微 波 技 术 基 础

北京邮电大学无线通信与电磁兼容实验室
刘凯明　副教授
（明光楼718室，62281300）
Buptlkm@sohu.com

2011

矩形波导

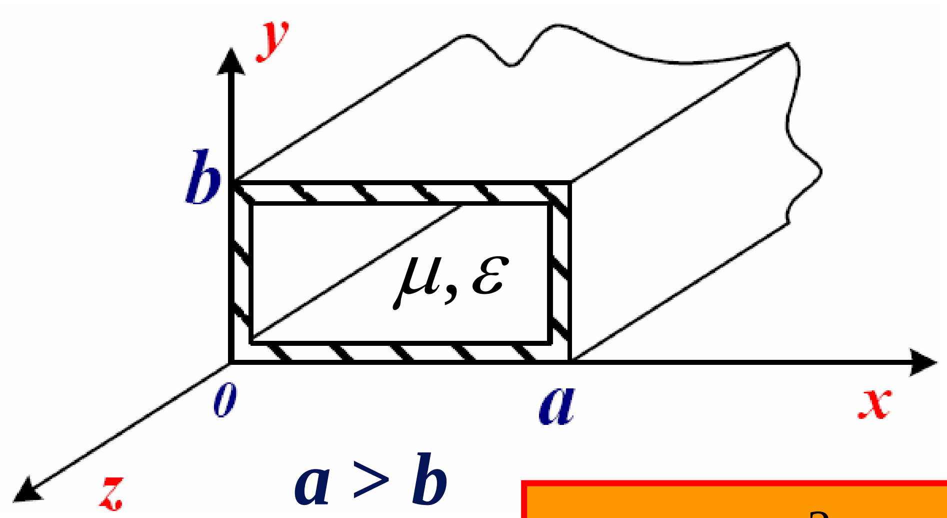
本节学习要点

- 掌握矩形波导中场分量求解方法
- 掌握矩形波导TE/TM模的截止波数、截止波长
- 掌握矩形波导中实现单模传输的条件
- 了解矩形波导场分布特点

矩形波导的场分布

- TE模场分布求解

建立坐标系——以宽边为x轴、短边为y轴



纵向**磁场**满足的波动方程

$$H_z(x,y,z)=h_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h_z}{\partial y^2}+k_c^2 h_z=0\\ k_c^2=k^2-\beta^2\end{cases}}$$

分离变量法

$$h_z(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$\boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_c^2=0}$$

矩形波导的场分布

➢TE模场分布求解

■要使等式恒成立，前两项必须分别为常数

可以设

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-k_x^2$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=-k_y^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0\\&\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0\end{aligned}}$$

则有 $\boxed{k_x^2+k_y^2=k_c^2}$

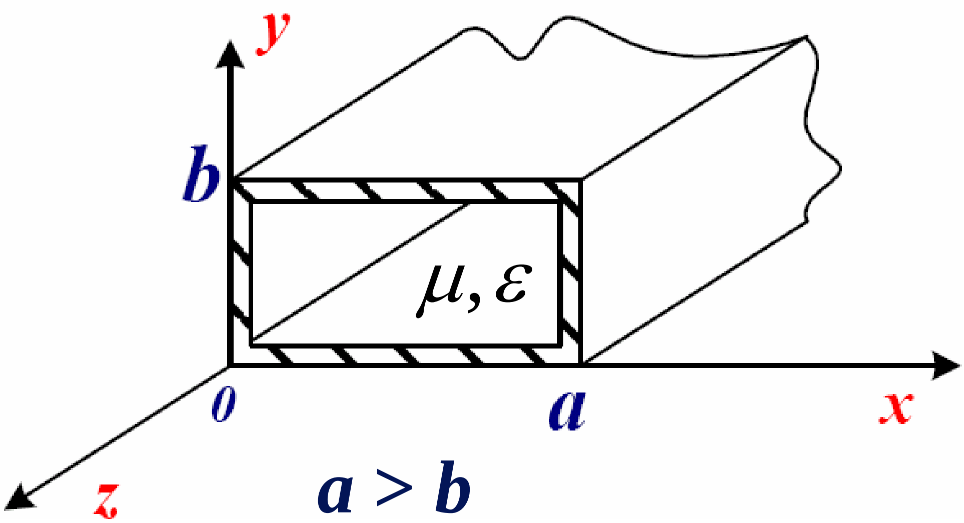
通解

$$\boxed{h_z(x,y)=\underbrace{(A\cos k_x x+B\sin k_x x)}_{X(x)}\underbrace{(C\cos k_y y+D\sin k_y y)}_{Y(y)}}$$

