大角度范围内四元数转化为欧拉角的算法

辛岩[1,2]，陈磊[1]，王巍[2]
（1.国防科学技术大学 航天与材料工程学院，湖南 长沙 410073；2.上海航天控制工程研究所，上海 200233）

摘要：提出了一种四元数转化为大范围欧拉角的新算法，与一般资料中介绍的算法不同的是，该算法适用的欧拉角的范围可达到φ、θ、$\psi\in(-\pi,\ \pi)$。并采用数学仿真，分别在绕俯仰轴机动 180 度、绕偏航轴机动正 90 度和绕偏航轴机动负 90 度的情况下，验证了算法的正确性。

关键词：大角度；四元数；欧拉角；转化算法；仿真

0 引言

由于欧拉角可以由姿态敏感器直接测量，故在卫星姿态控制规律中得到普遍采用。但欧拉角表示的姿态方程在大角度时会出现奇异问题，因此在进行姿态偏差较大或大角度机动的姿态控制系统设计时，往往采用四元数表示的运动学方程。因而，把四元数转化为工程上常用的欧拉角是十分必要的。一般的资料或参考书上所介绍的两者之间的转化公式仅仅适用于φ、θ、$\psi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$的情况，而在大姿态偏差和大角度姿态机动的情况下，该角度范围已不能满足要求。因此本文提出了一种大角度范围内将四元数转化为欧拉角的算法，将上述欧拉角范围扩展到φ、θ、$\psi\in(-\pi,\ \pi)$。

1 姿态的描述方法及问题的提出

卫星的姿态是与卫星固联的本体坐标系相对参考坐标系的方位。卫星的本体坐标轴x_b，y_b，z_b相对参考坐标系$ox_ry_rz_r$的方向确定了卫星的姿态，如图 1 所示。描述这些方向的元素称为姿态参数。姿态参数有多种形式，各种姿态参数之间可以相互转换，同时相对各种参考坐标的姿态也可相互转换。工程中常用的姿态描述方法是欧拉角和四元数这两种姿态参数。所以下面仅对这两种姿态参数进行介绍。

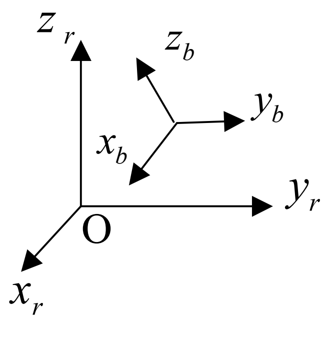

图 1 卫星姿态的描述

1.1 欧拉角式

欧拉角描述法源于欧拉定理，即刚体绕固定点的角位移可以由绕该点的若干次有限转动合成。因此，可将参考坐标系绕不同坐标轴连续旋转三次得到卫星本体坐标系，每次的旋转轴取为被旋转坐标系的某一轴，每次的旋转角就称为欧拉角。这样得到的欧拉旋转轴和角就具有明确、直接的几何意义。根据旋转轴的不同选取，共有 12 种旋转顺序，可分为两类，第一类：对称旋转（6 种），第二类：非对称旋转（6 种）。描述三轴稳定卫星一般采用 3-1-2 非对称旋转，本文将统一采用 3-1-2 旋转式，如图 2。（这里的 3、1、2 分别代表被旋转坐标系的 z、x、y 轴）。

根据坐标转换矩阵的基础理论知识，得出采用 3-1-2 旋转顺序表示的姿态矩阵为：

$$A_{312}(\psi,\phi,\theta)=R_y(\varphi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta c\psi-s\phi s\theta s\psi & c\theta s\psi+s\varphi s\theta c\psi & -c\varphi s\theta \\ -c\varphi s\psi & c\varphi c\psi & s\varphi \\ s\theta c\psi+s\varphi c\theta s\psi & s\theta s\psi-s\varphi c\theta c\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中，字符“c”，“s”分别为“cos”和“sin”的缩写形式。

