

文章编号: 1004-7182(2012)05-0047-07

关于大角度范围内四元数与欧拉角转换的思考

夏喜旺, 杜 涵, 刘汉兵
(上海宇航系统工程研究所, 上海, 201108)

摘要: 在存在大角度姿态机动的场景中, 航天飞行器通常采用基于姿态四元数的姿态运动模型, 同时又多以欧拉角形式给定其期望姿态, 因此研究四元数到欧拉角的转换关系十分必要。但是, 姿态四元数与欧拉角之间并不存在一一对应的关系。以飞行器姿态为纽带, 依据姿态四元数和欧拉角与飞行器姿态之间的内在关系, 对各种可能出现的情形进行分析, 在控制所对应的期望姿态的牵引下, 确定出符合姿态控制利益的姿态四元数到欧拉角的转换关系。鉴于姿态四元数到欧拉角转换关系的复杂性, 在飞行器进行大角度姿态机动控制时, 建议采用基于四元数的姿态运动模型。

关键词: 大角度机动; 姿态四元数; 欧拉角; 转换算法

中图分类号: V448.2 **文献标识码:** A

Discussion on the Transformation Between Attitude Quaternion and Euler Angles in Large-angle Maneuver Scenario

Xia Xiwang, Du Han, Liu Hanbing
(Aerospace System Engineering, Shanghai, 201108)

Abstract: In large-angle attitude maneuver scenarios, quaternion-based attitude kinematic model is adopted widely to treat with spacecraft's attitude motion. Since the commanded attitude is specified in Euler-angle form, the transformation relationship from attitude quaternion to Euler angles has to be determined to serve to the Euler angles-based attitude control laws. However, the known fact is the mapping between attitude quaternion and Euler angles is very complex and no uniform expression has been formed to describe this mapping. In this paper, based on the inner relations between attitude quaternion, Euler angles and the spacecraft's attitude, and with analysis of each potential case, the proper transformation from attitude quaternion to Euler angles was specified. Due to the complexity of the transformation from attitude quaternion to Euler angles, the quaternion-based attitude motion model is recommended to treat the spacecraft's large-angle maneuver control.

Key Words: Large angle maneuver; Attitude quaternion; Euler angles; Transformation algorithm

符号说明

- (ψ, θ, γ) ——3-2-1 旋转下的姿态角组合;
- $[q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$ ——一组四元数;
- $(\psi_1, \theta_1, \gamma_1)$ ——四元数 q 对应的一组欧拉角;
- $(\psi_2, \theta_2, \gamma_2)$ ——为四元数 q 对应的另一组欧拉角
- α_f ——某通道对应的期望姿态角;
- α_1, α_{ex} ——某组欧拉角相应角度的不同表述;
- α_2 ——另一组欧拉角相应角度的表述;
- A_1, A_2 ——四元数对应的两组欧拉角与期望欧拉角贴近程度的表述量;
- A_{a1}, A_{a2} ——某通道相应姿态角的逾界值和修正

值与其期望姿态角的贴近程度表述量;

A_a ——某通道相应姿态角与其期望姿态角的贴近程度表述量。

0 引言

将抽象的空间旋转人为割裂成 3 次绕不同的旋转轴次递进行的旋转, 所对应的 3 个旋转角即为欧拉角。欧拉角可由姿态敏感器测得, 它的引入给姿态描述及姿态控制带来了便利。但其本身也有许多不足, 如三角运算过多, 描述同一姿态的参数不唯一, 相应的姿态运动方程存在奇异性等。基于姿态四元数的飞行器

收稿日期: 2011-10-29; 修回日期: 2012-01-20

作者简介: 夏喜旺 (1978-), 男, 工程师, 主要研究方向为飞行器动力学与控制

姿态运动方程没有奇异性，模型简单且计算量较小，因此在描述飞行器姿态运动时得到了广泛的应用。但姿态四元数不具有明确的物理意义，描述姿态很不直观，故在定义飞行器期望姿态时仍采用欧拉角描述。显然，这将涉及到四元数与欧拉角的转换问题。

文献[1]给出了欧拉角到四元数的转换公式，同时还给出了在限定 3 个欧拉角均在 $-90\sim 90^\circ$ 之间变动情况下四元数到欧拉角的转换公式；文献[2]给出了滚动角在 $-90\sim 90^\circ$ 之间变动，俯仰角和偏航角在 $-180\sim 180^\circ$ 之间变动情况下四元数到欧拉角的转换公式。文献[3]和文献[4]尝试解决 3 个欧拉角均在 $-180\sim 180^\circ$ 之间变动情况下四元数到欧拉角的转换问题。其中，前者将姿态四元数分情况变换成欧拉角，再将其变换成四元数并与目标四元数进行比较，所对应的四元数与目标四元数一致的那组欧拉角即为目标欧拉角，但相应的欧拉角组合所对应的四元数总是相同的，故这种比较是无效的；后者假定某一角度在进行大角度范围变动时，其它两个角则在小角度范围内变动，在该假定下完成了四元数到欧拉角的转换，显然这种考虑也是不完备的。另外，上述文献所提出的转换方法忽视了四元数、欧拉角与飞行器姿态之间的内在联系，仅从坐标转换矩阵本身出发去推导相应的转换公式，因此需要对坐标转换矩阵若干个元素的符号进行多次判断，且其转换方法尚存继续改进之处。

