入,使目标加速度方差的变化跟随加速度估计值的变化,从而影响到 Q 矩阵,从而达到自适应跟踪滤波的目的。在自适应滤波中,常常需要根据实际情况不断调整系统模型或滤波器参数,使滤波性能达到最优(滤波精度、稳定性、实时性)。根据不同的调整策略,AKF可分为相关AKF、抗野值AKF、多模型AKF、基于信息的AKF、基于神经网络的AKF、基于模糊逻辑的AKF等^[8]。

2.4 测量噪声协方差研究

测量噪声协方差是和测量仪器相关的一个特性,是滤波器的一个输入值。但很多情况下在滤波前未必能够准确获得该

值, 因此有必要研究 R 的不同取值对于滤波的影响。

下面是针对前文例子的一系列 R 值测试, 分别以 $R = 0.1, 1, 5, 10, 20$ 为测量噪声协方差进行卡尔曼滤波, 结果如表 3 所示。

表 3 测量噪声协方差阵滤波误差表

滤波参数	均方误差	与测量值均方误差的比率
$R = 0.1$	30.96	41.25%
$R = 1$	23.81	31.72%
$R = 5$	34.60	46.10%
$R = 10$	53.54	71.34%
$R = 20$	93.97	125.20%
测量值	75.06	100%

滤波过程中每个点的差值平方数据如图 3 所示。

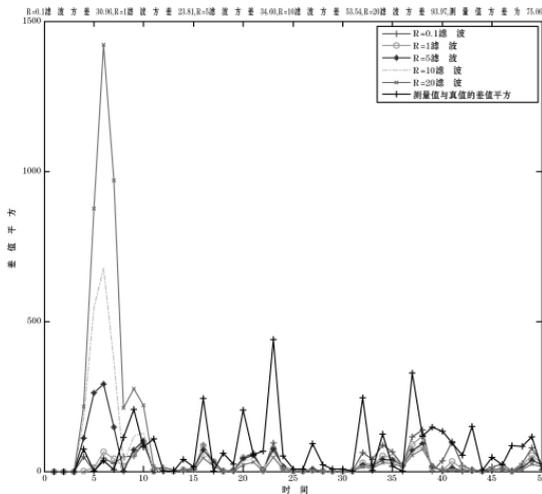


图 3 测量噪声协方差对滤波的影响效果图

得出结论如下:

- R 取值过小或者过大都会造成滤波效果变差;
- R 取值越小收敛越快 R 取值越大收敛越慢;
- 可以先采用实验的手段得到合适的 R 值, 然后利用该 R 值进行真实的滤波。

3 结 语

根据以上对于卡尔曼滤波的参数分析与研究, 可以得出应用各种卡尔曼滤波方法的指导意见。

各种卡尔曼衍生方法的应用范围指导意见:

- (1) 若状态转换过程确定, 且被估计的过程和观测变量与过程的关系是线性的, 则可以直接应用卡尔曼滤波;
- (2) 若状态转换过程确定, 且被估计的过程和观测变量与过程的关系是非线性的, 则应该使用扩展卡尔曼滤波;
- (3) 若状态转换过程不确定, 且关于过程的信息量少, 则应该使用灰色卡尔曼滤波;
- (4) 若状态转换过程不确定, 但可以获得大量过程信息, 则应该使用交互式多模型方法;
- (5) 若状态转换过程是随时间变化的, 则应该使用自适应卡尔曼滤波方法。

应用卡尔曼滤波的一些参数取值方法:

- (1) 初始的状态变量影响最小, 可以直接取值为第一个测量值, 在滤波可以收敛的情况下会很快收敛;
- (2) 只要不为零, 初始方差矩阵的取值对滤波效果影响很小, 都能很快收敛, 可以任意取一个不为零的矩阵;
- (3) 当状态转换过程为已确定时, Q 的取值越小越好, 可以使用一个非常小但不为零的矩阵;
- (4) 测量噪声协方差取值越小收敛越快, 但滤波效果不一定好; 因此可以在滤波前先测定噪声协方差, 然后用于后续的滤波。

本文简要介绍了卡尔曼滤波器算法, 以及在不同问题背景下衍生出来的一系列方法; 通过实验分析和研究了算法中各种参数取值对滤波效果的影响; 给出了应用各种卡尔曼滤波方法的指导性意见, 为各种工程应用和科学研究人员详细了解和应用卡尔曼滤波算法奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] Kalman R E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems [J]. Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering, 1960, 82: 35-45.
- [2] 杨万海. 多传感器数据融合及其应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2004.
- [3] 敬喜. 卡尔曼滤波器及其应用基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1973.
- [4] 周宏仁, 敬忠良, 王培德. 机动目标跟踪 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
- [5] 杨柳. 改进卡尔曼滤波的目标跟踪研究 [J]. 计算机仿真, 2010 (9).
- [6] 陶剑锋, 陈伏虎, 陶秀. 灰色预测在跟踪式卡尔曼滤波中的应用 [C]//2007 系统仿真技术及其学术研讨会. 珠海, 2007.
- [7] 韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 487.
- [8] 符拯, 王书满, 刘丙杰. 自适应卡尔曼滤波的最新进展 [J]. 战术导弹技术, 2009 (6).

(上接第 208 页)

由于 WSN 技术和 OPC 技术的使用, 系统能快速地安装和布局, 稳定性强, 具有很好的可扩展性和移植性。由于一些软硬件条件的限制, 本文设计的能耗监控系统应用还存在一定的局限性。例如系统不光需要对监控区域的能耗信息进行汇总分析, 还需要进一步对监控区域能耗设备进行控制。在后面的工作中可以进一步地整合能耗设备的控制技术, 促进楼宇能耗减排工作的开展。

参 考 文 献

- [1] Jennifer Yick, Biswanath Mukherjee, Dipak Ghosal. Wireless sensor network survey [J]. Computer Networks, 2008, 52 (12): 2292-2330.
- [2] 孙利民, 李建中, 陈渝. 无线传感器网络 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [3] 钱开国. 无线传感器网络嵌入式操作系统的研究和应用 [D]. 成都: 电子科技大学, 2010.
- [4] 汪晖. OPC 技术实现及应用 [D]. 合肥: 合肥工业大学自动控制系, 2003.
- [5] 李勤, 党选举. 基于 COM 的技术研究及其接口实现 [J]. 电子技术应用, 2003 (2): 28-34.