前　言

四元数是 1843 年由英国数学家哈密顿(W.R.Hamilton)发现或者说发明的，至今已一个半世纪了。但在相当长的一段时间里它没有为人们所重视，更没有得到实际的应用。人们将复平面推广到四维空间还是近期的事。随着刚体动力学理论的发展，人们发现利用四元数和四元数矩阵可以较好地处理刚体运动学特别是刚体运动分析的理论问题和运动控制的实际问题，尤其是发现其中的旋转矩阵运算与单位四元数运算非常相似，从而使四元数方法在理论力学中开始获得应用[88]~[94]。从此，四元数日益引起人们浓厚的兴趣。在光学领域中，特别是在偏振光理论中，人们发现四元数表示也是一种新的有实用价值的方法[95]~[96]。20 世纪 70 年代以来，由于计算机图形学的发展，各学科的交叉日益频繁，使许多古老的理论，这其中也包括四元数和四元数矩阵理论又重新找到了用武之地。1985 年，四元数方法被 K.Shoemake 引入到计算机图形学[97]~[98]，从此该技术在计算机动画和真实感图形绘制方面得到了广泛的应用，他提出的四元数曲线方法现在还成功地应用于刚体动力学的旋转运动模拟中。近几年来，在进行航天器姿态控制及加速度计三轴转台测试的动态误差量分析中以及飞行力学中也都开始用到了四元数和四元数矩阵的方法[99]~[101]，而且该方法表现出许多优良的特性。数学的其他分支也有不少地方用到了四元数和四元数矩阵的方法，1975 年 Andesón 首先研究了四元数正态模型，从此人们在导出各种精确分布中也都应用了四元数方法[102]~[104]；又如在 Riemann 对称空间的截面曲率估计问题和其他几何问题中也都应用了四元数和四元数矩阵的方法[105]~[106]。可以预见，随着科学技术的发展和计算机应用的日

益广泛和深入,四元数和四元数矩阵将会得到更广泛的应用。

从代数学观点看,实数域的代数扩域(体)只有3种:实数域、复数域及四元数体。由于四元数的乘法不满足交换律,使得对它的研究要比对实数、复数的研究困难得多,这大概也是四元数与四元数矩阵理论长期发展较慢的原因之一。但是近20年来,特别是我国的代数学领域,对四元数和四元数矩阵论的研究已经形成了一个研究热点。在20世纪80年代初,谢邦杰教授给出了四元数矩阵行列式的一种新的定义,并对四元数矩阵研究做了不少开创性的工作,激发了四元数矩阵研究的发展态势,不少学者投入到这一研究领域。特别是20世纪90年代以来,陈龙玄教授用群论的观点又给出了四元数矩阵行列式的另一种定义,并引入了四元数矩阵重行列式的概念,而使得四元数矩阵的研究进入了一个新的阶段。在这短短20多年中,四元数矩阵的研究取得了许多重要的成果。鉴于目前国内还没有见到有关四元数矩阵方面的专门著作,出于对四元数和四元数矩阵的浓厚兴趣,作者在研究的基础上,参考和综合散见于各学术期刊上有关四元数矩阵方面论文中的最新成果,撰写成本书,抛砖引玉,以期有利于同行相互交流,促进四元数矩阵研究的开展。

本书共分六章。第一章介绍四元数与四元数体。第二章讲述四元数矩阵论的基本知识和基本运算。考虑到四元数矩阵行列式定义的难度,第三章用一整章专门讲述四元数矩阵行列式和重行列式的定义及基本性质。主要叙述陈龙玄意义下的四元数矩阵行列式及重行列式的定义,并介绍了四元数矩阵行列式的其他定义以及这些定义之间的关系。第四章讲述四元数矩阵的其他数值特征,包括四元数矩阵的特征值、特征多项式和谱、四元数矩阵的秩、奇异值、迹等,并讨论了四元数自共轭矩阵的性质。第五章讲述四元数矩阵中的不等式,介绍了凸函数、双随机矩阵、控制不等式的有关知识及一些经典数值不等式,给出了有关四元数矩阵的特征

值、奇异值、迹及行列式的一系列不等式。这一章内容较多，其中有些不等式就是对于常规矩阵来说也是新的。第六章讲述了四元数体上的二次型和四元数矩阵的正定性，包括四元数正定矩阵和亚正定矩阵的性质及判定。限于篇幅，还有许多好的成果未能写进去，实为憾事。

囿于作者的水平，错漏和不妥之处在所难免，殷望批评指正。

最后，作者衷心感谢长沙电力学院学术专著出版基金委员会提供的资助。对所引用的著作和论文的作者一并深表谢意。

写完本书，正值作者62岁，感慨良多，得小词一首：

满 江 红

六十二春，弹指间，流光易逝。惊回首，往事如烟，不计得失。毕业支边内蒙古，暮岁归来逢盛世。总难忘，几度坎坷中，时正值。　体常炼，脑勤思；不气馁，莫停滞。任风云变幻，松姿挺直。卌年杏坛培桃李，一支秃笔算数字。喜余年，犹壮心未已，求真实。

这首词和本书一样，不过是为了表达作者对数学和数学教育事业的挚爱与情怀。

李文亮
2002年3月
于长沙电力学院

符 号 说 明

$a\in S$	元素 a 属于集合 S
$a\overline{\in}S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1\subset S_2$	集合 S_1 为集合 S_2 的子集
$S_1\cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1\cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
N	正整数集合
R^+	正实数集合
R	实数集合
C	复数集合
Q	四元数集合
$R^{n\times m}$	实 $n\times m$ 阶矩阵集合
$C^{n\times m}$	复 $n\times m$ 阶矩阵集合
$Q^{n\times m}$	四元数 $n\times m$ 阶矩阵集合
$U^{n\times n}$	n 阶广义酉矩阵集合
$U^{n\times k}$	$n\times k$ 广义酉矩阵集合
$SC_n(Q)$	n 阶四元数自共轭阵集合
$SC_n^-(Q)$	n 阶四元数斜自共轭阵集合
$SC_n(R)$	n 阶实对称矩阵集合
$SC_n(C)$	n 阶复厄米特(Hermite)阵集合
$SC_n^>(Q)$	n 阶四元数正定矩阵集合
$SC_n^\geqslant(Q)$	n 阶四元数半正定矩阵集合
$SC_n^>(R)$	n 阶实正定矩阵集合
$P_n^>(Q)$	n 阶四元数亚正定矩阵集合

$P_n^{\geqslant}(Q)$	n 阶四元数亚半正定矩阵集合
I_n	n 阶单位阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s)$	准对角矩阵
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\overline{A}$	矩阵 A 的共轭
$A^*=\overline{A^{\mathrm{T}}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 A 的共轭转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$P(i,j)$	换法矩阵　置换矩阵
$P(i,j_\lambda)$	消法矩阵
$P(i(\lambda))$	倍法矩阵
$\dim V$	空间 V 的维数
$\det A=\|A\|$	方阵 A 的行列式
$\\|A\\|$	矩阵 A 的重行列式
$\mathrm{qdet}A$	方阵 A 的拟行列式
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹
$\mathrm{rank}A$	矩阵 A 的秩
A^{σ}	四元数方阵 A 的导出阵
$\lambda_s(A)$	方阵 A 的第 s 个特征值
$\sigma_s(A)$	矩阵 A 的第 s 个奇异值
$(A)_{ij}$	矩阵 A 的 i 行 j 列处的元素
$R(A)$	矩阵 A 的自共轭支
$S(A)$	矩阵 A 的斜自共轭支
$\overline{q}$	数 q 的共轭数
$\|q\|$	数 q 的模
$\mathrm{Re}(q)$	数 q 的实部
$\mathrm{Im}(q)$	数 q 的虚部

$N(q)$	四元数 q 的矩或范数
$a \sim b$	四元数 a 相似于 b
$A \sim B$	矩阵 A 与矩阵 B 相似
$F_A(\lambda)$	矩阵 A 的重特征多项式
$F_A^q(A)$	矩阵 A 的拟特征多项式
$A \otimes B$	矩阵 A 与 B 的直积,Kronecker 积
$A \circ B$	矩阵 A 与 B 的圈积,Hadamard 积
$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j$	$A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_m$ 的缩写
$A_1 \oplus A_2$	矩阵 A_1 与 A_2 的直和
$\bigoplus_{j=1}^{m} A_j$	$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ 的缩写
$A > B$	A 与 B 都是自共轭阵,且 $A-B$ 是正定矩阵
$\forall$	对一切　任意
$\exists$	存在
$\Rightarrow$	蕴含或推出
$\Leftrightarrow$	充要条件,等价,当且仅当
$\square$	定理或命题证完
$\mathscr{P}(Q)$	Q 上的广义双随机矩阵集合
$\mathscr{P}_s(Q)$	Q 上的广义次双随机矩阵集合
$x \prec y$	向量 y 优于向量 x　向量 x 被 y 严控
$x \prec_w y$	向量 y 弱优于向量 x　向量 x 被 y 控制
A/A_k	矩阵 A 关于它的 k 阶顺序主子阵 A_k 的 Schur 补

目　　录

第五章　四元数矩阵中的不等式

第六章　四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性

第一章　四元数与四元数体

本章主要介绍四元数的概念、性质及运算，并论及与实数、复数相比较，四元数的一些特殊之处.

§1.1　四元数的定义　四元数的加法与乘法

在本书中，我们用 R 表示实数的全体，R^+ 表示正实数的全体，C 表示复数的全体.

定义 1.1.1　设

$$q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k},a,b,c,d\in R \tag{1.1.1}$$

其中 i,j,k 满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1 \tag{1.1.2}$$

$$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j} \tag{1.1.3}$$

则称形为式(1.1.1)的数 q 为**四元数**，而称 a 为四元数 q 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}(q)=a$，称 $b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 为 q 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}(q)=a\mathrm{i}+b\mathrm{j}+c\mathrm{k}$. 四元数的全体记为 Q，即

$$Q=\{a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\mid a,b,c,d\in R\} \tag{1.1.4}$$

特别当 $c=d=0$ 时，则式(1.1.1)表示的四元数就是复数了，这时 $q=a+b\mathrm{i}\in C$. 进而当 $b=c=d=0$ 时，则式(1.1.1)表示的四元数就是实数了，这时 $q=a\in R$. 故四元数是实数和复数的扩充.

设两个四元数

$$q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k} \in Q$$
$$q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k} \in Q$$

则两个四元数的相等、加法与乘法分别规定如下：

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2 \tag{1.1.5}$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i} + (c_1 + c_2)\mathrm{j} + (d_1 + d_2)\mathrm{k} \tag{1.1.6}$$

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &+ (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathrm{i} \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - d_2b_1)\mathrm{j} \\ &+ (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

特别，当 $q_1 = q_2 = q$ 时，有

$$q^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2ab\mathrm{i} + 2ac\mathrm{j} + 2ad\mathrm{k} \tag{1.1.7$'$}$$

四元数 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ 的**共轭** $\bar{q}$ 定义为

$$\bar{q} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k} \tag{1.1.8}$$

容易验证四元数的加法满足**结合律**与**交换律**，乘法满足**结合律**，乘法对加法满足**分配律**. 但乘法不满足交换律. 事实上，我们有

$$\begin{aligned} q_2q_1 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &+ (a_1b_2 + b_1a_2 - \overline{c_1d_2 - d_1c_2})\mathrm{i} \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 - \overline{b_2d_1 - d_2b_1})\mathrm{j} \\ &+ (a_1d_2 + d_1a_2 - \overline{b_1c_2 - c_1b_2})\mathrm{k} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

可见对四元数一般 $q_1q_2 = q_2q_1$ 不一定成立，但 q_1 与 q_2 中有一个是实数时，比如 $q_1 = a \in R, q_2 = q \in Q$，则有

$$aq = qa, a \in R, q \in Q$$

因为四元数乘法不满足交换律，这是四元数和四元数矩阵理论研究起来十分困难之所在.

对任意 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$，定义 q 的**矩**为

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0 \tag{1.1.10}$$

q 的迹为

$$T(q)=q+\bar{q}=2a. \tag{1.1.11}$$

定义四元数 q 的模为

$$|q|=\sqrt{N(q)}=\sqrt{q\bar{q}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \tag{1.1.12}$$

而把模为 1 的四元数定义为**单位四元数**.