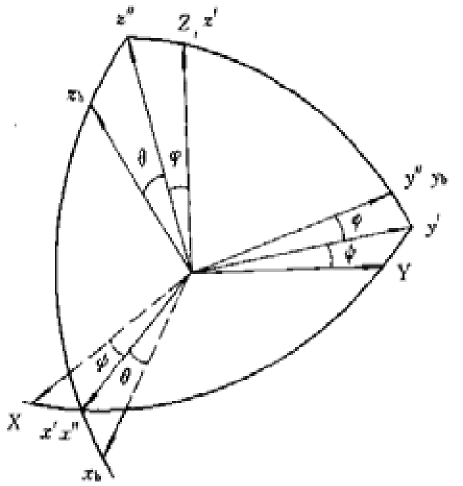

图 2　3-1-2 欧拉角转动

1.2 四元数式

欧拉角有奇点位置存在，这将引起计算上的一系列问题。而利用四元数可避免奇点问题的出现，而且转换概念清晰，应用灵活，被广泛地应用于卫星姿态确定的算法设计中。

定义四元数 q 为：

$$q=\begin{bmatrix} q_0 \\ Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix},$$

式中：$q_0=\cos(\dfrac{\varphi}{2})$；$Q=n\sin(\dfrac{\varphi}{2})$（$n$ 为单位欧拉轴；φ 为转动的欧拉角）。

同样，按 3-1-2 转序时四元数姿态矩阵 $B(q)$ 可表示为：

$$B(q)=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_3+2q_1q_2 & -2q_0q_2+2q_1q_3 \\ -2q_0q_3+2q_1q_2 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 \\ 2q_0q_2+2q_1q_3 & -2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.3 四元数与欧拉角的相互转化

因式（1）与（2）表示同一变换，因此，两矩阵的对应元素相等，由此可得到四元数转化为

欧拉角的公式如下：

$$\varphi=\arcsin A_{23}=\arcsin B_{23}=\arcsin(2q_0q_1+2q_2q_3) \tag{3}$$

$$\theta=arctg(-\frac{A_{13}}{A_{33}})=arctg(-\frac{B_{13}}{B_{33}})=arctg(\frac{2q_0q_2-2q_1q_3}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}) \tag{4}$$

$$\psi=arctg(-\frac{A_{21}}{A_{22}})=arctg(-\frac{B_{21}}{B_{22}})=arctg(\frac{2q_0q_3-2q_1q_2}{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}) \tag{5}$$

式中，A_{mn} 指（1）式矩阵中第 m 行，第 n 列对应的元素，B_{mn} 指（2）式矩阵中第 m 行，第 n 列对应的元素，以下同。

但上述三式仅适用于 φ、θ、$\psi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的情况。当 φ、θ、$\psi\in(-\pi,\ \pi)$ 时，如果还用这三式求欧拉角，将造成仿真的失败。因此，必须考虑转化算法的 φ、θ、ψ 值域拓展问题，以便能适合大角度机动时的姿态控制系统的仿真。本文设计了一种大角度范围内将四元数转化为欧拉角的算法，对 φ、θ、ψ 的值域进行拓展，并用数学仿真对该算法进行验证。

2 值域拓展算法

当对卫星的一个轴进行姿态机动时，由于存在稳定性问题，另外两个轴姿态角的变化一般不会很大。所以，这里在提出值域拓展算法的时候引入一个假设：拓展一个姿态角值域时，假定另外两个姿态角在 $(-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2})$ 之间变化。则在 $(-\pi\sim\pi)$ 区间内，可以设计如下的算法。