本文首先分析姿态四元数、欧拉角与姿态间的内在联系，并参照姿态控制给定的指令欧拉角，确定出四元数所对应的较合适的一组欧拉角。

1 空间姿态的描述

通常情况下，飞行器的姿态控制是其轨道控制的前提，而其姿态的描述则是其姿态控制的基础。当前比较流行的姿态描述方式有两大类：一类是各式各样的欧拉角（下面仅以 3-2-1 旋转组合情况为例进行考察，其余情况与之类似）；一类是四元数及其导出形式。

1.1 欧拉角姿态描述

将抽象的空间旋转人为割裂成 3 次绕不同的旋转轴次递进行的旋转，可以得到一组欧拉角。描述空间姿态的 3 次旋转可以有多种组合，如 3-2-1, 2-3-1, 3-1-3 等，相应的欧拉角也不相同。

空间旋转的人为割裂给姿态描述及姿态控制带来了便利，但欧拉角本身也存在许多不足。其过多的三角运算将影响计算速度，欧拉角 θ 与 $2\pi+\theta$ 表示相同的姿态，即使在 $(-\pi, \pi)$ 内，仍有 ψ, θ, γ 与 $\psi - \text{sgn}(\psi)\pi$,

$\text{sgn}(\theta)\pi - \theta, \gamma - \text{sgn}(\gamma)\pi$ 描述同一空间姿态（见图 1）。

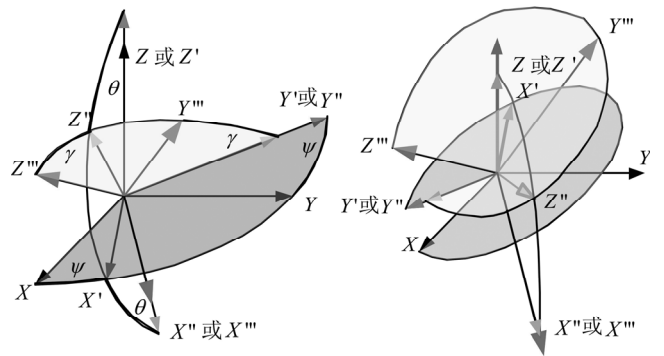


图 1 采用欧拉角描述空间姿态

另外，若 3-2-1 或 2-3-1 旋转组合的第 2 次旋转为 90° ，或 3-1-3 旋转组合的第 2 次旋转为 180° ，则第 1 次和第 3 次的旋转轴将重合，显然此时有无穷多组欧拉角对应于当前姿态；在这种情况下，相应的姿态运动方程也将产生奇异。

1.2 四元数姿态描述

设 (ψ, θ, γ) 为 3-2-1 旋转（3 次旋转轴分别为 Z, Y 和 X 坐标轴）下的姿态描述，则飞行器当前姿态所对应的姿态四元数为^[1]

$$q = \begin{bmatrix} \cos(\gamma/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\gamma/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \sin(\gamma/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\gamma/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\gamma/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\gamma/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\gamma/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\gamma/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

将 ψ 与 $2\pi+\psi$ 分别代入式 (1)，易知姿态四元数存在有符号二义性，即符号相反的两个四元数可描述同一空间姿态。

式 (1) 为欧拉角到姿态四元数的转换公式，所反映的为欧拉角到姿态四元数的映射关系。

下面着重分析姿态四元数到欧拉角的映射及转换。

2 姿态四元数到欧拉角的映射关系

姿态四元数、欧拉角与空间姿态间的对应关系如图 2 所示。

显然，四元数与欧拉角间并不存在一一对应关系。姿态四元数所对应的坐标转换矩阵^[1]为

$$\begin{bmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & -2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ -2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 2q_0q_2 + 2q_1q_3 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

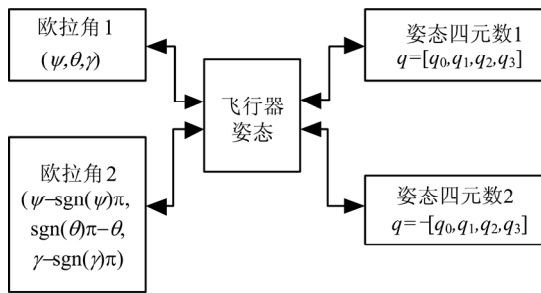


图 2 欧拉角、四元数与空间姿态间的关系

姿态欧拉角 (3-2-1 旋转) 所对应的坐标转换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\gamma\sin\theta\cos\psi - \cos\gamma\sin\psi & \sin\gamma\sin\theta\sin\psi + \cos\gamma\cos\psi & \sin\gamma\cos\theta \\ \cos\gamma\sin\theta\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\sin\theta\sin\psi - \sin\gamma\cos\psi & \cos\gamma\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