关于四元数的和与积的共轭有如下性质:

$$\overline{q_1+q_2}=\bar{q}_1+\bar{q}_2 \tag{1.1.13}$$

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1 \tag{1.1.14}$$

式(1.1.13)容易验证,我们来证明式(1.1.14).由式(1.1.7),有

$$\begin{aligned}\overline{q_1q_2}=&(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&-(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\mathrm{i}\\&-(a_1c_2+c_1d_2+b_2d_1-d_2b_1)\mathrm{j}\\&-(a_1d_2+c_2b_1+b_1c_2-c_1b_2)\mathrm{k}\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

又

$$\begin{aligned}\bar{q}_2\bar{q}_1&=(a_2-b_2\mathrm{i}-c_2\mathrm{j}-d_2\mathrm{k})(a_1-b_1\mathrm{i}-c_1\mathrm{j}-d_1\mathrm{k})\\&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&\quad+(-a_1b_2-b_1a_2-\overline{c_1d_2-d_1c_2})\mathrm{i}\\&\quad+(-a_1c_2-c_1a_2-\overline{b_2d_1-d_2b_1})\mathrm{j}\\&\quad+(-a_1d_2-d_1a_2-\overline{b_1c_2-b_2c_1})\mathrm{k}\\&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&\quad-(a_1b_2+b_1a_2+\overline{c_1d_2-d_1c_2})\mathrm{i}\\&\quad-(a_1c_2-c_1a_2+\overline{b_2d_1-d_2b_1})\mathrm{j}\\&\quad-(a_1d_2-d_1a_2+\overline{b_1c_2-c_1b_2})\mathrm{k}\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

比较式(1.1.15)与式(1.1.16)即得式(1.1.14).

应当特别注意,在四元数乘法中,对复数成立的公式 $\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2$ 在四元数乘法中一般不再成立,而只成立公式(1.1.14),但当 q_1 与 q_2 中有一个是实数时,则有

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2,\text{其中 } q_1 \text{ 或 } q_2\in R \tag{1.1.17}$$

对四元数的模、矩和实部，下述公式成立：

$$|\bar{q}| = |q| \tag{1.1.18}$$

$$|q_1q_2| = |q_1||q_2| \tag{1.1.19}$$

$$N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2) \tag{1.1.20}$$

$$\mathrm{Re}(q_1 + q_2) = \mathrm{Re}(q_1) + \mathrm{Re}(q_2) \tag{1.1.21}$$

$$\mathrm{Re}(q_1q_2) = \mathrm{Re}(q_2q_1) \tag{1.1.22}$$

$$|q_1 + q_2| \leqslant |q_1| + |q_2| \tag{1.1.23}$$

式(1.1.23)中等号成立当且仅当$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \lambda \geqslant 0$，这时 $q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}$，$q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}$ 称为**同向平行**.

$$2|q_1q_2| \leqslant |q_1|^2 + |q_2|^2 \tag{1.1.24}$$

又当 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$ 时，还有

$$q + \bar{q} = 2a \tag{1.1.25}$$

$$\mathrm{i}q - q\mathrm{i} = 2b \tag{1.1.26}$$

$$\mathrm{j}q - q\mathrm{j} = 2c \tag{1.1.27}$$

$$\mathrm{k}q - q\mathrm{k} = 2d \tag{1.1.28}$$

另外，式(1.1.19)～(1.1.23)均可推广到任意有限多个的情形.

命题 1.1.1 设 $q_t = a_t + b_t\mathrm{i} + c_t\mathrm{j} + d_t\mathrm{k} \in Q$，$t = 1, \cdots, n$，则

$$\left|\sum_{t=1}^{n} q_t\right| \leqslant \sum_{t=1}^{n} |q_t| \tag{1.1.29}$$

证 由柯西(Cauchy)不等式，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{t=1}^{n} q_t\right|^2 &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} b_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} c_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} d_t\right)^2 \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} a_s\right) + \left(\sum_{t=1}^{n} b_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} b_s\right) \\ &\quad + \left(\sum_{t=1}^{n} c_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} c_s\right) + \left(\sum_{t=1}^{n} d_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} d_s\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(|a_ta_s|+|b_tb_s|+|c_tc_s|+|d_td_s|)\\
&\leqslant \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(a_t^2+b_t^2+c_t^2+d_t^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot(a_s^2+b_s^2+c_s^2+d_s^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\sum_{t=1}^{n}|q_t|\right)^2
\end{aligned}
$$

上式两边开平方,即得式(1.1.29). □

对四元数来说,阿贝尔变换仍成立,即有如下

命题 1.1.2 设 $a_s,b_s\in Q,s=1,\cdots,n$,则有

$$\sum_{s=1}^{n}a_sb_s=\sum_{s=1}^{n-1}(a_s-a_{s-1})\sum_{t=1}^{s}b_t+a_n\sum_{t=1}^{n}b_t \qquad (1.1.30)$$

命题 1.1.3 设 $a_s,b_s,c_s\in Q,s=1,\cdots,n$,若 $|c_1|\geqslant\cdots\geqslant|c_n|$ 且

$$\sum_{s=1}^{k}|b_s|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|a_s|,k=1,\cdots,n \qquad (1.1.31)$$

则
$$\left|\sum_{s=1}^{k}c_kb_k\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|c_kb_k|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|c_s||a_s|,k=1,\cdots,n \qquad (1.1.32)$$

证 由式(1.1.29)即知式(1.1.32)的第一部分成立,故只须证明当 $k\geqslant2$ 时式(1.1.32)的第二部分成立即可.由式(1.1.30)及(1.1.31),有

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{k}|c_sb_s| &= \sum_{s=1}^{k}|c_s||b_s|\\
&=\sum_{s=1}^{k}(|c_s|-|c_{s+1}|)\sum_{t=1}^{s}|b_t|+|c_k|\sum_{t=1}^{k}|b_t|\\
&\leqslant\sum_{s=1}^{k}(|c_s|-|c_{s+1}|)\sum_{t=1}^{s}|a_t|+|c_k|\sum_{t=1}^{k}|a_t|
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=1}^{k} |c_k| |a_k|, \ k=1,\cdots,n \qquad \square$$

注 式(1.1.31),(1.1.32)在证明有关的不等式时常被用到.

§1.2 四元数的乘幂 四元数的三角形式及指数形式

一、四元数的倒数与商

定义 1.2.1 设 $q\in Q$,若存在 $p\in Q$,使得

$$qp = pq = 1 \tag{1.2.1}$$

则称四元数 p 为四元数 q 的**倒数或逆元**,记为 q^{-1},即有

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \tag{1.2.1$'$}$$

命题 1.2.1 四元数 q 存在倒数的充要条件是 $q\neq 0$,且 q 的倒数 q^{-1} 是唯一的,并有

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \tag{1.2.2}$$

证 先证必要性,即证当 q^{-1} 存在时必有 $q\neq 0$. 用反证法,假设 $q=0$,则对任意 $p\in Q$,都有 $qp = pq = 0$,可见这时 q^{-1} 不存在,与已知矛盾. 必要性获证.

再证充分性,设 $q\neq 0$,令

$$p = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \qquad ①$$

则

$$pq = qp = 1 \qquad ②$$

故 q 存在倒数.

最后证倒数的唯一性. 设 q 还有另一倒数 p_1,则亦有

$$p_1 q = q p_1 = 1 \qquad ③$$

于是由式②,③得,$qp_1 - qp = 0$ 即 $q(p_1 - p) = 0$,因 q 存在倒数,

由刚证明的必要性知，$q\neq 0$，从而有 $p_1-p=0$，即 $p_1=p$. 唯一性获证.

由式①，②即知

$$q^{-1}=\frac{\bar{q}}{|q|^2}$$ □

推论 设 $q\in Q$，若存在 $p\in Q$，使得

$$qp=1(\text{或 } pq=1) \tag{1.2.1$''$}$$

则

$$p=q^{-1}$$

证 由 $qp=1$，则 $q\neq 0$，由命题 1.2.1 知，q^{-1}存在. 于是有

$$p=1\cdot p=(q^{-1}q)p=q^{-1}(qp)=q^{-1}\cdot 1=q^{-1}$$

同理可证，当 $pq=1$ 时，亦有 $p=q^{-1}$. □

注 由推论知，要判断一个四元数是否存在倒数，可用式(1.2.1)″代替(1.2.1)进行判断.

命题 1.2.2 设 $q_1,q_2\in Q$，且 $q_1\neq 0,q_2\neq 0$，则有

$$(q_1q_2)^{-1}=q_2^{-1}q_1^{-1} \tag{1.2.3}$$

证 由式(1.2.2)，(1.1.14)，(1.1.12)，有

$$(q_1q_2)^{-1}=\frac{\overline{q_1q_2}}{|q_1q_2|^2}=\frac{\overline{q_1q_2}}{q_1q_2\,\overline{q_1q_2}}=\frac{\bar{q}_2\bar{q}_1}{q_1|q_2|^2\bar{q}_1}$$

$$=\frac{\bar{q}_2\bar{q}_1}{|q_2|^2q_1\bar{q}_1}=\frac{\bar{q}_2}{|q_2|^2}\cdot\frac{\bar{q}_1}{|q_1|^2}=q_2^{-1}q_1^{-1}$$ □

定义 1.2.2 设 $q_1,q_2\in Q$ 且 $q_2\neq 0$，则称 $q_1q_2^{-1}$ 为 q_1 与 q_2 的右商，$q_2^{-1}q_1$ 为 q_1 与 q_2 的左商.

命题 1.2.3 设 $q\in Q$，若 $q\neq 0$，则

$$\bar{q}^{-1}=\overline{q^{-1}} \tag{1.2.4}$$

证 因 $q\neq 0$，由命题 1.2.1 知，q^{-1}存在，且

$$q^{-1}q=1\Rightarrow\overline{q^{-1}q}=1\text{，即 }\bar{q}\,\overline{q^{-1}}=1$$

由命题 1.2.1 之推论即知

$$\bar{q}^{-1}=\overline{q^{-1}}$$ □

二、四元数的乘幂

设 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$, $a, b, c, d \in R$

记
$$x = b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \tag{1.2.5}$$
则
$$x^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$$
于是
$$x^{2n} = (x^2)^n = (-1)^n (b^2 + c^2 + d^2)^n$$
次令
$$h = |x| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \tag{1.2.6}$$
则
$$x^{2n} = (-1)^n h^{2n}$$
由式(1.1.10)知 $ax = xa$ 成立，则由二项式定理有

$$\begin{aligned} q^n &= (a + x)^n \\ &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n \\ &= (C_n^0 a^n + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \cdots + C_n^{2k} a^{n-2k} x^{2k} + \cdots) \\ &\quad + x(C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} x^2 + \cdots + C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} x^{2k} + \cdots) \end{aligned}$$

即得四元数的乘幂公式：

$$\begin{aligned} q^n = {} & [C_n^0 a^n - C_n^2 a^{n-2} h^2 + \cdots + (-1)^k C_n^{2k} a^{n-2k} h^{2k} + \cdots] \\ & + (b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})[C_n^1 a^{n-1} - C_n^3 a^{n-3} h^2 + \cdots \\ & + (-1)^k C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} h^{2k} + \cdots] \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中 $n \in N, h = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. (1.2.8)

三、四元数的三角形式和指数形式

设 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$，且其中 b, c, d 中至少有一个不为零，则

$$\begin{aligned} q &= a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \\ &= a + h\left(\frac{b}{h}\mathrm{i} + \frac{c}{h}\mathrm{j} + \frac{d}{h}\mathrm{k}\right) \\ &= |q|\left[\frac{a}{|q|} + \frac{h}{|q|}\left(\frac{b}{h}\mathrm{i} + \frac{c}{h}\mathrm{j} + \frac{d}{h}\mathrm{k}\right)\right] \end{aligned}$$

即
$$q = |q|(u + vI) \tag{1.2.9}$$

其中 $$u=\frac{a}{|q|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \tag{1.2.10}$$

$$v=\frac{h}{|q|}=\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \tag{1.2.11}$$

$$\mathrm{I}=\frac{b}{h}\mathrm{i}+\frac{c}{h}\mathrm{j}+\frac{d}{h}\mathrm{k} \tag{1.2.12}$$

易知有 $$u^2+v^2=1, \mathrm{I}^2=-1 \tag{1.2.13}$$

故可令 $$u=\cos\theta, v=\sin\theta \tag{1.2.14}$$

从而 $q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}(bcd\neq 0)$可写成如下三角式

$$q=|q|(\cos\theta+\mathrm{I}\sin\theta) \tag{1.2.15}$$

其中 $$\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})=\frac{1}{h}(b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}) \tag{1.2.16}$$

$$\theta=\arctan\frac{v}{u}=\arctan\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}=\arctan\frac{h}{a} \tag{1.2.17}$$

类比复数的三角形式,我们把式(1.2.15)称为四元数的**三角形式**.