2.1 算法设计

1° 对于 φ 角

a. $A_{22}\geq 0$或者$A_{33}\geq 0$，　即$\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时，

$$\varphi=\arcsin A_{23}=\arcsin B_{23};$$

b. $A_{22}<0\ \&\ A_{33}<0\ \&\ A_{23}\geq 0$, 即$\varphi\in(\frac{\pi}{2},\ \pi]$时，

$$\varphi=\pi-\arcsin A_{23}=\pi-\arcsin B_{23};$$

c. $A_{22}<0\ \&\ A_{33}<0\ \&\ A_{23}\leq 0$, 即$\varphi\in[-\pi,-\frac{\pi}{2})$时，

$$\varphi=-\pi-\arcsin A_{23}=-\pi-\arcsin B_{23}。$$

2° 对于 θ、ψ 角

按 $\cos\varphi$ 是否为零，可分两种情况：

1）当 $\cos\varphi=0$ 时，记 $\gamma=\theta+sign(\sin\varphi)\psi$，则由式（1）得 $A_{312}(\psi,\phi,\theta)$ 可写为：

$$A_{312}(\psi,\phi,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma sign(\sin\varphi) & 0\\ 0 & 0 & \sin\varphi\\ \sin\gamma & -sign(\sin\varphi)\cos\gamma & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

显然，满足条件的 θ、ψ 有无穷多个。针对这种奇异情况，如果假设：在一个仿真步长内，姿态角的变化不会太大，至多不会超过 90°，在仿真中，可让 θ、ψ 保持前一时刻的值。

2）当 $\cos\varphi\neq 0$ 时

i）对于 ψ 角

考虑到在$\psi=\frac{\pi}{2}$时，$tg\psi\to\infty$，于是在$\left|-\frac{A_{21}}{A_{22}}\right|>2$时，切换为$ctg\psi=-\frac{A_{22}}{A_{21}}$来计算。

a. $-\frac{A_{21}}{A_{22}}>2\ \&\ A_{22}\ge 0$，即$\psi\in(arctg2,\frac{\pi}{2}]$时，$\psi=arcctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})=\frac{\pi}{2}-arctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})$；

b. $-\frac{A_{21}}{A_{22}}>2\ \&\ A_{22}\le 0$，即$\psi\in[-\frac{\pi}{2}，arctg2-\pi)$时，$\psi=-\pi+arcctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})=-\frac{\pi}{2}-arctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})$；

c. $2\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}\ge 0\ \&\ A_{22}>0$，即$\psi\in[0，arctg2]$时，$\psi=arctg(-\frac{A_{21}}{A_{22}})$；

d. $2\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}\ge 0\ \&\ A_{22}<0$，即$\psi\in[arctg2-\pi,-\pi]$时，$\psi=-\pi+arctg(-\frac{A_{21}}{A_{22}})$；

e. $0\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}>-2\ \&\ A_{22}>0$，即$\psi\in[0，arctg(-2))$时，$\psi=arctg(-\frac{A_{21}}{A_{22}})$；

f. $0\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}>-2\ \&\ A_{22}<0$即$\psi\in(\pi+arctg(-2)，\pi]$时，$\psi=\pi+arctg(-\frac{A_{21}}{A_{22}})$；

g. $-2\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}\ \&\ A_{22}\ge 0$，即$\psi\in[-\frac{\pi}{2}，arctg(-2)]$时，$\psi=-\pi+arcctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})=-\frac{\pi}{2}-arctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})$；

h. $-2\ge-\frac{A_{21}}{A_{22}}\ \&\ A_{22}\le 0$，即$\psi\in[\frac{\pi}{2}，\pi+arctg(-2)]$时，$\psi=arcctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})=\frac{\pi}{2}-arctg(-\frac{A_{22}}{A_{21}})$。