对比式 (2) 和式 (3), 四元数与欧拉角不存在一一对应关系的结论即可得到进一步印证。

定义函数 $\theta = \arctan 2(Y, X)$, 这里, Y 和 X 分别为角 θ 的正弦和余弦, θ 的取值范围为 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 。下面对照式 (2) 和式 (3), 分析 θ 各种取值情况下欧拉角到姿态四元数的映射关系。

a) 若 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, 则 $\cos\theta > 0$, 此时有:

$$\theta = \arcsin(\sin\theta) = \arcsin[-(-\sin\theta)] = \arcsin[-(-2q_0q_2 + 2q_1q_3)] \quad (4)$$

结合式 (2), 由式 (3) 可得

$$\begin{cases} \psi = \arctan 2(\sin\psi, \cos\psi) = \arctan 2(\cos\theta\sin\psi, \cos\theta\cos\psi) = \\ \arctan 2(2q_0q_3 + 2q_1q_2, 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1) \\ \gamma = \arctan 2(\sin\gamma, \cos\gamma) = \arctan 2(\cos\theta\sin\gamma, \cos\theta\cos\gamma) = \\ \arctan 2(2q_0q_1 + 2q_2q_3, 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1) \end{cases} \quad (5)$$

函数 $\arctan 2$ 所对应的取值范围为 $(-\pi, \pi)$ 。

在考虑四元数漂移的情况下, 如果采用式 (4) 来确定那个角, 那么可能无解, 即便有解也可能因四元数偏移较大而出现问题。此时建议先由式 (5) 确定出 γ , 再采用下面两式求解该角:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan 2(\sin\theta, \cos\theta) = \arctan[\sin\theta, (\cos\gamma\cos\theta)/\cos\gamma] = \\ &= \arctan[-(-2q_0q_2 + 2q_1q_3), (2q_0^2 + 2q_3^2 - 1)/\cos\gamma] \\ &\quad \text{或} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan 2(\sin\theta, \cos\theta) = \arctan[\sin\theta, (\sin\gamma\cos\theta)/\sin\gamma] = \\ &= \arctan[-(-2q_0q_2 + 2q_1q_3), (2q_0q_1 + 2q_2q_3)/\sin\gamma] \end{aligned}$$

b) 若 $\theta \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$, 则 $\cos\theta < 0$, 此时结合式 (2), 由式 (3) 可得

$$\begin{cases} \psi = \arctan 2(\sin\psi, \cos\psi) = \arctan 2(-\cos\theta\sin\psi, -\cos\theta\cos\psi) = \\ \arctan 2[-(2q_0q_3 + 2q_1q_2), -(2q_0^2 + 2q_1^2 - 1)] \\ \gamma = \arctan 2(\sin\gamma, \cos\gamma) = \arctan 2(-\cos\theta\sin\gamma, -\cos\theta\cos\gamma) = \\ \arctan 2[-(2q_0q_1 + 2q_2q_3), -(2q_0^2 + 2q_3^2 - 1)] \end{cases} \quad (7)$$

在由式 (7) 确定出 γ 之后, θ 由式 (6) 进行确定。

标记式 (5) 和式 (6) 对应的欧拉角为 ψ_1, θ_1 和 γ_1 , 式 (7) 和式 (6) 对应的欧拉角为 ψ_2, θ_2 和 γ_2 , 对比式 (5) 和式 (6) 与式 (7) 和式 (6), 有如下关系式:

$$\begin{cases} \psi_2 = \psi_1 - \text{sgn}(\psi_1)\pi \\ \theta_2 = \text{sgn}(\theta_1)\pi - \theta_1 \\ \gamma_2 = \gamma_1 - \text{sgn}(\gamma_1)\pi \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \psi_1 = \psi_2 - \text{sgn}(\psi_2)\pi \\ \theta_1 = \text{sgn}(\theta_2)\pi - \theta_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 - \text{sgn}(\gamma_2)\pi \end{cases} \quad (8)$$