显然对于同一个 I,式(1.2.15)具有类似于复数的所有性质.例如,因此可以得出四元数的另一乘幂公式及方根公式:

$$q^n=|q|^n(\cos n\theta+\mathrm{I}\sin n\theta) \tag{1.2.18}$$

$$\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{|q|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{I}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\cdots,n \tag{1.2.19}$$

不难看出,运用公式(1.2.18)来求四元数的乘幂比用公式(1.2.7)更方便些.

公式(1.2.14)~(1.2.19)对不为零的所有四元数成立,当然对一切不为零的实数也成立,而且从公式(1.2.19)还可以看出:

1)当 q 是非实数的四元数时,$\sqrt[n]{q}$有 n 个四元数值;

2)当 q 是非零四元数时,$\sqrt[n]{q}$有无穷多个四元数值,因为这时 $\theta=0$或 π,而 I 取满足 $b^2+c^2+d^2=1$ 的一切形如 $b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的四元数.

又注意到，由式(1.2.13)有

$$\mathrm{I}^2=-1,\quad \mathrm{I}^3=-\mathrm{I},\quad \mathrm{I}^4=1,\cdots \tag{1.2.20}$$

于是有

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{I}\theta}&=1+\mathrm{I}\theta+\frac{\mathrm{I}^2}{2!}\theta^2+\frac{\mathrm{I}^3}{3!}\theta^3+\cdots+\frac{\mathrm{I}^n}{n!}\theta^n+\cdots\\
&=1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}+\cdots+\mathrm{I}[\theta-\frac{1}{3!}\theta^3\\
&\quad+\frac{1}{5!}\theta^5+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\theta^{2k-1}+\cdots]\\
&=\cos\theta+\mathrm{I}\sin\theta
\end{aligned}\tag{1.2.21}$$

从而对四元数 $q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}(bcd\neq 0)$ 又可写成如下**指数形式**：

$$q=|q|e^{\mathrm{I}\theta},\tag{1.2.22}$$

其中 I 如式(1.2.16)所示，θ 如式(1.2.17)所示.

§1.3 四元数的复数表示 四元数的相似关系

一、四元数的复数表示

设 $q\in Q$，即 $q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in R$ 注意到 $\mathrm{ij}=\mathrm{k}$，则 q 可唯一地表示为

$$q=(a_1+a_2\mathrm{i})+(a_3+a_4\mathrm{i})\mathrm{j}\tag{1.3.1}$$

于是令 $z_1=a_1+a_2\mathrm{i}$，$z_2=a_3+a_4\mathrm{i}$，则 q 可唯一地表示为

$$q=z_1+z_2\mathrm{j},\quad z_1,z_2\in C,\quad \mathrm{j}^2=-1\tag{1.3.2}$$

式(1.3.2)称为**四元数的复数表示**.

命题 1.3.1 设四元数 q 的复数表示为式(1.3.2)，则

$$|q|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}\tag{1.3.3}$$

$$\bar{q}=\bar{z}_1-z_2\mathrm{j}\tag{1.3.4}$$

$$q^{-1}=\frac{1}{|q|^2}(\overline{z_1}-z_2\mathrm{j}) \tag{1.3.5}$$

证 我们有

$$\begin{aligned}\bar{q}&=a_1-a_2\mathrm{i}-a_3\mathrm{j}-a_4\mathrm{k}\\&=(a_1-a_2\mathrm{i})-(a_3+a_4\mathrm{i})\mathrm{j}=\bar{z}_1-z_2\mathrm{j}\end{aligned}$$

故式(1.3.4)成立.式(1.3.5)可由式(1.3.4)立得,而式(1.3.3)是显然的. □

命题 1.3.2 对于$\forall z\in C$,有

$$\mathrm{j}z=\bar{z}\mathrm{j} \tag{1.3.6}$$

$$\overline{z\mathrm{j}}=-z\mathrm{j} \tag{1.3.7}$$

证 设 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in R$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{j}z&=\mathrm{j}(a+b\mathrm{i})=\mathrm{j}a+\mathrm{j}b\mathrm{i}\\&=a\mathrm{j}+b\mathrm{ji}\\&=a\mathrm{j}-b\mathrm{ij}\\&=(a-b\mathrm{i})\mathrm{j}\\&=\bar{z}\mathrm{j}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\overline{z\mathrm{j}}=\bar{\mathrm{j}}\bar{z}&=-\mathrm{j}(a-b\mathrm{i})=-a\mathrm{j}+b\mathrm{ji}\\&=-a\mathrm{j}-b\mathrm{ij}\\&=-(a+b\mathrm{i})\mathrm{j}\\&=-z\mathrm{j}\end{aligned}$$

□

二、四元数的数量—向量表示法

设$\forall q\in Q$,并设

$$q=a_0+a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k} \tag{1.3.8}$$

引入表示法

$$q=S_q+V_q \tag{1.3.9}$$

$$S_q=a_0 \tag{1.3.10}$$

$$V_q=a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k} \tag{1.3.11}$$

其中 S_q 即四元数 q 的实部，又称为四元数 q 的**数量部分**，V_q 为四元数 q 的虚部，又称为四元数 q 的**向量部分**. 这种表示法一般称为四元数的**数量—向量表示**.

利用三维向量空间的数量积(点积)与向量积(叉积)，我们得到四元数乘积的另一种表示形式：

命题 1.3.3 设 $p = S_p + V_p, q = S_q + V_q \in Q$，则

$$\begin{aligned} pq &= (S_p + V_p)(S_q + V_q) \\ &= S_pS_q - V_p \cdot V_q + S_pV_q + S_qV_p + V_p \times V_q \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

证 设

$$p = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$$
$$q = b_0 + b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}$$

则由式(1.1.7)，有

$$\begin{aligned} pq = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 & \\ + (a_0b_1 + b_0a_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i} & \\ + (a_0b_2 + b_0a_2 + b_1a_3 - b_3a_1)\mathrm{j} & \\ + (a_0b_3 + b_0a_3 + a_1b_2 - b_1a_2)\mathrm{k} & \end{aligned}$$

而式(1.3.12)的

$$\begin{aligned} \text{右边} &= a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &\quad + a_0(b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}) \\ &\quad + b_0(a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}) \\ &\quad + (a_2b_3 - b_2a_3)\mathrm{i} \\ &\quad - (a_1b_3 - b_1a_3)\mathrm{j} \\ &\quad + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathrm{k} \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ &\quad + (a_0b_1 + b_0a_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i} \\ &\quad + (a_0b_2 + b_0a_2 + b_1a_3 - b_3a_1)\mathrm{j} \\ &\quad + (a_0b_3 + b_0a_3 + a_0b_2 - b_1a_2)\mathrm{k} \end{aligned}$$

故式(1.3.12)成立. □

三、四元数的相似关系和相合关系

定义 1.3.1 设 a,b 为任意的两个四元数，若存在非零的四元数 x，使得

$$xax^{-1}=b \tag{1.3.13}$$

则称四元数 a 与 b 是同类的或称四元数 a 与 b 相似，记为 $a\sim b$.

显然四元数的相似关系是一种等价关系. 通过计算可知有：

命题 1.3.4 $a,b\in Q$，则

$$a\sim b\Leftrightarrow S_a=S_b \text{ 且 } |V_a|=|V_b| \tag{1.3.14}$$

其中 $|V_a|$，$|V_b|$ 分别表示向量 V_a，V_b 的模.

命题 1.3.5 $a,b\in Q$，$a\sim b$ 且 $xax^{-1}=b$，则对任意整数 k，有

$$xa^kx^{-1}=b^k \tag{1.3.15}$$

证 因 $b=xax^{-1}$，则

$$b^2=(xax^{-1})(xax^{-1})=xa(x^{-1}x)ax^{-1}=xa^2x^{-1}$$

由数学归纳法可知对任意正整数 k，式(1.3.15)成立.

又由式(1.2.3)有

$$b^{-1}=(xax^{-1})^{-1}=xa^{-1}x^{-1},\quad \text{故有}$$

$$b^{-k}=(b^{-1})^k=(xa^{-1}x^{-1})=x(a^{-1})^kx=xa^{-k}x^{-1}$$

这就证明了，对所有整数 k，式(1.3.15)成立. □

命题 1.3.6 设 $a,c\in Q$，$a\sim c$ 且 $a\neq 0$，则有

$$(a-c)a(a-c)^{-1}=\bar{c} \tag{1.3.16}$$

证 式(1.3.16)等价于

$$(a-c)a=\bar{c}(a-c)$$

因 $a\sim c$，由命题 1.3.4 有 $S_a=S_c$，于是上式变成

$$(V_a-V_c)(S_a+V_a)=(S_c-V_c)(V_a-V_c)$$

即

$$S_aV_a-S_aV_c+V_a\cdot V_a-V_c\cdot V_a$$

$$= S_c V_a - S_c V_c - V_c \cdot V_a + V_c \cdot V_c$$

即 $$S_a V_a - S_a V_c + V_a \cdot V_a = S_c V_a - S_c V_c + V_c \cdot V_c \tag{1.3.17}$$

由命题 1.3.4 知， $S_a = S_c$ 且 $V_a \cdot V_a = V_c \cdot V_c$

故式(1.3.17)成立，从而式(1.3.16)成立． □

命题 1.3.7 设 $q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$ 为任意四元数，则必存在一复数

$$z = a_1 + h\mathrm{i}, \quad h \geqslant 0 \tag{1.3.18}$$

使得 $q \sim z$.

证 设四元数

$$q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$$

q 的复数表示为

$$q = z_1 + z_2\mathrm{j}, \quad z_1 = a_1 + a_2\mathrm{i}, \quad z_2 = a_3 + a_4\mathrm{i} \in C$$

当 $a_3 = a_4 = 0$ 时，$q = a_1 + a_2\mathrm{i} \in C$，若 $a_2 \geqslant 0$，则取 $x = 1$，于是有 $xqx^{-1} = q$，即取 $z = q$，使 $q \sim z$；若 $a_2 < 0$，则取 $x = \mathrm{j}$，有 $xqx^{-1} = a_1 - a_2\mathrm{i} \sim q$，其中 $h = -a_2 > 0$.

当 a_3 与 a_4 不全为零时，我们试图取如下形式的四元数：

$$x = a_0\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$$

其中 a_0 待定.

令 $$\left.\begin{aligned} z_0 &= a_0\mathrm{i}, & \bar{z}_0 &= -a_0\mathrm{i} \\ z_1 &= a_1 + a_2\mathrm{i}, & \bar{z}_1 &= a_1 - a_2\mathrm{i} \\ z_2 &= a_3 + a_4\mathrm{i}, & \bar{z}_2 &= a_3 - a_4\mathrm{i} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.19}$$

则有 $$x = z_0 + z_2\mathrm{j}$$

由式(1.3.4)有

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}(\bar{z}_0 - z_2\mathrm{j})$$

于是有

$$xqx^{-1} = \frac{1}{|x|^2}(z_0 + z_2\mathrm{j})(z_1 + z_2\mathrm{j})(\bar{z}_0 - z_2\mathrm{j})$$

$$=\frac{1}{|x|^2}\{[(z_0z_1-z_2\bar{z}_2)\bar{z}_0-(z_0\bar{z}_1-z_0z_2)\bar{z}_2]$$
$$+[(z_2\bar{z}_1+z_0z_2)z_0-(z_0z_1-z_2\bar{z}_2)z_2]\mathrm{j}\}$$
$$=\frac{1}{|x|^2}[(|z_0|^2z_1-|z_2|^2\bar{z}_0-|z_2|^2\bar{z}_1+|z_2|^2z_0)$$
$$+(\bar{z}_1z_0+z_0^2-z_1z_0+|z_2|^2)z_2\mathrm{j}]$$
$$=\frac{1}{|x|^2}\{[|z_0|^2z_1+|z_2|^2(z_0-\bar{z}_0-\bar{z}_1)]$$
$$+[(\bar{z}_1-z_1)z_0+z_0^2+|z_2|^2]z_2\mathrm{j}\} \tag{1.3.20}$$

要使 $xqx^{-1}\in C$,则必须有

$$(\bar{z}_1-z_1)z_0+z_0^2+|z_2|^2=0$$

即
$$(-2a_2\mathrm{i})(a_0\mathrm{i})+(a_0\mathrm{i})^2+a_3^2+a_4^2=0$$

即
$$-a_0^2+2a_2a_0+a_3^2+a_4^2=0$$

即
$$a_0^2-2a_2a_0-(a_3^2+a_4^2)=0$$

故
$$a_0=\frac{2a_2\pm\sqrt{4a_2^2+4a_3^2+4a_4^2}}{2}(舍去负值)$$
$$=a_2+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}=a_2+h \tag{1.3.21}$$

于是,由式(1.3.21),(1.3.19),有

$$z=xa'x^{-1}=a_1+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\,\mathrm{i}$$
$$=a_1+h\mathrm{i},h=\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}>0 \tag{1.3.22}$$

而
$$x=(a_2+h)\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\in Q \tag{1.3.23}$$

$$x^{-1}=-\frac{1}{2h}\mathrm{i}-\frac{a_3}{2h(a_2+h)}\mathrm{j}-\frac{a_4}{2h(a_2+h)}\mathrm{k}\in Q \tag{1.3.24}$$

这就完全证明了命题 1.3.7. □

定义 1.3.2 我们称(1.3.18)中的复数 $\dot{q}=a_1+h\mathrm{i}$(其中 $h\geqslant 0$)为**相似类**

$$\{q\}=\{b\mid b=xqx^{-1},q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k},\forall x\in Q\}$$

的**主值**.