矩形波导的场分布

➢ TE模场分布求解

□分析边界条件——金属四壁上切向电场为零!



$$E_x\big|_{y=0,x\in(0,a)}=0$$

$$E_x\big|_{y=b,x\in(0,a)}=0$$

$$E_y\big|_{x=0,y\in(0,b)}=0$$

$$E_y\big|_{x=a,y\in(0,b)}=0$$

$$\boxed{H_z \to E_x, E_y\quad ?}$$

回忆——由纵向场求横向场

➢ **纵向场法**——求横向场

无源区域麦克斯韦方程
（时谐场）

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_c^2 = k^2 - \beta^2 \\ k = w\sqrt{\mu\varepsilon} \end{cases}$$

纵向场表示的横向场(TE)

$$\begin{cases} H_x = \dfrac{j}{k_c^2}\left(\cancel{w\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y}} - \beta\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_y = \dfrac{-j}{k_c^2}\left(\cancel{w\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial x}} + \beta\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_x = \dfrac{-j}{k_c^2}\left(\cancel{\beta\dfrac{\partial E_z}{\partial x}} + w\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y = \dfrac{j}{k_c^2}\left(\cancel{-\beta\dfrac{\partial E_z}{\partial y}} + w\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \end{cases}$$

$$H_z(x,y,z)=h_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$h_z(x,y)=(A\cos k_x x+B\sin k_x x)(C\cos k_y y+D\sin k_y y)$$

➢TE模场分布求解

□由纵向磁场得到横向电场

$$E_x=\frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},\quad E_y=\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\begin{cases} e_x=\dfrac{-j\omega\mu}{k_c^2}k_y(A\cos k_x x+B\sin k_x x)(-C\sin k_y y+D\cos k_y y) \\ e_y=\dfrac{-j\omega\mu}{k_c^2}k_x(-A\sin k_x x+B\cos k_x x)(C\cos k_y y+D\sin k_y y) \end{cases}$$

E_x，E_y均可能等于零，但不能同时为零！

$$
\begin{cases}
e_x = \dfrac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_y (A\cos k_x x + \cancel{B\sin k_x x})(-C\sin k_y y + \cancel{D\cos k_y y}) \\
e_y = \dfrac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_x (-A\sin k_x x + \cancel{B\cos k_x x})(C\cos k_y y + \cancel{D\sin k_y y})
\end{cases}
$$

➢TE模场分布

◻带入边界条件求解

$$E_x |_{y=0,x\in(0,a)} = 0 \Rightarrow D = 0$$

$n = 0,1,2\cdots$

$\because C \neq 0$

$$E_x |_{y=b,x\in(0,a)} = 0 \Rightarrow -C\sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$E_y |_{x=0,y\in(0,b)} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$m = 0,1,2\cdots$

$\because A \neq 0$

$$E_y |_{x=a,y\in(0,b)} = 0 \Rightarrow -A\sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$$

m、n不能同时为零！

$$H_z(x,y,z)=h_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$h_z(x,y)=(A\cos k_x x+B\sin k_x x)(C\cos k_y y+D\sin k_y y)$$

➢TE模场分布求解

□得到纵向磁场的最终解

m、n称为**波指数**

波型称为**正规波**

m、n不能同时为零

$$H_z=A_{mn}\cdot\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cdot\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$\begin{cases}E_x=?\\E_y=?\\H_x=?\\H_y=?\end{cases}$$

传播常数

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2}$$

截止频率

$$f_{cmn}=\frac{v_0}{\lambda_c}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

矩形波导的场分布

- TE模场分布求解

截止波长

$$\lambda_{cmn} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}}$$

矩形波导的场分布

➢TE模式的基模

■基模——截止频率<u>最低</u>的模式称为<u>基模</u>。

TE模截止频率

$$f_{cmn}=\frac{v_0}{\lambda_c}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

因$a>b$，<u>且m、n不能同时为零</u>，所以基模为**<u>TE_{10}</u>**模

$$f_{c(TE_{10})}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\lambda_{c(TE_{10})}=\frac{v_0}{f_{c(TE_{10})}}=2a$$