一般而言, 对于任意 $\theta \neq \pm\pi/2$ 的情况, 可首先由式 (5) 和式 (6) 确定出 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 情况下的欧拉角 ψ_1, θ_1 和 γ_1 , 之后由式 (8) 确定出 $\theta \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ 情况下的欧拉角 ψ_2, θ_2 和 γ_2 。两组欧拉角都对应于姿态四元数所描述的飞行器空间姿态, 具体选择哪一组欧拉角须根据姿态控制的需要进行确定。

c) 若 $\theta \rightarrow \pm\pi/2$, 有 $\cos\theta \rightarrow 0$, 式 (3) 中与 $\cos\theta$ 相关的项 (式 (3) 中第 1 行与第 3 列的元素) 也将趋于零。此时虽能从式 (3) 中解出姿态角, 但受计算精度、计算步长所限, ψ 和 γ 将出现较大变化, 这显然不符合姿态控制的平滑性要求。不过, 随着飞行器姿态演变的推进, 在 θ 跨越了 $\pm\pi/2$ 之后, 四元数到欧拉角的转换就将重新回到 $\theta \neq \pm\pi/2$ 的情况。特别地, 若有 $\theta = \pm\pi/2$ 发生, 则有 $\cos\theta = 0$, 此时式 (3) 将退化为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \text{sgn}\theta\sin(\gamma \pm \psi) & \cos(\gamma \pm \psi) & 0 \\ \text{sgn}\theta\cos(\gamma \pm \psi) & -\sin(\gamma \pm \psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

此种情形的物理意义为: 第 2 次旋转使得第 1 次和第 3 次的旋转轴发生了重合。此时可以确定出 $\gamma - \psi$ 或 $\gamma + \psi$, 但无法具体确定 γ 和 ψ , 即有无穷多组欧拉角组合与相应的姿态四元数对应。

结合式 (2), 由式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} \gamma \pm \psi &= \arctan 2[\sin(\gamma \pm \psi), \cos(\gamma \pm \psi)] = \\ &= \arctan 2[-\text{sgn}(-2q_0q_2 + 2q_1q_3)(-2q_0q_3 + 2q_1q_2), (2q_0^2 + 2q_2^2 - 1)] = \\ &= \arctan 2[-\text{sgn}(2q_0q_2 - 2q_1q_3)(2q_0q_3 - 2q_1q_2), (2q_0^2 + 2q_2^2 - 1)] \end{aligned} \quad (10)$$

式 (3) 中, “ \pm ” 的具体取舍与 $-2q_0q_2 + 2q_1q_3$ 的符号直接相关。

也可根据式 (1) 来考察四元数与欧拉角关系。若有 $\theta = \pm\pi/2$, 则 $\cos(\theta/2) = \text{sign}\theta\sin(\theta/2)$, 式 (1) 可改写为

$$q = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \psi + \operatorname{sgn} \theta \sin \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \psi \\ \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \psi - \operatorname{sgn} \theta \cos \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \psi \\ \sin \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \psi + \operatorname{sgn} \theta \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \psi \\ \cos \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \psi - \operatorname{sgn} \theta \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \psi \end{bmatrix} = \begin{cases} \text{if } |\psi_f - \psi_1| < \frac{\pi}{2} & \text{then } \begin{cases} \psi = \psi_1 \\ \theta = \theta_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \\ \text{if } |\psi_f - \psi_1| > \frac{\pi}{2} & \text{then } \begin{cases} \psi = \psi_2 \\ \theta = \theta_2 \\ \gamma = \gamma_2 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} [\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi] \\ \sin \frac{1}{2} [\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi] \\ \operatorname{sgn}(\theta) \cos \frac{1}{2} [\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi] \\ -\operatorname{sgn}(\theta) \sin \frac{1}{2} [\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi] \end{bmatrix}$$

由式(11)可知,若四元数的第1项与第3项相等而第2项与第4项互为相反数,则有 $\theta = \pi/2$,若第1项与第3项互为相反数而第2项与第4项相等,则有 $\theta = -\pi/2$,即:

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi & \text{if } q_1 = q_3 \ \& \ q_2 + q_4 = 0 \\ \frac{1}{2} \pi & \text{if } q_2 = q_4 \ \& \ q_1 + q_3 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi = 2 \arctan 2(q_2, q_1)$$

显然,此时可以确定出 θ 和 $\gamma - \operatorname{sgn}(\theta) \psi$,但无法确定出具体的 γ 及 ψ 。

3 姿态四元数到欧拉角的转换

由以上分析可知,若 $\theta \neq \pm \pi/2$,任意一个姿态四元数,在 $(-\pi, \pi)$ 中均有两组欧拉角与之对应,若 $\theta \rightarrow \pm \pi/2$ 甚至 $\theta = \pm \pi/2$,则有无穷多组欧拉角与任一姿态四元数对应。在由姿态四元数到欧拉角的转换过程中,若所转换的欧拉角不符合姿态控制的利益,则将出现所谓的unwinding现象^[5]。因此在进行上述转换时,需引入姿态控制所对应的飞行器期望姿态,进而对四元数 \rightarrow 欧拉角的转换结果进行引导。