定义 1.3.3 设 $a,b\in Q$,若存在一个非零的元素 $x\in Q$,使得

$$\bar{x}ax=b \tag{1.3.25}$$

则称四元数 a 与 b **相合**.

由命题 1.3.7 及式(1.2.3)可直接推得如下

命题 1.3.8 设 $\forall a\in Q$,则存在数 $y\in C$,使得 a 与 y 相合.

证 由命题 1.3.7,存在 $0\neq x\in Q$ 和 $z\in C$ 使得

$$xax^{-1}=z$$

由式(1.2.2)有 $xa\dfrac{\bar{x}}{|x|^2}=z$,即 $xa\bar{x}=|x|^2z$.

令

$$y=|x|^2z\in C$$

于是知,存在 $y\in C$,使得

$$xa\bar{x}=y$$

故命题 1.3.8 得证. □

§1.4 四元数体

在本节我们给出群、环、域、体的定义,重点介绍置换群和四元数体.

定义 1.4.1 设 G 为一非空集合,对 G 的元素规定一个代数运算,称之为乘法(或加法),乘积记作 ab(或 $a+b$),若其满足下列条件,则称 G 为一个群:

1° 满足封闭性:对 $\forall a,b\in G$,$\exists$唯一的 $c\in G$,使 $ab=c$;

2° 结合律成立,对 $\forall a,b,c\in G$ 有

$$(ab)c=a(bc)$$

3° G 存在单位元 e 满足:对 $\forall a\in G$,有

$$ae=ea=a$$

4° 对 $\forall a\in G$,$\exists a$ 的逆元 $a^{-1}\in G$,使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e$$

例如，全体整数 Z 对于数的加法作成一个加法群. 全体实数 R，全体复数 C 对于数的加法也各自作成一个群.

为了后面（第二章）定义四元数矩阵的行列式的需要，这里重点介绍一下置换群.

不失一般性，假设 n 个整数 $1,2,\cdots,n$ 之间的一种置换，如数 1 用 1 到 n 中的某个数 i_1 取代，2 被 1 到 n 中的某个数 i_2 取代，$\cdots$，n 被 1 到 n 中的某个数 i_n 取代，表以

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

例如

$$p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

并规定

$$\begin{aligned}p_1p_2&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这表示先作 p_1 的置换，接着作 p_2 的置换，即 $1\xrightarrow{p_1}3\xrightarrow{p_2}2$，

$$2\xrightarrow{p_1}1\xrightarrow{p_2}4,\quad 3\xrightarrow{p_1}2\xrightarrow{p_4}3,\quad 4\xrightarrow{p_1}4\xrightarrow{p_2}1$$

故
$$p_1p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

类似有

$$\begin{aligned}p_2p_1&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

可见 $$p_1p_2\neq p_2p_1$$

可以证明，1，2，…，n 间的置换集合，在上面定义的乘法运算下构成一个群：

1° 封闭性

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}$$

2° 结合律

$$\left[\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

故结合律成立.

3° 单位元素 e 为 $e=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$.

4° 逆元素

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$$

实因

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=e$$

这就证明了 n 次置换的全体对于上面规定的乘法运算构成

一个群，叫做 n 次**置换群**，又叫 n 次**对称群**，记为 S_n. 由上面的讨论知，置换群 S_n 是非交换群.

为了以后讨论方便起见，我们引入一种特殊形式的置换——**循环置换**.

设 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任意 m 个不同的数字. 如果 n 次置换 p 把 i_1 换成 i_2，i_2 换成 i_3，$\cdots$，i_{m-1} 换为 i_m，最后 i_m 换为 i_1，而其余的各个数字不变，则称 p 为 m **阶循环置换**或**循环**或**轮换**，记为

$$p=(i_1\ i_2 \cdots\ i_m)$$

特别当 $m=2$ 时，循环 $(i_1\ i_2)$ 称为**对换**或**换位**. 例如 5 个文字 1,2,3,4,5 的置换

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\5&4&1\end{pmatrix}=(1\ 5\ 4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$$

循环 $(1\ 5\ 4)$ 中，2,3 不出现，表示 2 和 3 保持不变，即

$$(1\ 5\ 4)=(1\ 5\ 4)(2)(3)$$

注意，循环 $(i_1\ i_2\cdots i_m)$ 实际上只与元素的相邻状况有关，而与哪个元素为首无关，比如 $(1\ 2\ 3)=(2\ 3\ 1)$. 如若两个循环 $(i_1\ i_2\cdots i_m)$ 与 $(j_1\ j_2\ j_3\cdots j_l)$ 没有相同的文字，则称为是**不相交**的. 不相交的两个循环的乘积可交换. 例如 $(1\ 3\ 2)(4\ 5)=(4\ 5)(1\ 3\ 2)$. 另外，若 $p=(i_1\ i_2\cdots\ i_m)$，则 $p^n=(1)(2)\cdots(n)=e$.

一般我们有：

命题 1.4.1 每一个置换都可以唯一地表示为两个不相交的循环的乘积.

我们略去这个命题的证明.

定义 1.4.2 称一个 n 次置换 σ 的循环表示写为**正规式**,如果

$$\sigma=(n_1 i_1 i_3 \cdots i_s)(n_2 j_2 j_3 \cdots j_t)\cdots(n_r k_2 k_3 \cdots k_l) \quad (1.4.1)$$

$$n_1<i_2,\cdots,i_s;n_2<j_2,\cdots j_t;\cdots;n_r<k_2,\cdots,k_l \quad (1.4.2)$$

$$1=n_1<n_2<\cdots<n_r\leqslant n \quad (1.4.3)$$

或者式(1.4.2),式(1.4.3)代以如下式(1.4.2)′,式(1.4.3)′

$$n_1>i_2,\cdots,i_s;n_2>j_2,\cdots,j_t;n_r>k_2,\cdots,k_l \quad (1.4.2)'$$

$$n=n_1>n_2>\cdots>n_r\geqslant 1 \quad (1.4.3)'$$

定义 1.4.3 设 G 为一非空集合,对 G 的元素规定两种代数运算加法和乘法,若满足下列三个条件,则称 G 为一个**环**:

1° G 是一个加法群;

2° 对乘法满足结合律,即 $\forall a,b,c\in G$,有

$$a(bc)=(ab)c$$

3° 对加法和乘法满足左、右分配律,即对 $\forall a,b,c\in G$,有

$$a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca$$

定义 1.4.4 一个具有单位元的交换环 G,若至少含有一个非零元,并且每个非零元 a 恒有逆元 a^{-1},则称 G 为一个**域**.

定义 1.4.5 一个具有单位元的非交换环 G,称为**非交换环**,或称为**除环**,有时也称为**体**.

例 对数的加法和乘法来说,实数集和复数集均构成域,分别称为**实数域**和**复数域**,并分别记为 R 和 C,而对四元数集则不构成域,因为它是非交换环,故一般称为**四元数体**,记为 Q.

在有些书(如张禾瑞著《近世代数基础》)中把所有复数对的集合 $\Omega=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta$为复数$\}$当规定相等、加法、乘法:

$$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$$

$$(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{=\!=}(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$$

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{=\!=}(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta}_2,\alpha_1\beta_1+\beta_1\bar{\alpha}_2)$$

则称 Ω 为四元数体.

命题 1.4.2 上述 Ω 亦作成一个除环(体),且 Ω 与 Q 同构.

证 Ω 作成一个除环容易验证. 下面证 Ω 与 Q 同构.

$\varphi:(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})\to a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$,这里前面的 i 与后面的 i 有区别.

$$
\begin{aligned}
&\varphi[(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})+(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})]\\
=&\varphi[(a+a')+(b+b')\mathrm{i},(c+c')+(d+d')\mathrm{i}]\\
=&(a+a')+(b+b')\mathrm{i}+(c+c')\mathrm{j}+(d+d')\mathrm{k},\\
&\varphi[(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})]\\
=&\varphi[(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')\mathrm{i},\\
&(ac'-bd'+ca'+db')+(ad'+bc'-cb'+da')\mathrm{i}]\\
=&aa'-bb'-cc'-dd'+(ab'+ba'-cd'-dc')\mathrm{i}\\
&+(ac'-bd'+ca'+db')\mathrm{j}+(ad'+bc'-cb'+da')\mathrm{k}\\
=&(a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})(a'+b'\mathrm{i}+c'\mathrm{j}+d'\mathrm{k})\\
=&\varphi(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})\varphi(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

故在 φ 之下 Ω 与 Q 同构. □

两个除环同构,除记号外构造完全一样,故可看成是相同的除环,都称为四元数除环或四元数体.

第二章　四元数矩阵概论

以四元数为元素的矩阵，称之为四元数矩阵，或称为四元数体上的矩阵．由于四元数是实数和复数的扩充，故四元数矩阵是包括实矩阵和复矩阵作为其特款的更广泛、更一般的矩阵．实数域 R 和复数域 C 上的矩阵即所谓常规矩阵的运算及其性质大部分可以推广到四元数矩阵上来，但因四元数的乘法不满足交换律，而使得常规矩阵的诸多性质不能直接推广到四元数矩阵上来．这也就是研究四元数矩阵的困难之所在，特别是行列式的定义更为困难，我们将在第三章专门来讨论它．这一章主要论及四元数矩阵的一些基本概念和基本运算及一些符号．

§2.1　四元数矩阵的基本知识

一、四元数矩阵的基本运算及其性质

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}\in Q$，则称 A 为**四元数矩阵**．$m\times n$ 阶四元数矩阵的全体记为 $Q^{m\times n}$．

我们把主对角线上的元素全为 1，其他元素皆为零的 n 阶方阵

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1) \tag{2.1.1}$$

称为 n 阶**单位**阵．当无必要指明其阶数时，单位阵简记为 I．把如

下的 n 阶方阵

$$J_n=\begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}=\mathrm{sdiag}(1,1,\cdots,1) \tag{2.1.2}$$

称为 n 阶**次单位阵**. 当无必要指明其阶数时,次单位阵简记为 J.

四元数矩阵的基本运算:加法、数乘和乘法与常规矩阵一样.

设 $A\in Q^{n\times n}$,若存在 $B\in Q^{n\times n}$,使得

$$AB=BA=I \tag{2.1.3}$$

则称四元数矩阵 A 是**可逆的**,而称 B 为 A 的**逆阵**,A 的逆阵记为 A^{-1}.

A 的**共轭矩阵**记为 $\overline{A}$,A 的**转置矩阵**记为 A^{T},A 的**转置共轭** $\overline{(A^{\mathrm{T}})}=\overline{A}^{\mathrm{T}}$ 记为 A^*.

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}\in Q^{n\times m}$,则称矩阵

$$B=(b_{ij})_{m\times n},b_{ij}=a_{m-j+1,n-i+1}$$

为 A 的**次转置阵**,记为 A^{τ}.