矩形波导的场分布

➢TE模式的一些参量

截止波长 $\lambda_c = 2a$

$$\begin{cases} \lambda_g > \lambda_0 \\ v_p > c \end{cases}$$

把截止波长代入TE波的参量

相移常数：根据 $\beta = k\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ 所以 $\beta = k\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}$

波导波长 $\lambda_g = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$ 相速度 $v_p = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$

群速度 $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}$ 波阻抗 $Z_{TE} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$

矩形波导的场分布

➢TM模场分布求解

$$\begin{cases} E_z\,|_{y=0,b}=0 \\ E_z\,|_{x=0,a}=0 \end{cases} \Rightarrow E_z = B_{mn}\cdot\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

传播常数

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2}$$

与TE模相同

截止频率

$$f_{cmn}=\frac{v_0}{\lambda_c}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

矩形波导的场分布

➢TM模式的基模

$$E_z = B_{mn} \cdot \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{b}y) e^{j(\omega t-\beta z)}$$

因$a>b$，**且m、n均不能等于零**，所以基模为**TM11**模

$$f_{c(TM_{11})} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{\pi}{b})^2} = \frac{v_0}{\lambda_c}$$

$$\lambda_{c(TM_{11})} = \frac{v_0}{f_{c(TM_{11})}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{\pi}{b})^2}} = \frac{2\pi}{k_c}$$

矩形波导的场分布

➢"简并"现象

对波指数相同的TE波及TM波，有相同的截止波长，因此有相同的传输条件。但TE、TM波具有不同的场结构，这种具有不同场结构而有相同传输参量的现象，称为"简并"。

- 简并发生在TE波与TM波之间。
- 矩形波导中，TEmn模与TMmn模是简并模。

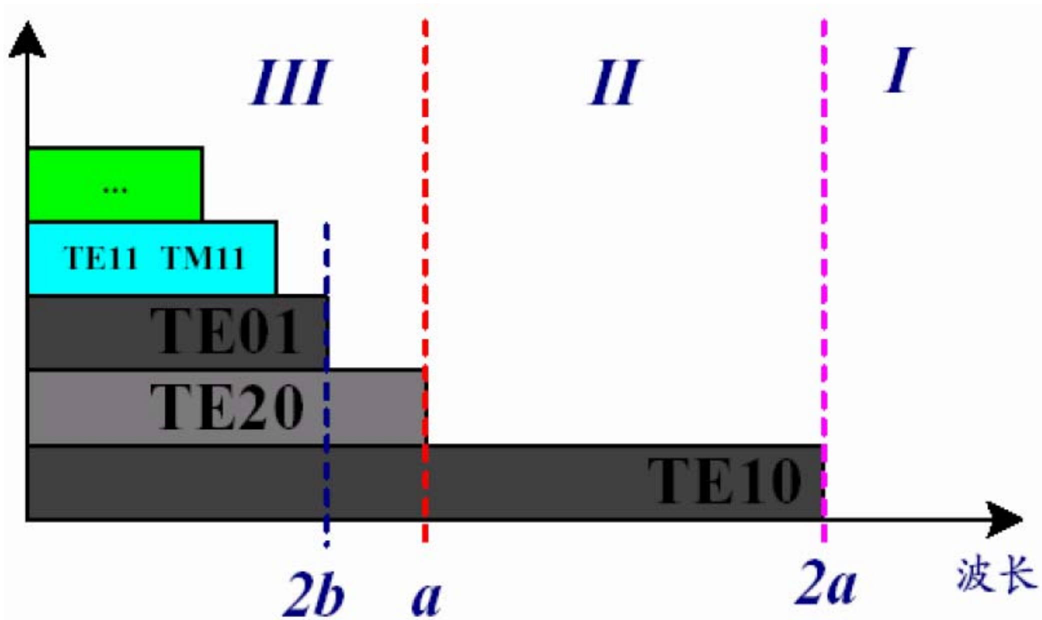
$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2}$$

$$f_{cmn}=\frac{v_0}{\lambda_c}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