下面根据姿态四元数到欧拉角的映射关系,并参照控制所需的期望姿态,分析姿态四元数到欧拉角的转换。

3.1 姿态小幅调整情形

在诸如姿态稳定控制等的过程中,由于飞行器的姿态变化不大,故可以直接选择较接近期望姿态的那组欧拉角。由式(8)可知: ψ_1 与 ψ_2 (或 γ_1 与 γ_2)相差 π ,因此,比照 ψ_1 或 ψ_2 与期望姿态 ψ_f 的差值即可确定姿态四元数所对应的较合适的一组欧拉角:

3.2 大角度姿态机动情形

如果飞行器需要进行较大幅度的调姿,则在由四元数到欧拉角的转换过程中,单纯衡量某一个角与期望角的远程度是不够的,此时需要综合考虑3个姿态角与期望姿态角的靠近程度,并根据当前姿态与期望姿态间的角程决定转换结果的取舍。

四元数姿态所对应的两组欧拉角与期望欧拉角的贴近程度用 Δ_1 和 Δ_2 来定义:

$$\begin{cases} \Delta_1 = |\psi_f - \psi_1| + |\theta_f - \theta_1| + |\gamma_f - \gamma_1| \\ \Delta_2 = |\psi_f - \psi_2| + |\theta_f - \theta_2| + |\gamma_f - \gamma_2| \end{cases} \quad (14)$$

则,上述思路可用下式来描述:

$$\begin{cases} \text{if } \Delta_1 \leq \Delta_2 & \text{then } \begin{cases} \psi = \psi_1 \\ \theta = \theta_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \\ \text{if } \Delta_1 \geq \Delta_2 & \text{then } \begin{cases} \psi = \psi_2 \\ \theta = \theta_2 \\ \gamma = \gamma_2 \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

若有 $\Delta_1 = \Delta_2$,即两组欧拉角与期望欧拉角的角程相同,则系统无须再做进一步判断,任取一组欧拉角即可。

式(13)仅适用于姿态小幅变化的情形,而式(15)既适用于大角度姿态机动情形,也适用于小角度姿态稳定的场景。

3.3 奇异情况的处理

欧拉角在描述飞行器空间姿态时存在以下3点不足:a)3次旋转的旋转轴可能重合;b)描述姿态时具有周期性;c)即便在 $(-\pi, \pi)$ 中也不具有唯一性。在由四元数导出欧拉角的过程中,这3点不足都将引起奇异现象。第1点会因第1次和第3次旋转的旋转轴重合而导致无法从四元数确定出唯一一组或两组欧拉角,后两点所导致的奇异表现为:在控制过程中,飞行器期望姿态对四元数到欧拉角转换进行了错误的引导。

a)若 $\theta = \pm \pi/2$,若式(3)中第1行第3列的元素为 ± 1 ,即 $\theta = \pm \pi/2$,则此时第1次和第3次旋转轴将发生重合,此时有无穷多组欧拉角与姿态四元数对应。考虑到姿态控制机构的采样周期和控制周期较小,并

假设姿态变化并非特别迅速，为保证由四元数转换出的欧拉角变化较为平缓，则可在 $\theta \rightarrow \pm\pi/2$ 且 γ 和 ψ 变化加快时，使 θ 保持为上一时刻值（即保证 $\theta \neq \pm\pi/2$ ），显然，此时可据 θ 的取值由式（5）或式（7）确定出欧拉角 ψ 和 γ 。

也可以不约束 θ 角，而使 ψ 或 γ 保持为上一时刻值，再由式（9）确定出 $\gamma - \psi$ 或 $\gamma + \psi$ ，进而确定出 γ 或 ψ 。

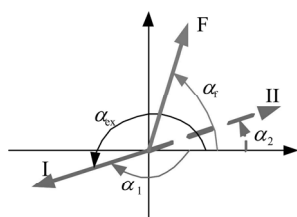
设上一时刻姿态四元数（此时没有奇异）所对应的欧拉角组合为 ψ_0, θ_0 与 γ_0 ，此时结合式（12），姿态四元数所对应的欧拉角可按式近似求取：

$$\begin{cases} \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{if } q_1 = q_3 \ \& \ q_2 + q_4 = 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{if } q_2 = q_4 \ \& \ q_1 + q_3 = 0 \end{cases} \\ \gamma - \text{sgn}(\theta)\psi = 2 \arctan 2(q_2, q_1) \\ \gamma = \gamma_0 \\ \psi = \text{sgn}(\theta) \cdot [\gamma - 2 \arctan 2(q_2, q_1)] \end{cases} \quad (16)$$

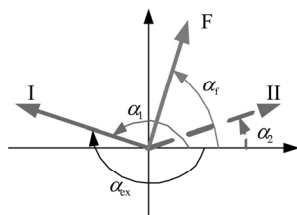
b) 欧拉角逾界情况下的处理。描述空间姿态的欧拉角的取值范围限定在了 $(-\pi, \pi]$ 之内，但由于控制超调、三通道耦合等现象的存在，飞行器姿态会在控制作用下越过 $(-\pi, \pi]$ 边界，若此时仍将四元数转换来的欧拉角严格限定在 $(-\pi, \pi]$ 之内，则欧拉角在控制过程中必将出现突变，这种处理也不符合控制的利益。