四元数矩阵基本运算具有如下性质:

命题 2.1.1 设 A,B,C 均为四元数矩阵,$\lambda\in Q$,只要下面所涉及的运算可行,则有

1° $A+B=B+A$; (2.1.4)

2° $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,(A+B)\lambda=A\lambda+B\lambda$; (2.1.5)

3° $(AB)C=A(BC)$; (2.1.6)

4° 若 A,B 均可逆,则 AB 可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}; \tag{2.1.7}$$

5° $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$; (2.1.8)

6° $\overline{AB}=(\overline{B^{\mathrm{T}}}\ \overline{A^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}=(B^*A^*)^{\mathrm{T}}$; (2.1.9)

7° $(AB)^*=B^*A^*$; (2.1.10)

8° 若 A 可逆,则 A^* 亦可逆且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$. (2.1.11)

证 我们仅给出 6° 与 8° 的证明,其他从略.

6° 设 $A=(a_{ij})_{m\times k}, B=(b_{ij})_{k\times n}$,

$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$,

则
$$c_{ij}=\sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}$$
$$\overline{c_{ij}}=\sum_{t=1}^{k}\overline{a_{it}}\,\overline{b_{tj}}=\sum_{t=1}^{k}\overline{b_{tj}}\,\overline{a_{it}}$$

故 $\overline{AB}=\overline{C}=(\overline{B^{\mathrm{T}}}\,\overline{A^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}=(B^*A^*)^{\mathrm{T}}$.

8° 因 A 可逆,则 $AA^{-1}=I$,于是由 7°有
$$I=I^*=(AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^*$$
故
$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^* \qquad \square$$

注 在四元数矩阵中,等式 $\overline{AB}=\overline{B}\overline{A}$ 一般不再成立,而只成立公式(2.1.9).

二、四元数矩阵的直积与圈积

定义 2.1.1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 是 Q 上矩阵,称 Q 上 $mp\times nq$ 矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}=(a_{ij}b_{kl})_{mp\times nq} \tag{2.1.12}$$
为 A 与 B 的**直积**或**张量积**,或 kronecker **积**,记为 $A\otimes B$. 当 $B\in R^{p\times q}$ 时,称 $A\otimes B$ 为**弱右直积**;当 $A\in R^{m\times n}$ 时,称 $A\otimes B$ 为**弱左直积**,两者统称为**弱直积**.

定义 2.1.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是 Q 上的方阵,则称
$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n} \tag{2.1.13}$$
为 A 与 B 的**圈积**或 Hadamard **积**,如果 A 与 B 中有一个是 R 上的方阵,则称 $A\circ B$ 为**弱圈积**.

四元数矩阵的直积与圈积满足如下性质：

命题 2.1.2 只要下面所涉及的运算可行，就有

1° $0\otimes A = A\otimes 0$ (2.1.14)

2° $(A_1 + A_2)\otimes B = A_1\otimes B + A_2\otimes B$ (2.1.15)

$A\otimes(B_1 + B_2) = A\otimes B_1 + A\otimes B_2$ (2.1.16)

3° $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ (2.1.17)

4° $(A\otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}$ (2.1.18)

5° 当 A 为 R 上矩阵时，有

$$\overline{A\otimes B} = A\otimes\overline{B}\ (=\overline{A}\otimes\overline{B}) \tag{2.1.19}$$

6° 当 B 为 R 上矩阵时，有

$$\overline{A\otimes B} = \overline{A}\otimes B\ (=\overline{A}\otimes\overline{B}) \tag{2.1.20}$$

7° 当 B、C 中有一个是 R 上的矩阵时，有

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD \tag{2.1.21}$$

8° 当 A、B 均可逆，且其中有一个是 R 上矩阵时，则 $A\otimes B$ 亦可逆，且

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1} \tag{2.1.22}$$

9° 当 A、B 中有一个为 R 上矩阵时，则有

$$(A\otimes B)^{*} = A^{*}\otimes B^{*} \tag{2.1.23}$$

10° $(A\circ B)\circ C = A\circ(B\circ C)$ (2.1.24)

11° $(A+B)\circ C = A\circ C + B\circ C$,

$C\circ(A+B) = C\circ A + C\circ B$ (2.1.25)

12° $(A\circ B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\circ B^{\mathrm{T}}$ (2.1.26)

13° $\overline{(A\circ B)} = \overline{B}\circ\overline{A}$ (2.1.27)

14° $(A\circ B)^{*} = B^{*}\circ A^{*}$ (2.1.28)

证 我们仅证明 5°, 7°, 其他从略.

5° 我们有

$$\begin{aligned}\overline{A \otimes B} &= (\overline{a_{ij}b_{kl}})_{mp\times nq} = (\overline{b_{kl}}\ \overline{a_{ij}})_{mp\times nq}\\ &= (\bar{b}_{kl}a_{ij})_{mp\times nq} = (a_{ij}\overline{b_{kl}})_{mp\times nq}\\ &= A\otimes \overline{B}\end{aligned}$$

7° 不妨设 C 是 R 上矩阵，记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times l}$. 因为 $A\otimes B$（作为分块阵）的任意第 i 行为 $(a_{i1}B, a_{i2}B, \cdots, a_{in}B)$，而 $C\otimes D$ 的任意第 j 列为

$$\begin{pmatrix} c_{1j}D \\ c_{2j}D \\ \cdots \\ c_{nj}D \end{pmatrix}$$

故 $(A\otimes B)(C\otimes D)$（作为分块阵）的 (ij) 元为（注意 $c_{kj}\in R$）

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}B)(c_{kj}D) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\right)BD$$

上式右边恰好是 $AC\otimes BD$ 的 (i,j) 元，故式(2.1.21)即 7° 成立.

□

三、四元数矩阵的初等变换和矩阵的相似及相合

四元数矩阵的初等变换与常规矩阵的初等变换有所不同.

定义 2.1.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，$\lambda\in Q$，则 $Q^{n\times n}$ 上的第一、二、三套**初等变换**分别规定如下：

1° 把 A 的第 j 行的左 $\bar{\lambda}$ 倍加到第 i 行，再把第 j 列的右 λ 倍加到第 i 列 $(i\neq j)$，此变换又称为**消法变换**；

2° 用 $\bar{\lambda}(\neq 0)$ 左乘 A 的第 i 行，再用 λ 右乘 A 的 i 列，此变换又称为**倍法变换**；

3° 互换 A 的第 i，j 两行，再互换第 i，j 两列，此变换又称为**换法变换**.

我们记 $P(i, j_\lambda)$ 为单位阵 I 的第 j 列右 λ 倍加至第 i 列后所得之矩阵并称之为**消法矩阵**；$P(i(\lambda))$ 表示单位阵 I 的第 i 列右 λ

$(\neq 0)$倍后所得之矩阵并称之为**倍法矩阵**；$P(i,j)$表示交换单位阵 I 的第i,j两列后所得之矩阵并称之为**换法矩阵**或**置换矩阵**. $P(i,j_\lambda),P(i(\lambda)),P(i,j)$统称为初等矩阵.显然所有初等阵均是可逆的，且 $P(i,j_\lambda)^{-1}=P(i,j_{-\lambda}),P(\lambda(x))^{-1}=P(i(\frac{1}{\lambda}))$, $P(i,j)^{-1}=P(j,i)$.

以下命题显然成立：

命题 2.1.3 对 $A\in Q^{n\times n}$施行第一、二、三套初等变换分别相当于

i) $P(i,j_\lambda)^*AP(i,j_\lambda)$;

ii) $P(i(\lambda))^*AP(i(\lambda))$;

iii) $P(i,j)^*AP(i,j)$.

定义 2.1.4 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $B=PAP^{-1}$，则称 A 与 B 是**相似的**，记为 $A\sim B$.

定义 2.1.5 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $B=P^*AP$，则称 A 与 B 是**相合的**.

显然矩阵的相似关系和相合关系都是一种等价关系.

由定义 2.1.5 及命题 2.1.3 可得如下：

命题 2.1.4 设 $A\in Q^{n\times n}$，则对 A 施以定义 2.1.3 中的三套初等变换的任何一套后，所得矩阵 B 必相合于 A.

§2.2 四元数自共轭矩阵

我们知道，实矩阵中的对称阵和复矩阵中的厄米特(Hermite)阵都是非常重要的一类矩阵，与此相对应，在四元数矩阵中有所谓自共轭阵，它在四元数矩阵中同样占有非常重要的地位. 在这一节中，我们将讨论自共轭阵及其基本性质，它的进一步的性质在第四章还将讨论.

我们先给出一些相关的概念.

定义 2.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $A^*=A$,则称 A 为**四元数自共轭阵**,n 阶四元数自共轭阵的全体记为 $SC_n(Q)$;若 $A^*=-A$,则称 A 为四元数**斜自共轭阵**,n 阶四元数斜自共轭阵的全体记为 $SC_n^-(Q)$;若 $U\in Q^{n\times n}$,且 $U^*U=UU^*=I$,则称 U 为**广义酉矩阵**,n 阶广义酉矩阵的全体记为 $U^{n\times n}$.

实对称阵和复厄米特阵都是特殊的自共轭阵,实正交阵和复酉阵都是特殊的广义酉矩阵.

命题 2.2.1 设 $A\in SC_n(Q)$,则对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in Q^{n\times 1}$,$x^*Ax$ 必为实数.

证 因 $A^*=A$,则

$$\overline{x^*Ax}=(x^*Ax)^*=x^*A^*x=x^*Ax$$

故
$$x^*Ax\in R$$
□

定义 2.2.2 设 $A\in SC_n(Q)$,若对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in Q^{n\times 1}$,有

$$x^*Ax>0(\geqslant 0)$$

则称 A 为四元数**(半)正定矩阵**. n 阶四元数(半)正定矩阵的全体记为 $SC_n^>(Q)(SC_n^\geqslant(Q))$.

命题 2.2.2 设 $U_1,U_2\in U^{n\times n}$,则 $U_1U_2\in U^{n\times n}$.

证 因 $U_1,U_2\in U^{n\times n}$,则

$$U_1^*U_1=U_1U_1^*=I,U_2^*U_2=U_2U_2^*=I,$$

故
$$\begin{aligned}(U_1U_2)^*(U_1U_2)&=U_2^*U_1^*U_1U_2\\&=U_2^*IU_2=U_2^*U_2=I\end{aligned}$$

同理有
$$(U_1U_2)(U_1U_2)^*=I$$

故
$$U_1U_2\in U^{n\times n}$$
□

命题 2.2.3 设 δ 为单位四元数(即 δ 的模 $|\delta|=\sqrt{\bar{\delta}\delta}=1$),则 $D_i(\delta)=P(i(\delta))$是一个广义酉矩阵.

证 因为显然有 $D_i^*(\delta)D_i(\delta)=D_i(\delta)D_i^*(\delta)=I$,故 $D_i(\delta)$ 是一个广义酉矩阵. □

命题 2.2.4 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 可逆,则 $A^{-1}\in SC_n(Q)$

证 由式(2.1.11)及 $A^*=A$,有

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=A^{-1}$$

故

$$A^{-1}\in SC_n(Q)$$ □

命题 2.2.5 设 $A\in Q^{n\times n}$,$P\in Q^{n\times n}$,P 可逆,则

$$A\in SC_n(Q)\Leftrightarrow PAP^*\in SC_n(Q)$$

证 "$\Rightarrow$" 由 $A\in SC_n(Q)$有 $A^*=A$,于是有

$$(PAP^*)^*=PA^*P^*=PAP^*\in SC_n(Q)$$

"$\Leftarrow$" 由 $PAP^*\in SC_n(Q)$,有$(PAP^*)^*=PAP^*$,

即

$$PA^*P^*=PAP^*$$

又 P 可逆,则 P^* 亦可逆,于是由上式有

$$A^*=P^{-1}PAP^*(P^*)^{-1}=A$$

故

$$A\in SC_n(Q)$$ □

命题 2.2.6 设 $A\in SC_n(Q)$且可逆,$D\in SC_m(Q)$,$C\in Q^{m\times n}$,则

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C^*\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^*\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}C^*\end{pmatrix}\tag{2.2.1}$$

且式(2.2.1)中的 $D-CA^{-1}C^*\in SC_m(Q)$.