$$\lambda_{cmn}=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}$$

矩形波导的单模传输

➢截止波长分布



➢ I区：截止区—长于... 的波长不能传输

➢ II区：单模区—只有一种模式能传输

➢ III：多模区— 多种模式能传输

TE_{10} 模的截止波长为<u>2a</u>

TE_{20} 模的截止波长为<u>a</u>

TE_{01} 模的截止波长为<u>2b</u>

TE_{11} 模的截止波长为

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} < 2b$$

矩形波导的单模传输

➢单模传输条件

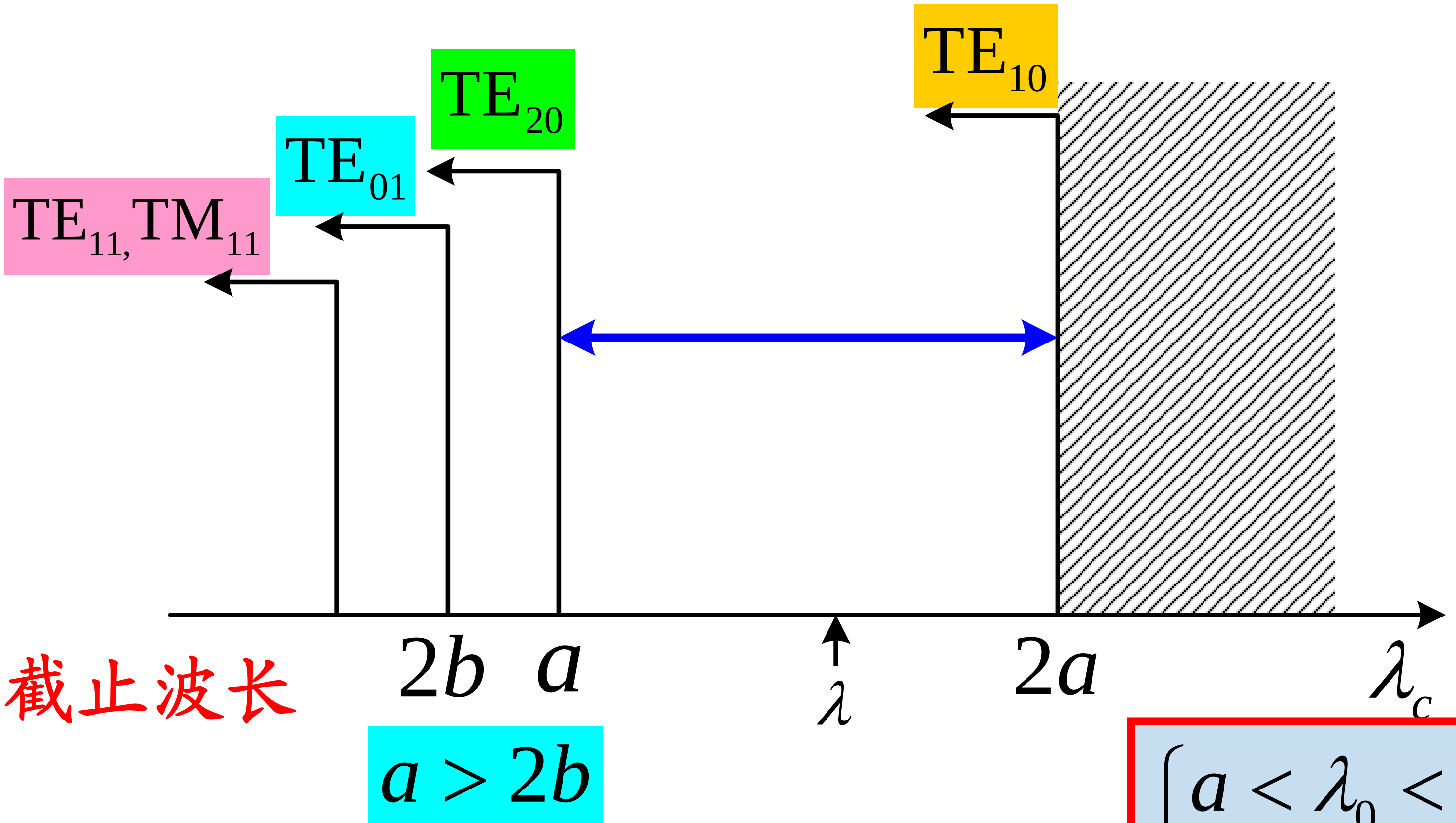
✓通常矩形波导工作在**<u>TE$_{10}$</u>**单模传输情况，这是因为TE$_{10}$模<u>容易实现</u>单模传输