假定角度 F 为某通道对应的期望姿态角，角度 I 和角度 II 分别为描述同一姿态的两组欧拉角组合中相应的欧拉角，且角度 I 为当前时刻四元数所对应的那组欧拉角组合中相应的姿态角。在下一时刻，姿态角在控制作用下发生了变化，如描述角度 I 的角 α_{ex} 平滑地越过了一 π 或 π ，即其超出区间 $(-\pi, \pi)$ 的姿态角，如图 3 所示。显然，姿态角 I 在 $(-\pi, \pi)$ 内的描述 α 为

$$\alpha = \alpha_{ex} - \text{sgn}(\alpha_{ex}) \cdot 2\pi \quad (\alpha \text{ stands for } \psi, \theta, \text{ or } \gamma) \quad (17)$$



a) α 为第 1、3 个姿态角



b) α 为第 2 个姿态角

图 3 姿态角与期望姿态角的描述

显然，式（17）的处理将使得控制过程前后两个时刻的姿态所对应的描述值相差较大。角度 $\alpha_{ex} - \text{sgn}(\alpha_{ex}) \cdot 2\pi$ 与 α_{ex} 描述同一姿态角，二者与期望姿态角 F 的描述 α_f 之间的角程分别为

$$\begin{cases} \Delta_{a1} = |\alpha_f - \alpha_{ex}| \\ \Delta_{a2} = |\alpha_f - \alpha| = |\alpha_f - \alpha_{ex} + \text{sgn}(\alpha_{ex}) \cdot 2\pi| = 2\pi - \Delta_{a1} \end{cases} \quad (18)$$

显然，角度 I 与期望姿态角 F 间的角程应取为 $\Delta_a = \min(\Delta_{a1}, \Delta_{a2})$ 。

由图 3 易知， $\Delta_{a1} < \pi, \Delta_{a2} > \pi$ 。在图示情形下显然宜取 $\Delta_a = \Delta_{a1}$ ，而此时所对应的 α_{ex} 已经超越了取值区间 $(-\pi, \pi)$ 。此时不选取 $\alpha_{ex} - \text{sgn}(\alpha_{ex}) \cdot 2\pi$ 为角度 I 的描述是因为 $\Delta_{a2} > \pi$ 将对式（14）产生影响，进而将影响四元数到欧拉角的转换。

基于控制利益的考量，此种情况下有必要对欧拉角的取值空间进行适当拓展。若欧拉角 α 的取值区间为 $(-\pi, \pi)$ ，则 Δ_a 和 α 宜按下式求取：

$$\begin{cases} \Delta_a = [1 + \text{sgn}(\Delta_a - \pi)] \cdot \pi - \Delta_a \\ \alpha = \alpha - [1 + \text{sgn}(\Delta_a - \pi)] \cdot \text{sgn}(\alpha) \cdot \pi \end{cases} \quad (\alpha \text{ stands for } \psi, \theta, \text{ or } \gamma) \quad (19)$$

式（19）中， α 的取值区间由 $(-\pi, \pi)$ 拓展到了 $(-2\pi, 2\pi)$ 。此时式（14）应改写为

$$\begin{cases} \Delta_1 = \sum_{\alpha=\psi_1, \theta_1, \gamma_1} \Delta_a \\ \Delta_2 = \sum_{\alpha=\psi_2, \theta_2, \gamma_2} \Delta_a \end{cases} \quad (20)$$

将式（19）代入式（20）即可准确确定出两组欧拉角与期望姿态欧拉角间的角程，进而可由式（15）确定出四元数所对应的最恰当的一组欧拉角。

事实上，由于控制作用将使飞行器当前姿态向其期望姿态趋近，故在控制作用下， α 的取值将很快回归至 $(-\pi, \pi)$ 区间内，因此“逾界”仅是控制过程中出现的短时行为。

4 数字仿真

在以上描述中，欧拉角的单位为弧度，而在以下仿真示例中，为直观起见，欧拉角的单位取为度。下面通过实例对本文关于姿态四元数到欧拉角转换的论述进行验证。

由文中分析易知，一般情况下，任意一个姿态四元数在 $(-\pi, \pi)$ 内均有两组欧拉角与之对应。在控制过程中，需采用期望姿态角对姿态四元数到欧拉角的转换进行引导，比较两组欧拉角与期望姿态的角程即可确定出对应于姿态四元数且符合姿态控制利益的那组欧拉角。仿真结果见表 1。