证 由条件知$\begin{pmatrix} A & C^*\\ C & D\end{pmatrix}\in SC_{n+m}(Q)$,于是由命题 2.2.5

知

$$\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}C^*\end{pmatrix}\in SC_{n+m}(Q)$$

故

$$D-CA^{-1}C^*\in SC_m(Q)$$ □

定理 2.2.1 对 Q 上任意自共轭矩阵 A,恒有广义酉矩阵 U,使得 UAU^* 为实对角阵.

证 对 A 的阶数 n 用数学归纳法.当 $n=1$ 时,显然成立.假定对 $n-1$ 阶的自共轭矩阵,命题成立,现在设 A 为 n 阶的.记 A 为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

由归纳法假设知有 $n-1$ 阶的广义酉矩阵 U_1,使 $U_1A_1U_1{}^*$ 为实对角阵,设为

$$U_1AU_1{}^*=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

现在令

$$U_0=\begin{pmatrix} U_1 & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ 0\cdots0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 U_0 显然为 n 阶广义酉矩阵,而且有

$$U_0AU_0{}^*=\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & & \\ & a_2 \ddots & \\ & & a_{n-1}\end{matrix} & U_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix} \\ (\bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-1})U_1{}^* & a \end{pmatrix}$$

如果令
$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=U_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

则易知有

$$(\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{n-1})=(\bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-1})U_1{}^*$$

故

$$U_0AU_0{}^*=\begin{pmatrix} a_1 & & & & \beta_1 \\ & a_2 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \bar{\beta}_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

现在令

$$\delta_i=\begin{cases} \dfrac{\bar{\beta}_i}{b_i}, & b_i=\sqrt{\beta_i\bar{\beta}_i}, \quad \text{当 } \beta_i\neq 0 \text{ 时}, \\ 1, & b_i=0, \quad \text{当 } \beta_i=0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$D=D_1(\delta_1)D_2(\delta_2)\cdots D_{n-1}(\delta_{n-1})=\begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

则由命题 2.2.2 知 DU_0 为广义酉矩阵，且

$$(DU_0)^*=U_0{}^*D^*=U_0{}^*D_{n-1}(\bar{\delta}_{n-1})\cdots D_2(\bar{\delta}_2)D_1(\bar{\delta}_1)$$

再由

$$\delta_i\bar{\delta}_i=\bar{\delta}_i\delta_i=1 \quad (i=1,\cdots,n-1)$$

即可得

$$(DU_0)A(DU_0)^*=\begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & a_2 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

此为实对称矩阵，从而又有实正交矩阵 T（当然 T 也是广义酉阵），使

$$T(DU_0)A(DU_0)^*T^* = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}, c_i \in R, i=1,\cdots,n$$

故若令

$$U = T(DU_0)$$

则由命题2.2.2知 U 为广义酉矩阵,且

$$U^* = (DU_0)^* T^*$$

归纳法完成. □

§2.3 四元数矩阵的复分解式与导出阵

由式(1.6.2)知,每一个四元数 $q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}(a_1, a_2, a_3, a_4 \in R)$可唯一地表示为 $q = z_1 + z_2\mathrm{j}(z_1, z_2 \in C)$. 故四元数体 Q 上的任一 $m \times n$ 阶矩阵A 可唯一地表示为

$$A = A_1 + A_2\mathrm{j} \ (A_1, A_2 \in C^{m\times n}) \tag{2.3.1}$$

定义 2.3.1 称式(2.3.1)为四元数矩阵 A 在复数域C 上的**分解式**.

命题 2.3.1

1° 设$X = X_1 + X_2\mathrm{i} \in C^{m\times n}$,其中 $X_1, X_2 \in R^{m\times n}$,则

$$\mathrm{j}X = \overline{X}\mathrm{j} \tag{2.3.2}$$

$$\mathrm{j}X\mathrm{j} = -\overline{X} \tag{2.3.3}$$

$$\mathrm{j}X^* = X^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \tag{2.3.4}$$

$$(X\mathrm{j})^* = -X^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \tag{2.3.5}$$

2° 设$A = A_1 + A_2\mathrm{j} \in Q^{m\times n}$,其中 $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$,则

$$A^* = A_1{}^* - A_2{}^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \tag{2.3.6}$$

3° 设$A \in Q^{m\times n}, B \in Q^{n\times p}$, A, B 在复数域C 上的分解式分别为$A = A_1 + A_2\mathrm{j}$, $B = B_1 + B_2\mathrm{j}$, 则 $AB \in Q^{m\times p}$在复数域C 上的

分解式为

$$AB=(A_1B_1-A_2\bar{B}_2)+(A_1B_2+A_2\bar{B}_1)\mathrm{j} \qquad (2.3.7)$$

证

1° 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{j}X&=\mathrm{j}(X_1+X_2\mathrm{i})=X_1\mathrm{j}+X_2\mathrm{ji}\\&=X_1\mathrm{j}-X_2\mathrm{ij}=(X_1-X_2\mathrm{i})\mathrm{j}=\bar{X}\mathrm{j}\end{aligned}$$

故式(2.3.2)成立.

由式(2.3.2)即得式(2.3.3),由式(2.3.3)即得式(2.3.4),由式(2.3.4)即得式(2.3.5).

2° 由 $A=A_1+A_2\mathrm{j}$ 及式(2.3.5),有

$$A^*=A_1^*+(A_2\mathrm{j})^*=A_1^*-A_2^{\mathrm{T}}\mathrm{j}$$

3° 由式(2.3.2),有

$$\begin{aligned}AB&=(A_1+A_2\mathrm{j})(B_1+B_2\mathrm{j})\\&=A_1B_1+A_2\mathrm{j}B_2\mathrm{j}+A_1B_2\mathrm{j}+A_2\mathrm{j}B_1\\&=(A_1B_1-A_2\bar{B}_2)+(A_1B_2+A_2\bar{B}_1)\mathrm{j}.\end{aligned}$$ □

定义 2.3.2 设 $A\in Q^{m\times n}$, $A=A_1+A_2\mathrm{j}$ 是 A 在复数域 C 上的分解式,则称

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1\end{pmatrix}\in C^{2m\times 2n} \qquad (2.3.8)$$

为四元数矩阵 A 的**复表示矩阵**或 A 在复数域 C 上的**导出阵**.

注 用 A^σ 来研究 A 的有关性质可以带来不少方便.

对单元素矩阵,即 $A=(q)\in Q^{1\times 1}$,这时,

$$q=z_1+z_2\mathrm{j},\quad z_1,z_2\in C$$

于是有
$$q^\sigma=\begin{pmatrix}z_1 & -z_2\\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix}\in C^{2\times 2} \qquad (2.3.9)$$

特别

$$1^{\sigma}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2,\quad \mathrm{i}^{\sigma}=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{j}^{\sigma}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{k}^{\sigma}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

命题 2.3.2

1° 设 A、$B\in Q^{m\times n}$，则 $A^{\sigma}=B^{\sigma}\Leftrightarrow A=B$ (2.3.11)

2° 设 $A\in Q^{m\times n}$，$a\in R$，则 $(aA)^{\sigma}=aA^{\sigma}$ (2.3.12)

3° 设 A、$B\in Q^{m\times n}$，则 $(A+B)^{\sigma}=A^{\sigma}+B^{\sigma}$ (2.3.13)

4° 设 $A\in Q^{m\times n}$，$f(x)$ 为 R 上多项式，则
$$f(A^{\sigma})=(f(A))^{\sigma} \tag{2.3.14}$$

5° 设 $A\in Q^{n\times m}$，$B\in Q^{m\times p}$，则 $(AB)^{\sigma}=A^{\sigma}B^{\sigma}$ (2.3.15)

6° 设 $A\in Q^{n\times n}$ 可逆，则 A^{σ} 亦可逆，且
$$(A^{\sigma})^{-1}=(A^{-1})^{\sigma} \tag{2.3.16}$$

7° 设 $A\in Q^{n\times m}$，则 $(A^{\sigma})^{*}=(A^{*})^{\sigma}$ (2.3.17)

8° 设 $A\in Q^{n\times m}$，则 $\mathrm{rank}A^{\sigma}=2\mathrm{rank}A$ (2.3.18)

9° $A\sim B\Rightarrow A^{\sigma}\sim B^{\sigma}$ (2.3.19)

10° A 是自共轭阵 $\Leftrightarrow A^{\sigma}$ 是厄米特阵 (2.3.20)

证 1°、2°、3°、4°是明显的，仅证 5°～10°.

5° 设 $A=A_1+A_2\mathrm{j}$，$C=C_1+C_2\mathrm{j}$，其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，C_1，$C_2\in C^{n\times p}$，则由式(2.3.7)有
$$AC=(A_1C_1-A_2\overline{C}_2)+(A_1C_2+A_2\overline{C}_1)\mathrm{j}$$
于是
$$(AC)^{\sigma}=\begin{pmatrix}A_1C_1-A_2\overline{C}_2 & -(A_1C_1+A_2\overline{C}_1)\\ \overline{A_1C_1+A_2\overline{C}_1} & \overline{A_1C_1-A_2\overline{C}_1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_1C_1-A_2\overline{C}_2 & -A_1C_2-A_2\overline{C}_1\\ \overline{A}_1\overline{C}_1+\overline{A}_2C_1 & \overline{A}_1\overline{C}_1-\overline{A}_2C_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 & -C_2\\ \overline{C}_2 & \overline{C}_1\end{pmatrix}=A^{\sigma}C^{\sigma}$$

6° 因A 可逆，则有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

由 4°有

$$A^{\sigma}(A^{-1})^{\sigma}=(A^{-1})^{\sigma}A^{\sigma}=I_n^{\sigma}=I_{2n}$$

故 A^{σ} 可逆，且$(A^{\sigma})^{-1}=(A^{-1})^{\sigma}$.

7° 设$A=A_1+A_2\mathrm{j}$

则 $$A^*=A_1{}^*-A_2{}^{\mathrm{T}}j$$

故 $$(A^*)^{\sigma}=\begin{pmatrix} A_1{}^* & A_2{}^{\mathrm{T}} \\ -A_2{}^* & A_1{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{2.3.21}$$

从而

$$(A^{\sigma})^*=\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} A_1{}^* & A_2{}^{\mathrm{T}} \\ -A_2{}^* & A_1{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=(A^*)^{\sigma}$$

8° 由[1]知，存在 $P\in Q^{m\times m}$，$T\in Q^{n\times n}$，且 P，T 均可逆，使得

$$PAT=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 4°有

$$P^{\sigma}A^{\sigma}T^{\sigma}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sigma}=\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又由 6°知，P^{σ}，T^{σ} 均可逆，故 A^{σ} 的秩为 $2r$.

9° 由 7°与 5°即得.

10° 显然. □

第三章　四元数矩阵的行列式

由于四元数的乘法不满足交换律，致使一般四元数矩阵行列式的定义变得十分困难．早在20世纪40年代和70年代有人就曾给出过四元数矩阵行列式的定义，但不便于应用．到了20世纪80年代和90年代，我国谢邦杰教授和陈龙玄教授又分别给出了四元数矩阵行列式的两种新的定义，同时后者还定义了一种特殊行列式，即所谓重行列式．这些都给四元数体上的线性代数研究带来很多方便．

本章主要论述陈龙玄意义下的四元数矩阵行列式的定义及有关结果，并简要介绍一下四元数矩阵行列式的其他定义，同时指出这些定义之间的关系．

§3.1　四元数矩阵行列式的定义

一般域 F 上，n 阶矩阵行列式定义为域 F 上的一个数，这个数是 $n!$ 个项的和，其中每一项是不同行、不同列上的 n 个元素之积，并加上适当的符号．而在四元数体上来定义矩阵的行列式时，困难之处就在于：因为四元数不满足乘法的交换律，每一项的这 n 个元素应按什么排列相乘，每一项前面的符号又怎样规定？陈龙玄教授利用 n 文字的对称群给出了四元数矩阵的行列式的定义，这就是如下的：

定义 3.1.1　设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$，则定义

$$
|A| = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
\triangleq \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{n_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s n_1} a_{n_2 j_2} \cdots a_{j_t n_2} \cdots a_{n_r k_2} \cdots a_{k_l n_r}
$$

(3.1.1)

其中 S_n 是 n 文字的对称群，S_n 中元素 σ 的不相交的循环分解写成如下的正规式：

$$\sigma = (n_1 i_2 i_3 \cdots i_s)(n_2 j_2 j_3 \cdots j_t) \cdots (n_r k_2 k_3 \cdots k_l) \tag{3.1.2}$$

$$n_1 > i_2, i_3, \cdots, i_s; n_2 > j_2, j_3, \cdots, j_t; \cdots; n_r > k_2, k_3, \cdots, k_l \tag{3.1.3}$$

$$n = n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geqslant 1 \tag{3.1.4}$$

且
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(s-1)+(t-1)+\cdots+(r-1)} = (-1)^{n-r} \tag{3.1.5}$$

容易看出，如果所有 a_{ij} 两两可换，则上述行列式定义与常规行列式的定义是相同的.