i）对于θ角，其规律同ψ角，这里不再赘述。

2.2 算法流程

φ和ψ的算法的流程图如图 3、图 4 所示，θ的算法的流程图与ψ类似，这里不再给出。

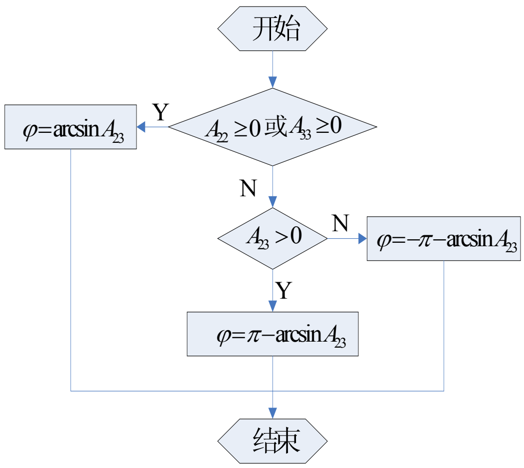

图 3　φ的求取算法流程图

3 仿真结果

对卫星绕俯仰轴机动 180 度，以及绕偏航轴机动正负 90 度这三种情况分别运用本文设计的算法进行了数字仿真试验加以验证，结果如图 5～7 所示。

需要说明的是，这里并没有对姿态进行精确控制，只是为了要验证算法的正确性，强制使姿态角振荡，所以控制的效果不是很理想。

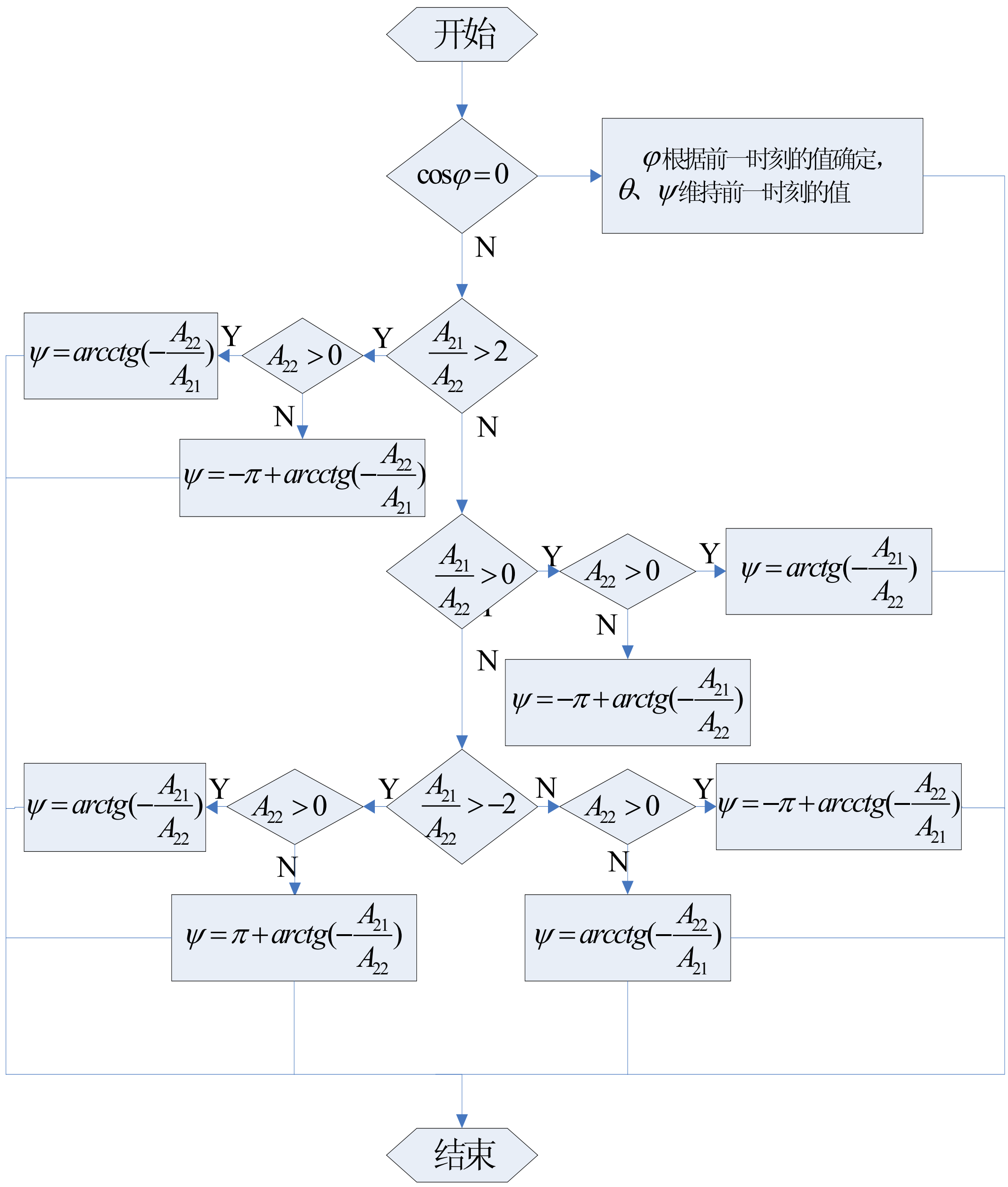

图 4　ψ 的求取算法流程图

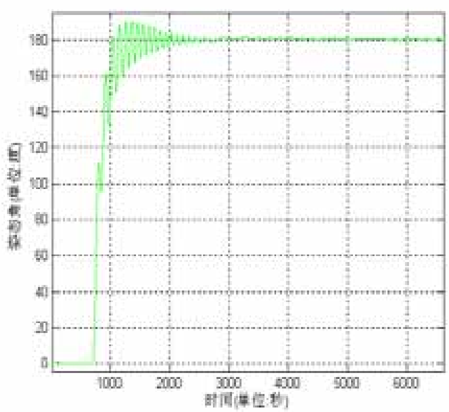

图 5 卫星绕俯仰轴机动 180 度

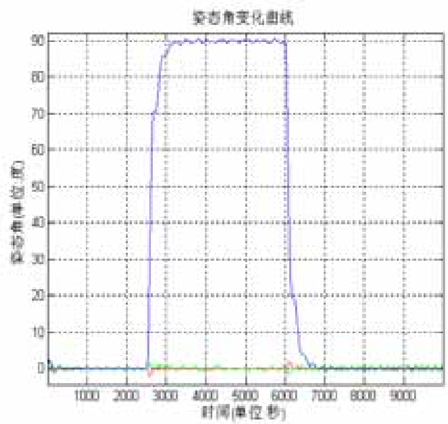