表1 期望姿态角引导姿态四元数到欧拉角转换的仿真示例

姿态四元数	欧拉角组合 I ($\psi_1, \theta_1, \gamma_1$)/($^\circ$)	欧拉角组合 II ($\psi_2, \theta_2, \gamma_2$)/($^\circ$)	期望姿态 ($\psi_f, \theta_f, \gamma_f$)/($^\circ$)	Δ_1 ($^\circ$)	Δ_2 ($^\circ$)	转换姿态
[0.3430,0.4073,0.7035,-0.4708]	(150,60,-130)	(-30,120,50)	(-29,121,41)	411	11	组合 II
			(149,61,-131)	3	419	组合 I
			(60,90,-40)	210	210	组合 I 或 II
[0.2302,0.1434,0.6358,-0.7226]	(-170,-30,-80)	(10,-150,100)	(-70,-80,80)	310	170	组合 II
			(-50,-60,-30)	200	280	组合 I
			(-80,-90,10)	240	240	组合 I 或 II
[0.0061,-0.7082,-0.0061,0.7060]	(80,89,-100)	(-100,91,80)	(-10,100,20)	221	159	组合 II
			(50,60,-20)	139	281	组合 I
			(0,90,0)	181	181	组合 I 或 II

在实际的姿态控制过程中，飞行器姿态的描述在控制作用下可能会超越 $(-\pi, \pi)$ 的约定取值范围，而此时一般会取欧拉角在 $(-\pi, \pi)$ 内的主值作为对相应姿态的描述。但是，这种处理将造成欧拉角的突变，并在确

定飞行器当前姿态与其期望姿态之间的角程时出现问题。故此时需全面衡量姿态角各分量与期望姿态相应分量间的角程，对于相应角程逾界（角程大于 π ）的情形按式(19)进行修正处理。相应的仿真结果列于表2。

表2 欧拉角逾界情况下姿态四元数到欧拉角转换的仿真示例

姿态四元数	[0.0001,0.7132,-0.0001,-0.7009]		[0.0123,0.7131,-0.0123,-0.7008]	
	期望姿态($\psi_f, \theta_f, \gamma_f$)/($^\circ$)	欧拉角 I($\psi_1, \theta_1, \gamma_1$)/($^\circ$)	期望姿态($\psi_f, \theta_f, \gamma_f$)/($^\circ$)	欧拉角 II($\psi_2, \theta_2, \gamma_2$)/($^\circ$)
	(10,170,50)	(-1,89,179)	(10,170,50)	(10,80,170)
$\Delta\alpha_I$ ($^\circ$)	(11,81,149)	(11,9,9)	(11,81,229)	(11,9,349)
修正 $\Delta\alpha_I$ ($^\circ$)	(11,81,149)	(11,9,9)	(11,81,131)	(11,9,11)
Δ_I ($^\circ$)	241	29	223	31
		(179,91,-1)		(179,91,1)
$\Delta\alpha_{II}$ ($^\circ$)	(169,79,51)	(169,11,171)	(169,79,49)	(169,11,169)
修正 $\Delta\alpha_{II}$ ($^\circ$)	(169,79,51)	(169,11,171)	(169,79,49)	(169,11,169)
Δ_2 ($^\circ$)	299	351	297	349
转换姿态(修正前)	欧拉角组合 I	欧拉角组合 I	欧拉角组合 I	欧拉角组合 I
转换姿态(修正后)	欧拉角组合 I	欧拉角组合 I	欧拉角组合 II	欧拉角组合 II

表2中，第1组姿态四元数（左侧）对应着两组欧拉角 $-1^\circ, 89^\circ, 179^\circ$ 及 $179^\circ, 91^\circ, -1^\circ$ ，对于期望姿态 $10^\circ, 170^\circ, 50^\circ$ ，两组欧拉角各分量对应的角程均未逾界，故无需对相应角程进行修正，直接取角程分量之和最小的那组欧拉角作为姿态四元数所对应的姿态欧拉角即可。而对于第2组姿态四元数（右侧），其所对应的两组欧拉角分别为 $-1^\circ, 89^\circ, -179^\circ$ 及 $179^\circ, 91^\circ, 1^\circ$ ，对比二者相对于飞行器期望姿态的角程可发现欧拉角组合I所对应的角程较大。但由于欧拉角组合I所对应角程的某些分量逾界了，因此这里需按式(19)进行相应修

正，进而可以确定姿态四元数对应于欧拉角组合II，只是这里角程逾界的欧拉角分量需在 $(-2\pi, 2\pi]$ 区间内进行描述。

表2中数据可认为其是对姿态控制过程中飞行器姿态变化的一种模拟，两组姿态分别描述控制过程中前后两个采样点的对应姿态。若直接采用式(14)和式(15)进行判断，则所得到的欧拉角将发生突变，这显然不符合控制变化过程的连续性。而若采用式(18)及式(19)进行相应的修正，并对欧拉角的取值范围进行适当拓展，则可得到最符合控制利益的欧拉角。