为方便与清楚起见，若循环因子 $\sigma_0 = (i_1 i_2 \cdots i_s)$，则按如下方式书写：

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} = \langle i_1 i_2 \cdots i_s \rangle \tag{3.1.6}$$

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_1} = \langle i_1 i_2 \cdots i_s i_1 \rangle = \langle \sigma_0 \rangle \tag{3.1.7}$$

于是表达式(3.1.1)可简化成

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \cdots \langle \sigma_r \rangle \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma \rangle
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

当 $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ 时，我们有

$$\overline{\langle i_1 i_2 \cdots i_s i_1 \rangle} = \bar{a}_{i_s i_1} \bar{a}_{i_{s-1} i_s} \cdots \bar{a}_{i_2 i_3} \bar{a}_{i_1 i_2}$$

$$=a_{i_1 i_s}a_{i_s i_{s-1}}\cdots a_{i_3 i_2}a_{i_2 i_1}$$

$$=\langle i_1 i_s i_{s-1}\cdots i_2 i_1\rangle \tag{3.1.9}$$

我们称 $Q^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_i\in Q,i=1,2,\cdots,n\}$ 为**广义酉空间**，Q^n 中向量 $\alpha=(a_1,a_2\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(b_1,b_2\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 的内积定义为

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i b_i=\alpha^*\beta \tag{3.1.10}$$

其中 $\alpha^*=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n)$.

为了获得四元数矩阵行列式定义的一些感性知识，我们先考察一下按定义 3.1.1 如何具体计算二阶和三阶四元数矩阵.

当 $n=2$ 时，对称群 $S_2=\{(1)(2),(12)\}$，对照式(3.1.2)～(3.1.5)，有

对 $\sigma_1=(1)(2)=(2)(1)$，有 $r=2,n_1=2,n_2=1,n-r=0$,

$\therefore \varepsilon(\sigma_1)a_{n_1n_1}a_{n_2n_2}=(-1)^{n-r}a_{22}a_{11}=(-1)^0a_{22}a_{11}=a_{22}a_{11}$

对 $\sigma_2=(1\ 2)$，有 $r=1,n_1=2,n_2=1,n-r=1$,

$$\begin{aligned}\therefore \varepsilon(\sigma_2)a_{n_2n_1}a_{n_1n_2}&=(-1)^{n-r}a_{21}a_{12}\\&=(-1)^{2-1}a_{21}a_{12}=-a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

故
$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12} \tag{3.1.11}$$

当 $n=3$ 时，$S_3=\{(1)(2)(3),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，有

对 $\sigma_1=(1)(2)(3)=(3)(2)(1)$，有 $r=3,n_1=3,n_2=2,n_3=1,n-r=0$,

$\therefore \varepsilon(\sigma_1)=a_{n_1n_1}a_{n_2n_2}a_{n_3n_3}=(-1)^{n-r}a_{33}a_{22}a_{11}=a_{33}a_{22}a_{11}$.

对 $\sigma_2=(12)=(3)(21)$，有 $r=2,n_1=3,n_2=2,n-r=1$,

$\therefore \varepsilon(\sigma_2)=a_{n_1n_1}a_{n_2j_2}a_{j_2n_2}=(-1)^{n-r}a_{33}a_{21}a_{12}=-a_{33}a_{21}a_{12}.$

对 $\sigma_3=(13)=(31)(2)$，有 $r=2,n_1=3,n_2=2,n-r=1$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_3)a_{31}a_{13}a_{22}=(-1)^1a_{31}a_{13}a_{22}=-a_{31}a_{13}a_{22}.$

对 $\sigma_4=(23)=(32)(1)$，有 $r=2,n_1=2,n_2=1,n-r=1$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_4)a_{32}a_{23}a_{11}=(-1)^1a_{32}a_{23}a_{11}=-a_{32}a_{23}a_{11}.$

对 $\sigma_5=(123)=(312)$，有 $r=1,n_1=3,n-r=2$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_5)a_{31}a_{12}a_{23}=(-1)^2a_{31}a_{12}a_{23}=a_{31}a_{12}a_{23}.$

对 $\sigma_6=(132)=(312)$，有 $r=1,n_1=3,n-r=2$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_6)a_{32}a_{21}a_{13}=(-1)^2a_{32}a_{21}a_{13}=a_{32}a_{21}a_{13}.$

故
$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{33}a_{22}a_{11}+a_{32}a_{21}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{31}a_{13}a_{22}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \tag{3.1.12}$$

由上可以看出，按定义 3.1.1 来计算四元数矩阵的行列式是异常繁难的. 但是对于一些特殊的四元数矩阵的行列式，由定义 3.1.1 易得：

例 1 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 为对角阵
$$A=\begin{pmatrix}q_1&&&\\&q_2&&\\&&\ddots&\\&&&q_n\end{pmatrix}$$
则
$$\det A=q_nq_{n-1}\cdots q_1.$$

例 2 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 为上或下三角阵
$$A=\begin{pmatrix}q_1&&&*\\&q_2&&\\&&\ddots&\\&&&q_n\end{pmatrix}\text{或}A=\begin{pmatrix}q_1&&&\\&q_2&&\\*&&\ddots&\\&&&q_n\end{pmatrix}$$

则 $$\det A = q_n q_{n-1} \cdots q_1 .$$

例 3

$$\det\begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} = -q_2 q_1$$

$$\det\begin{pmatrix} & & q_1 \\ & q_2 & \\ q_3 & & \end{pmatrix} = -q_3 q_1 q_2$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & q_1 \\ & & q_2 & \\ & q_3 & & \\ q_4 & & & \end{pmatrix} = q_4 q_1 q_3 q_2$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & q_1 \\ & & q_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ q_{n-1} & & & \\ q_n & & & \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q_n q_1 q_{n-1} q_2 \cdots \\ \qquad q_{\frac{n+3}{2}} q_{\frac{n-1}{2}} q_{\frac{n+1}{2}}, \text{当 } n \text{ 为奇时;} \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q_n q_1 q_{n-1} q_2 \cdots \\ \qquad q_{\frac{n}{2}+1} q_{\frac{n}{2}}, \text{当 } n \text{ 为偶时.} \end{cases}$$

§3.2 四元数矩阵行列式的性质

首先由 Q 中的分配律,我们有:

命题 3.2.1 设 $a_{ij}, b_{ij} \in Q, i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n$,则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$\det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

命题3.2.2 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$, (3.2.1)

其中 $A_1\in Q^{t\times t}, A_2\in Q^{(n-t)\times(n-t)}$,则

$$\det A=\det A_2\det A_1 \tag{3.2.2}$$

证 设 $\sigma_k=(i_1 i_2\cdots i_p)$是 σ 的一个循环因子,$\sigma\in S_n$,由积 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{p-1}i_p}a_{i_pi_1}\neq 0$ 得:

若 $i_1\leqslant t$,则 $i_p, i_{p-1},\cdots,i_3,i_2\leqslant t$,从而

$$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant t \tag*{①}$$

类似地,若 $i_1>t$,则 $i_2,i_3,\cdots,i_p>t$,从而

$$t+1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant n \tag*{②}$$

所以,σ 的每一个循环因子中元素的个数取决于行列式中满足式①或②的非零项.记 ξ 是满足式②的循环因子的乘积,η 是满足式①的循环因子的乘积,则由式(3.1.4)得 $\sigma=\xi\eta$.于是由式(3.1.5)得$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\xi)\varepsilon(\eta)$,从而由式(3.1.8),有

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)<\sigma> = \sum_{\sigma=\xi\eta\in S_n}\varepsilon(\xi)\varepsilon(\eta)<\xi><\eta> \\ &= \sum_{\xi}\varepsilon(\xi)<\xi>\sum_{\eta}\varepsilon(\eta)<\eta> \\ &= \det A_2\det A_1\end{aligned}$$ □

定理3.2.1 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det A\in R$$

即四元数自共轭矩阵的行列式是一个实数.

证 设 $A=(a_{ij})$,由 $A^*=A$,知 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$,于是由式(3.1.9),有

$$\overline{<i_1i_2\cdots i_si_1>}=<i_1i_si_{s-1}\cdots i_2i_1> \quad ①$$

对于 $\det A$ 的表达式(3.1.1),任取 S_n 的一个具有分解式(3.1.2)的元素 σ,考虑

$$\begin{aligned}\{\sigma\}=\varepsilon(\sigma)&[<n_1i_2i_3\cdots i_sn_1>+<n_1i_s\cdots i_3i_2n_1>]\\ &\cdot[<n_2j_2\cdots j_tn_2>+<n_2j_t\cdots j_2n_2>]\cdots\\ &\cdot[<n_rk_2\cdots k_ln_r>+<n_rk_l\cdots k_2n_r>]\end{aligned} \quad ②$$

表达式②中的每一项对应于一个置换,所有这些置换有相同的循环结构:它们有相同个数的循环因子,且相应的循环因子的长度相同,于是它们有相同的奇偶性 $\varepsilon(\sigma)$.因此,$\{\sigma\}$中所有的项它必在 $\det A$ 的表达式中.对于长度$\leqslant2$ 的循环因子,由于式②中方括号中的这样的两项是相同的,这时我们可以作这样的处理,即取相同的两项中的一项.由式①知式②中的方括号中的所有和都是实数,故$\{\sigma\}$也是实数.去掉式(3.1.8)右边的项构成的一个集合的和$\{\sigma\}$.令 τ 是一个任意的置换,从余下的项中类似地去掉$\{\tau\}$,显然,若 $\sigma\neq\tau$,则在$\{\sigma\}$和$\{\tau\}$中的所有的项是不同的.上述的方法如此进行下去,直到式(3.1.8)右边所有的项去掉,这样就证明了

$$\det A=\{\sigma\}+\{\tau\}+\cdots+\{\gamma\}$$

是一个实数. □

命题 3.2.3 设 $A\in SC_n(Q)$,$\sigma\in S_n$,k 是置换σ 的一个循环因子 $\sigma_0=(p_1p_2\cdots p_skq_1\cdots q_t)$中最大的数,记

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=(p_1q_t\cdots q_1kp_s\cdots p_2)\\ \sigma_0{}^+&=(kq_1\cdots q_tp_1\cdots p_s)\\ \bar{\sigma}_0{}^+&=(kp_s\cdots p_2p_1q_t\cdots q_1)\end{aligned}\right\} \quad (3.2.3)$$

则有 $$<\sigma_0>+<\bar{\sigma}_0>=<\sigma_0^+>+<\bar{\sigma}_0^+>. \tag{3.2.4}$$

证 由下面方括号中的元素是实数,我们有

$$\begin{aligned}<\sigma_0>=&<p_1\cdots p_sk>\{[<kq_1\cdots q_tp_1>+<p_1q_t\cdots q_1k>]\\&-<p_1q_t\cdots q_1k>\}\\=&<kq_1\cdots q_tp_1\cdots p_sk>+<p_1q_t\cdots q_1k><p_1\cdots p_sk>\\&-<p_1\cdots p_sk><p_1q_t\cdots q_1k>,\\<\bar{\sigma}_0>=&<p_1q_t\cdots q_1k>\{[<kp_s\cdots p_2p_1>\\&+<p_1p_2\cdots p_sk>]-<p_1p_2\cdots p_sk>\}\\=&<kp_s\cdots p_2p_1q_t\cdots q_1k>\\&+<p_1\cdots p_sk><p_1q_t\cdots q_1k>\\&-<p_1q_t\cdots q_1k><p_1\cdots p_sk>.\end{aligned}$$

将上述两个表达式相加,即得式(3.2.4),对应于式(3.2.4)的右边的项的循环因子中的第一数 k 是最大的,这就是使循环因子的表示已经是相应于式(3.1.3)的正规形式. □

定理 3.2.2 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det P(i,j)^*AP(i,j)=\det A \tag{3.2.5}$$