✓当工作频率一定时传输TE$_{10}$模的<u>波导尺寸最小</u>

✓若波导尺寸一定，则实现单模传输的<u>频带最宽</u>

矩形波导的单模传输

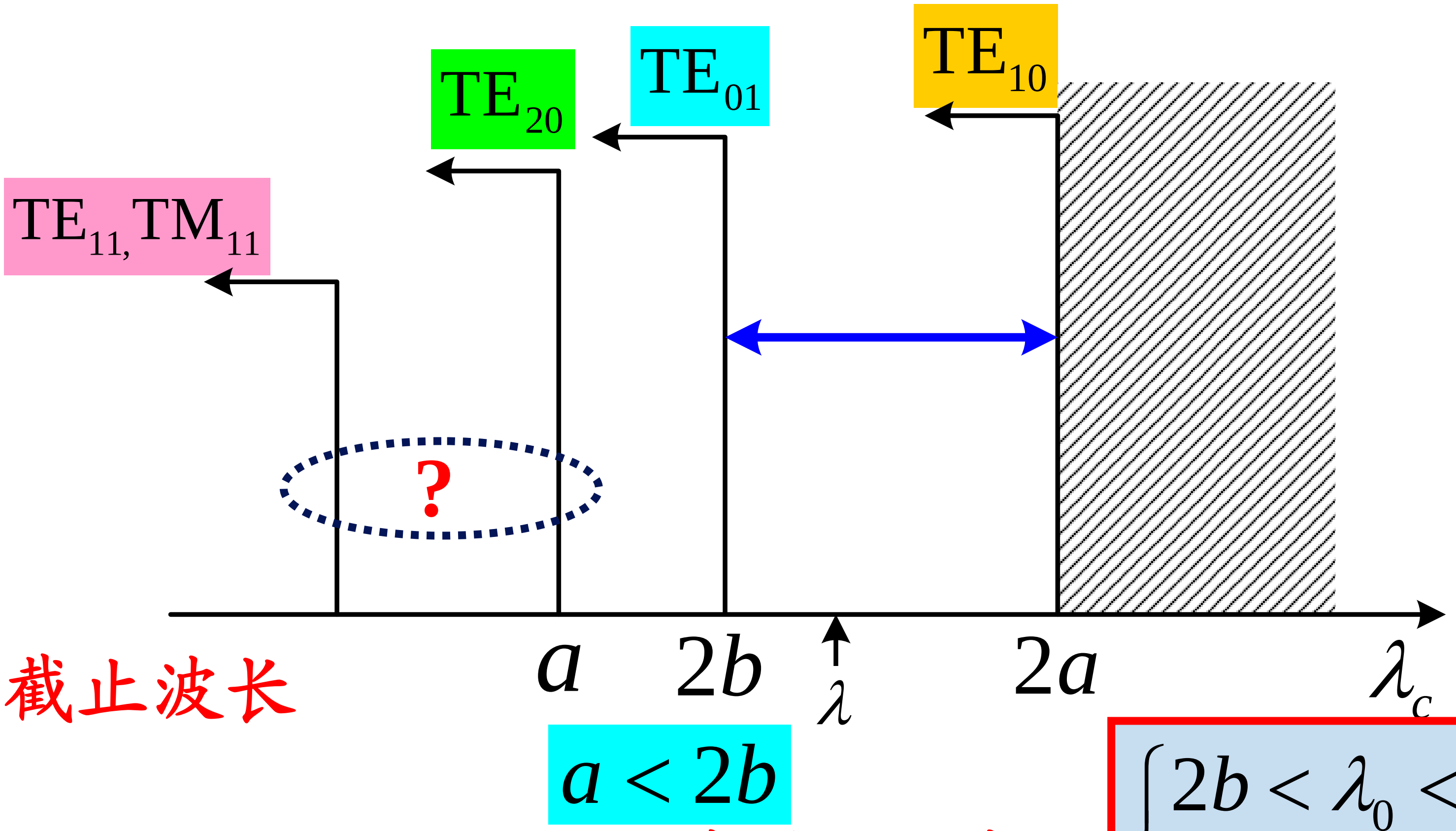
➢ 单模传输条件



单模传输条件 $\begin{cases} a < \lambda_0 < 2a \\ a > 2b \end{cases}$

矩形波导的单模传输

➢ 单模传输条件



单模传输条件 $\begin{cases} 2b < \lambda_0 < 2a \\ a < 2b \end{cases}$

矩形波导的单模传输

➢ TE10模的单模传输条件

$$\begin{cases} \lambda_{c(TE_{20})} < \lambda_0 < \lambda_{c(TE_{10})} \\ \lambda_{c(TE_{01})} < \lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < \lambda_0 < 2a \\ \lambda_0 > 2b \end{cases}$$

单模传输条件

$$\begin{cases} a < \lambda_0 < 2a \\ a > 2b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 2b < \lambda_0 < 2a \\ a < 2b \end{cases}$$

当工作波长给定时，若要实现TE10单模传输，则波导尺寸必须满足?