图 6 卫星绕偏航轴机动正 90 度

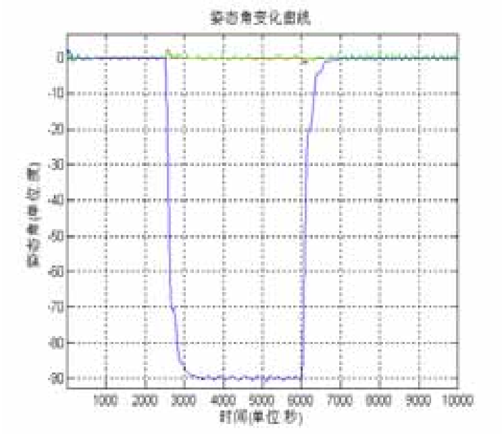

图 7 卫星绕偏航轴机动负 90 度

4 结论

本文对已有的欧拉角和四元数之间的转化关系进行了分析，在此基础上提出了转化算法的值域拓展问题，解决了大角度情况下欧拉角存在奇异性的问题。通过数学仿真可以看出，所设计的算法可以实现大角度的姿态机动，而且没有出现异常。所以，设计的算法完全合理，可以应用到各种情况。

参考文献

[1] 章仁为.卫星轨道姿态动力学与控制[M].北京：北京航空航天大学出版社出版发行，1998.

[2] 黄圳圭.航天器姿态动力学[M].长沙：防科技大学出版社，1997.11.

[5] 陈万春等.基于四元数的大角度姿态机动反馈线性化控制.飞航导弹, 1999,No.5

作者简介

辛岩 女 1977.5 出生 工程师 卫星姿轨控系统设计

陈磊 男 1974.4 出生 副教授 航空宇航科学与技术

王巍 男 1981.11 出生 工程师 卫星姿轨控系统设计