姿态变化过程中可能会遇到奇异现象。比如，若某时刻出现了姿态四元数第 1 项与第 3 项相等，且其第 2 项与第 4 项互为相反数的现象，则此时有 $\theta=\pi/2$ ，并可确定出 $\gamma-\psi$ ，但却不能具体确定出 γ 和 ψ 的值；又如，若某时刻出现了姿态四元数第 1 项与第 3 项互为相反数，而其第 2 项与第 4 项相等的现象，则有 $\theta=-\pi/2$ ，并可确定出 $\gamma+\psi$ ，但不能具体确定出 γ 和 ψ 的值。

令上一时刻姿态四元数（此时没有奇异）所对应的欧拉角组合为 ψ_0, θ_0 与 γ_0 与 ψ ，则此时（发生奇异）可按式（16）近似确定姿态四元数到欧拉角的转换结果，仿真结果列于表 3 所示。

表 3 奇异情况下姿态四元数到欧拉角转换的仿真示例

姿态四元数	欧拉角组合 (ψ, θ, γ) / (°)	前一时刻欧 拉角 γ_0 / (°)	转换姿态/(°)
[0.6964, 0.1228, 0.6964, -0.1228]	$\theta=90$ $\gamma-\psi=20$	$\gamma_0=170$	$\psi=150, \theta=90, \gamma=170$
		$\gamma_0=10$	$\psi=-10, \theta=90, \gamma=10$
		$\gamma_0=90$	$\psi=70, \theta=90, \gamma=90$
		$\gamma_0=-40$	$\psi=-60, \theta=90, \gamma=-40$
[0.5417, 0.4545, -0.5417, 0.4545]	$\theta=-90$ $\gamma+\psi=80$	$\gamma_0=170$	$\psi=-90, \theta=-90, \gamma=170$
		$\gamma_0=10$	$\psi=70, \theta=-90, \gamma=10$
		$\gamma_0=90$	$\psi=-10, \theta=-90, \gamma=90$
		$\gamma_0=-40$	$\psi=120, \theta=-90, \gamma=-40$

将满足 $\theta=90^\circ, \gamma-\psi=20^\circ$ 的任意欧拉角组合代入式（1）均可得到姿态四元数 $q_1 = [0.6964, 0.1228, 0.6964, -0.1228]$ ，因此 q_1 对应着无穷多组欧拉角组合，即由 q_1 无法确定出确切的一组或两组欧拉角。同样，将满足 $\theta=-90^\circ, \gamma+\psi=80^\circ$ 的任意欧拉角组合代入式（1）均可得到姿态四元数 $q_2 = [0.5417, 0.4545, -0.5417, 0.4545]$ ，故 q_2 也无法确定出确切的一组或两组欧拉角。在将 γ 保持为上一时刻值的前提下可以完成姿态四元数到欧拉角的转换，在姿态控制过程中，这种处理还可保证姿态角变化的连续性。

5 结 论

航天飞行器的姿态运动方程多是基于姿态四元数的，而给定的期望姿态又是欧拉角形式的，如果飞行器姿态控制所采用的姿态运动模型是基于欧拉角的，则此时必定需要将飞行器的姿态四元数转换为欧拉角。姿态四元数所导出的任意一组欧拉角均可准确描述飞行器的空间姿态，但其未必符合当前姿态控制的利益。本论文以飞行器姿态为纽带，依据姿态四元数与飞行器姿态、欧拉角与飞行器姿态之间的内在关系，对各种可能出现的情形进行了详尽的分析。

在存在大角度姿态机动的场景中，鉴于欧拉角姿态描述方式本身无法回避奇异现象的存在，建议采用无奇异的姿态运动模型（如基于四元数或拟欧拉角^[6-9]的姿态运动模型），将以欧拉角形式给定的期望姿态转换成期望的姿态输入（姿态四元数或姿态拟欧拉角），进而构建姿态控制律，并对飞行器姿态进行控制。

参 考 文 献

- [1] 黄圳圭. 航天器姿态动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
- [2] 田春华. 卫星姿态控制系统的分析、设计和仿真研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.
- [3] 张帆, 曹喜滨, 邹经湘. 一种新的全角度四元数与欧拉角的转换算法[J]. 南京理工大学学报, 2002, 26(4): 376-380.
- [4] 辛岩, 陈磊, 王巍. 大角度范围内四元数转化为欧拉角的算法[C]. 桂林: 全国第十二届空间及运动体控制技术学术会议, 2006.
- [5] Bhat S, Benstein D. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotation motion and the unwinding phenomenon[J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(1): 63-70.
- [6] 荆武兴, 黄文虎, 吴瑶华, 等. 航天器姿态机动的拟欧拉角反馈控制[J]. 宇航学报, 1994, 15(2): 41-47.
- [7] Xia X, Jing W, Li C, Gao C. Time-shared scheme design for attitude control system during space separation[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(2):108-116.
- [8] Jing W, Xia X, Gao C, Wei W. Attitude control for spacecraft with swinging large-scale payload[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2011, 24(3): 309-317.