矩形波导的场结构

➢关于正规波的讨论

在矩形波导中，尽管在z方向它们只可能是入射波加反射波(即还是广义传输线)，但是由于横向边界条件它们由TE_{mn}和TM_{mn}波组成并且它们只能由TE_{mn}和TM_{mn}波组成(后者，我们称之为“完备性”)，矩形波导中这些波的完备集合——称正规波（或简正波）。

任何情况下的可能解，只能在简正波中去找，具体场合所不同的仅仅是比例和组合系数，事实上，这样就把求复杂场函数的问题变换成求各个模式的系数。

矩形波导的场结构

➢TE波的波指数

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

m，n称为波指数，对于TE模它们不能同时为零（对于TM模它们均不能为零！）

m——表示x方向变化的半周期数。
(即小→大→小)
n——表示y方向变化的半周期数。

矩形波导的场结构

➢TE10模的场分布图

所谓场分布图就是在固定时刻，用电力线和磁力线表示某种波型场强空间变化规律的图形。

TE10模的场分量为

$$
\begin{cases}
E_y = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\mu}E_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_z = j\dfrac{1}{\omega\mu}\dfrac{\pi}{a}E_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)}
\end{cases}
$$

矩形波导的场结构

➢TE10模的场分布图

TE_{10}模场强与y无关，场分量沿y轴均匀分布。各场分量沿x轴的变化规律为

$$\begin{cases} E_y \propto \sin(\pi x/a) \\ H_x \propto \sin(\pi x/a) \\ H_z \propto \cos(\pi x/a) \end{cases}$$

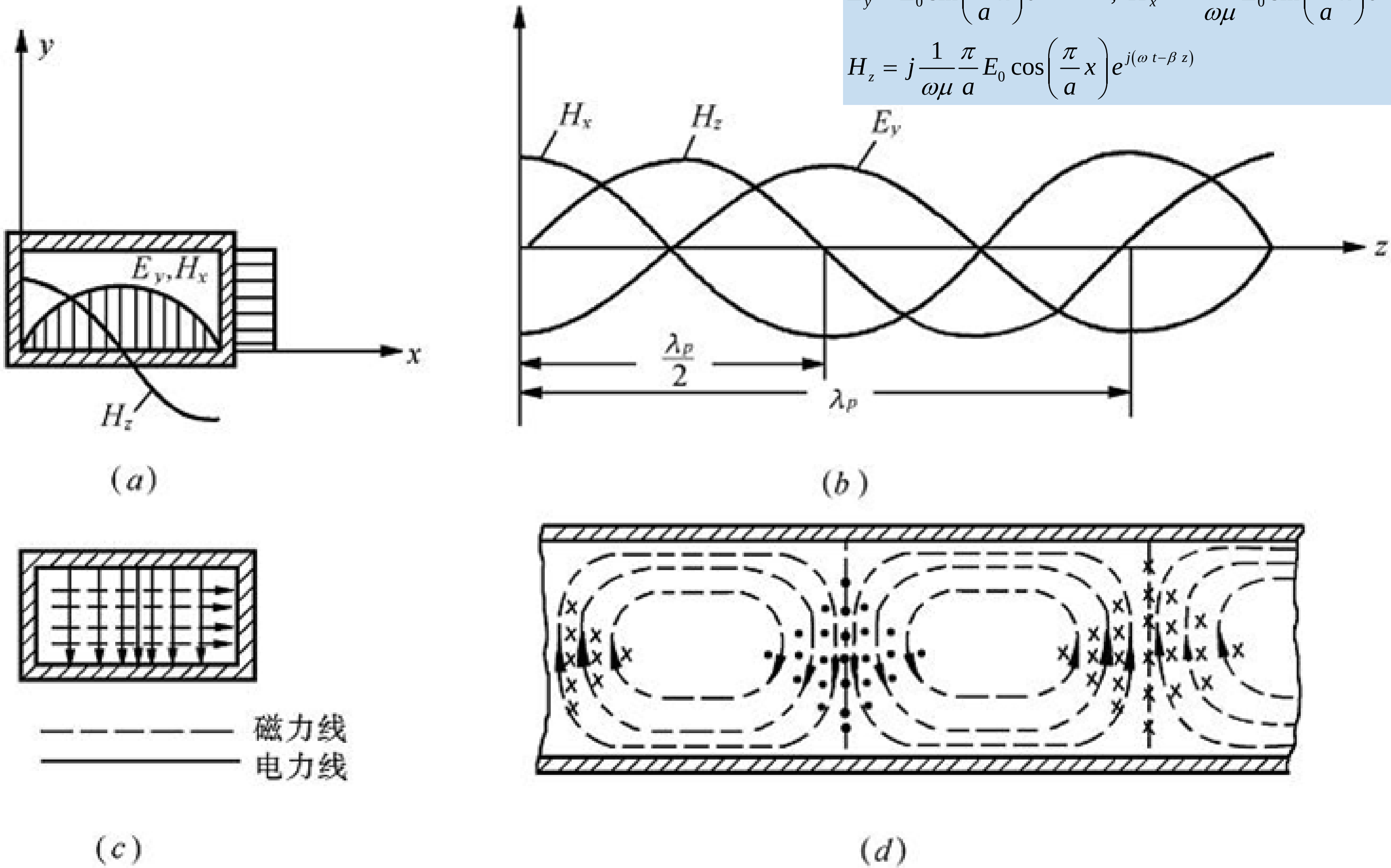
场分布特点：

✓磁力线永远闭合，电力线与导体边界垂直

✓电力线和磁力线相互正交

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)},\ H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu}E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_z = j\frac{1}{\omega\mu}\frac{\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t-\beta z)}$$



矩形波导TE_{10}模场分量的分布规律

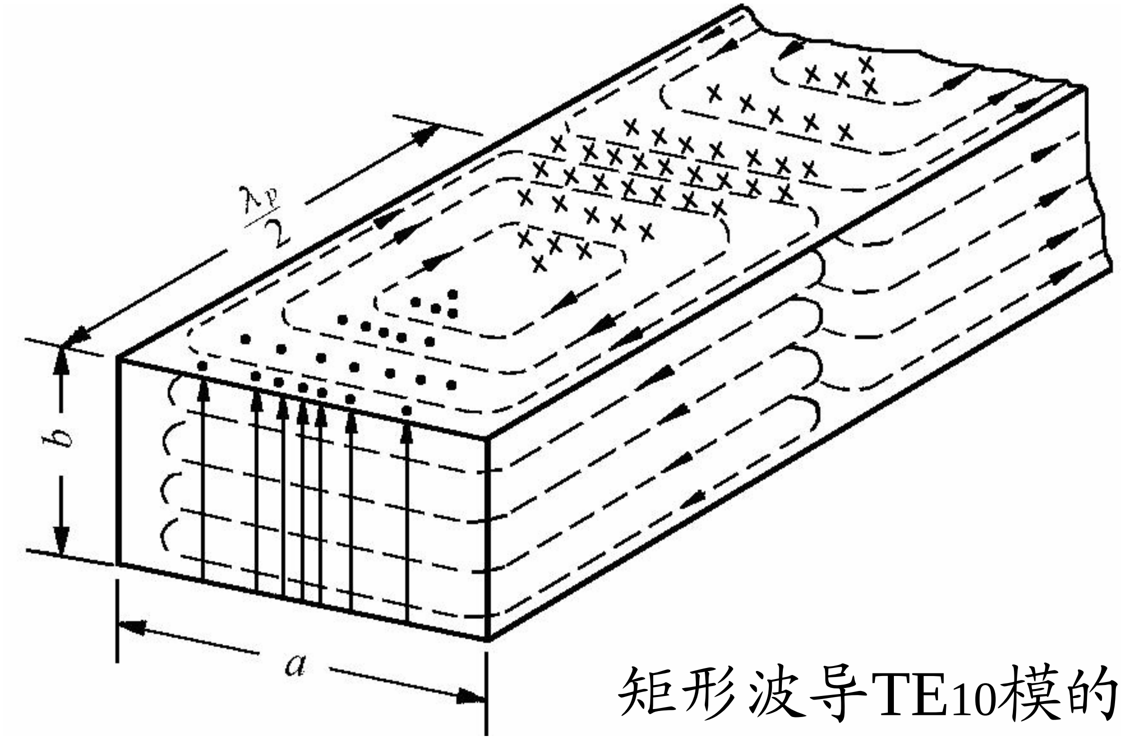
(a) 场分量沿*x*轴的变化规律；　**(b)** 场分量沿*z*轴的变化规律；

(c) 矩形波导横截面上的场分布；　**(d)** 矩形波导纵剖面上的场分布.

矩形波导的场结构

➢TE10模的场分布图

某一时刻TE_{10}模完整的场分布如图所示，随时间的推移，场分布图以相速 v_p 沿传输方向移动。



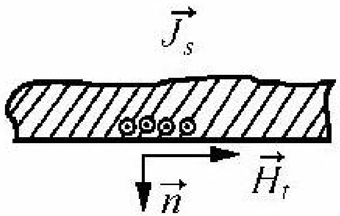
矩形波导TE10模的场分布图

矩形波导的场结构

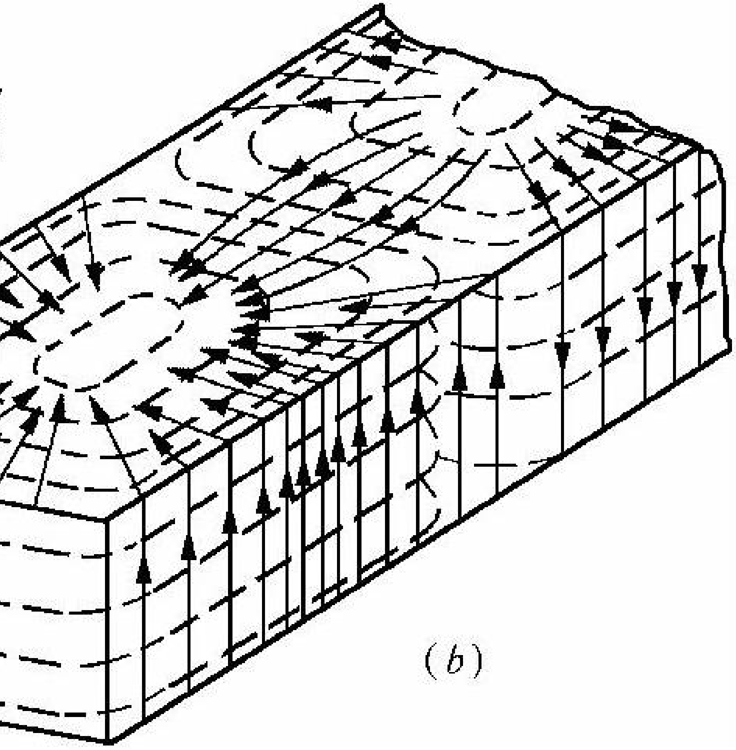
➢TE10模的壁电流分布

当波导内传输电磁波时，波导内壁上将会感应高频电流。这种电流属传导电流，称为<u>壁电流</u>。由于假定波导壁是由理想导体构成，故壁电流只存在于波导的<u>内表面</u>。

$$\vec{J}_S = \vec{n} \times \vec{H}_t$$



(a)



(b)

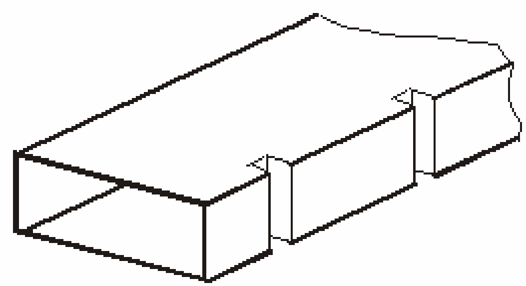
矩形波导的场结构

➢TE10模的壁电流分布

波导驻波测量线

■在波导宽边a/2出开一纵向缝隙，配有耦合指示机构（探针、检波器等）组成

■开缝处不会切断高频电流，称为“无辐射缝”



在波导中凡是切断电流的都要引起辐射和损耗

裂缝天线—切割电流

矩形波导作业

1. 教材P135页第3.5题。

2. 今用BJ-32（a=72.14mm， b=34.04mm）波导做天线馈线，

① 波导中传输TE10波， 工作波长λ0=10cm，计算

$$\lambda_c, \lambda_g, v_g, v_p, Z_w$$

② 若测出波导中相邻波节点之间距离为10.9cm，求

$$\lambda_g, \lambda_0$$

③ 当工作波长λ0=6cm时， 波导中能够传那些波型？

矩形波导作业

3. 若 $\lambda_0 = 8\text{ mm}$、 3cm、 10cm如何保证只传输TE10模?