证 若 i,j,n 是互不相同的,则有

$$P(j,n)P(i,n)P(j,n)=P(i,j) \quad ①$$

因此只须证明

$$\det P(j,n)^*AP(j,n)=\det A.$$

若交换 σ 的元素 n 与 j,将 σ 变成 σ',即

$$\sigma|_{n\leftrightarrow j}=\sigma'$$

由

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)<\sigma> \quad ②$$

得

$$\det P(j,n)^*AP(i,j)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)<\sigma>|_{n\leftrightarrow j}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) < \sigma' > \qquad ③$$

若 n 与 j 在同一个循环因子中，设

$$\sigma = (np_1 \cdots p_s j q_1 \cdots q_t) \cdots, s, t \geqslant 0$$

则交换 n 与 j，可得下面的置换

$$\sigma' = (jp_1 \cdots p_s n q_1 \cdots q_t) \cdots,$$

$$\sigma'^+ = (nq_1 \cdots q_t j p_1 \cdots p_s) \cdots,$$

$$\bar{\sigma}' = (jq_t \cdots q_1 n p_s \cdots p_1) \cdots,$$

$$\bar{\sigma}'^+ = (np_s \cdots p_1 j q_t \cdots q_1) \cdots,$$

由式(3.2.4)，对应的项有关系：

$$< \sigma' > + < \bar{\sigma}' > = < \sigma'^+ > + < \bar{\sigma}'^+ > \qquad ④$$

由于 $\sigma, \sigma', \bar{\sigma}', \sigma'^+$ 与 $\overline{\sigma'}^+$ 有相同的循环结构，从而它们有相同的奇偶性 ϵ，因此由式④知，式③两边两项的和 $\epsilon(\sigma') < \sigma' > + \epsilon(\overline{\sigma'}) < \overline{\sigma'} >$ 变成了式②右边两个正规项的和 $\epsilon(\sigma'^+) < \sigma'^+ > + \epsilon(\bar{\sigma}'^+) < \bar{\sigma}'^+ >$.

若 n, j 在不同的循环因子中，设

$$\sigma = (ni_1 i_2 \cdots i_s) \cdots (u_1 \cdots u_t j v_1 \cdots v_l) \cdots, s, t, l \geqslant 0$$

由式(3.2.4)，我们在式①中有

$$\begin{aligned}
& < \sigma_1' > \cdots < \sigma_2' > + < \sigma_1' > \cdots < \bar{\sigma}_2' > \\
& + < \bar{\sigma}_1' > \cdots < \sigma_2' > \cdots + < \bar{\sigma}_1' > \cdots < \bar{\sigma}_2' > \cdots \\
= & [< \sigma_1' > + < \bar{\sigma}_1' >] \cdots [< \sigma_2' > + < \bar{\sigma}_2' >] \cdots \\
= & [< \sigma_1'^+ > + < \bar{\sigma}_1'^+ >] \cdots [< \sigma_2'^+ > + < \bar{\sigma}_2'^+ >] \cdots
\end{aligned}$$

在最后的表达式中，所有循环因子的表示都是正规的. 因为在方括号中的所有数都是实数，按照正规化条件式(3.1.4)重新排列所有方括号的次序，则表达式中加上系数 $\epsilon(\sigma)$ 的项就变成了式②中的某些项. 因此，在这种情况下，通过将式③中的所有项分成没有共同项的和，式③中的所有项就能正规化成式②中的项. 这样，我们就已经证明：

$$\det P(j,n)^*AP(j,n)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)<\sigma'>$$

$$=\sum_{\sigma^+\in S_n}\epsilon(\sigma^+)<\sigma^+>=\det A.\quad\square$$

命题 3.2.4 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$(不一定为自共轭阵),$\lambda\in Q$,则

$$\det P(n(\lambda))A=\lambda\det A \tag{3.2.6}$$

即 $$\det{}_\lambda A=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\\ \lambda a_{n1}&\lambda a_{n2}&\cdots&\lambda a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix} \tag{3.2.6$'$}$$

证 由行列式定义(3.1.1)式即知. $\square$

命题 3.2.5 设 $A\in SC_n(Q)$,则 $\det AP(n(\lambda))=\lambda\det A$,即

$$\det A_\lambda=\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\lambda\\ a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\lambda\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

证 由行列式定义(3.1.1)知

$$\det A_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r} \varepsilon(\sigma)<\sigma_1><\sigma_2>\cdots<\sigma_r>$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\tilde{\sigma}_1} \varepsilon(\sigma)<\sigma_1><\tilde{\sigma}_1> \qquad ①$$

其中$<\tilde{\sigma}_1>=<\sigma_2>\cdots<\sigma_r>$.易知在$<\tilde{\sigma}_1>$中元素的足标不会出现 n.设 $\sigma_1=(ni_2\cdots i_s)$,如果 σ_1 的长度小于等于 2,由 $A^*=A$ 知a_{nn},$a_{ni_2}a_{i_2n}$为实数,那么

$$<\sigma_1>=a_{nn}\lambda=\lambda a_{nn}\text{或}<\sigma_1>=a_{ni_2}a_{i_2n}\lambda=\lambda a_{ni_2}a_{i_2n} \qquad ②$$

如果 σ_1 的长度大于 2,定义$\overline{\sigma_1}=(ni_s\cdots i_3i_2)$,显然 $\sigma_1\neq\tau_1$,当且仅当$\overline{\sigma_1}\neq\overline{\tau_1}$,因此这样的置换一定会成对出现,并且有

$$<\sigma_1>+<\overline{\sigma_1}>=(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}+a_{ni_s}a_{i_si_{s-1}}\cdots a_{i_3i_2}a_{i_2n})\lambda$$
$$=\lambda(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sn}+a_{ni_s}a_{i_si_{s-1}}a_{i_3i_2}a_{i_2n}) \qquad ③$$

上式可交换的理由是:由 $A^*=A$ 得括号中的数为实数.从而有

$$\det A_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\overline{\sigma_1}} \varepsilon(\sigma)(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_sn}\lambda)<\overline{\sigma}>$$
$$=\lambda \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\overline{\sigma_1}} \varepsilon(\sigma)(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_sn})<\overline{\sigma}>$$
$$=\lambda \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)<\overline{\sigma}_1><\sigma_1>=\lambda\det A \qquad \square$$

定理 3.2.3 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))=\bar{\lambda}\lambda\det A \qquad (3.2.8)$$

证 由定理 3.2.2 及命题 3.2.4 与 3.2.5,有

$$\det P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))$$
$$=\det P(i,n)^* P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))P(i,n)$$
$$=\det(P(i,n)^* P(i(\lambda))^*)A(P(i(\lambda))P(i,n))$$
$$=\det P(n(\lambda))^* AP(n(\lambda))$$
$$=\bar{\lambda}\lambda\det A \qquad \square$$

命题 3.2.6 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$(3.2.9)$$

证 对于任意 $\sigma \in S_n$，在 σ 中 n 和 k 的位置有下列三种可能：

1° $\sigma = \sigma_1(k) = (np_1 \cdots p_l) \cdots (kj_1 \cdots j_t) \cdots, l, t \geqslant 0$

2° $\sigma = \sigma_2(k) = (np_1 \cdots p_l) \cdots (n_h i_1 \cdots i_s k j_1 \cdots j_t) \cdots, l, s, t \geqslant 0$

3° $\sigma = \sigma_3(k) = (np_1 \cdots p_l k j_1 \cdots j_t), \cdots, l, t \geqslant 0$

记式(3.2.9)中的矩阵为 $D_k(d_{ij}^{(k)})$，那么 $d_{nj}^{(k)} = a_{kj} = d_{kj}^{(k)}, j = 1, 2, \cdots, n$. 因此有

$$<\sigma_1(k)> = <kp_1 \cdots p_l n> \cdots <kj_1 \cdots j_t k> \cdots;$$

$$<\sigma_2(k)> = <kp_1 \cdots p_l n> \cdots <n_h i_1 \cdots i_s k j_1 \cdots j_t n_h> \cdots;$$

$$<\sigma_3(k)> = <kp_1 \cdots p_l k j_1 \cdots j_t n> \cdots;$$

又在 D_k 中，$d_{ij}^{(k)} = \overline{a_{ij}} = a_{ji} = d_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n-1$

因此对于 $1 \leqslant j_1, j_2, \cdots, j_t \leqslant n-1$ 有

$$<\overline{j_1 j_2 \cdots j_t}> = <j_t j_{t-1} \cdots j_1>$$

在 1° 的情况下，定义

$$\sigma_1(k)^* = (nj_1 \cdots j_t k p_1 \cdots p_l) \cdots, l, t \geqslant 0$$

显然 $\sigma_1(k) \neq \tau_1(k)$ 当且仅当 $\sigma_1(k)^* \neq \tau_1(k)^*$. 再分两种情况：

ⓐ当 $t \leqslant 1$ 时，$<kj_1 \cdots j_t k>$ 为实数，因此有

$$\begin{aligned} <\sigma_1(k)> &= <kp_1 \cdots p_l n> \cdots <kj_1 \cdots j_t k> \cdots \\ &= <kj_1 \cdots j_t k p_1 \cdots p_l n> \cdots \\ &= <\sigma_1(k)^*> \end{aligned} \quad ①$$

ⓑ当 $t > 1$ 时，再定义

$$\overline{\sigma_1}(k)=(np_1\cdots p_l)\cdots(kj_tj_{t-1}\cdots j_1)\cdots,\ l\geqslant 0$$

显然，$\sigma_1(k)\neq\tau_1(k)$当且仅当$\overline{\sigma_1}(k)\neq\overline{\tau_1}(k)$，且可知满足条件 1°ⓑ的置换一定成对出现. 而我们又有

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma_1(k)\rangle+\overline{\langle\sigma_1(k)\rangle}\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots[\langle kj_1\cdots j_tk\rangle+\langle kj_t\cdots j_1k\rangle]\cdots\\
&=\langle nj_1\cdots j_tkp_1\cdots p_ln\rangle\cdots+\langle nj_t\cdots j_1kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\\
&=\langle\sigma_1(k)^-\rangle+\overline{\langle\sigma_1(k)^+\rangle} \qquad ②
\end{aligned}$$

上式交换的理由是由于方括号中的数为实数(下文中也如此).

在 2°的情况下，定义

$$\sigma_2(k)^*=(nj_1\cdots j_tk_{n_h}i_1\cdots i_skp_1\cdots p_l)\cdots,\ l,s,t\geqslant 0$$

显然，$\sigma_2(k)\neq\tau_2(k)$，当且仅当 $\sigma_2(k)^*\neq\tau_2(k)^*$，又分两种情况：

ⓐ当 $t,s=0$ 时，由于$\langle n_hkn_h\rangle$为实数，且

$$\begin{aligned}
\langle n_hkn_h\rangle&=\langle n_hk\rangle\{[\langle kn_h\rangle+\langle n_hk\rangle]-\langle n_hk\rangle\}\\
&=[\langle kn_h\rangle+\langle n_hk\rangle]\langle n_hk\rangle-\langle n_hk\rangle\langle n_hk\rangle\\
&=\langle kn_hk\rangle
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_2(k)\rangle&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle n_hkn_h\rangle\cdots\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle kn_hk\rangle\cdots\\
&=\langle kn_hkp_1\cdots p_ln\rangle\cdots=\langle\sigma_2(k)^*\rangle \qquad ③
\end{aligned}$$

ⓑ当 $t\geqslant 1$ 或 $s\geqslant 1$ 时，再定义

$$\overline{\sigma_2(k)}=(np_1\cdots p_l)\cdots(n_hj_t\cdots j_1,ki_s\cdots i_1)\cdots,l,t,s\geqslant 0$$

显然，$\sigma_2(k)\neq\tau_2(k)$当且仅当$\overline{\sigma_2(k)}\neq\overline{\tau_2(k)}$，且可知满足条件 2°ⓑ的置换一定成对出现，而我们又有

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_2(k)\rangle&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle n_hi_1\cdots i_sk\rangle\{[\langle kj_1\cdots j_tn_h\rangle\\
&\quad+\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle]-\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle\}\cdots\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\{\langle kj_1\cdots j_tn_hi_1\cdots j_sk\rangle\\
&\quad+\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle\langle n_hi_1\cdots i_sk\rangle
\end{aligned}$$

$$-<n_h i_1\cdots i_s k><n_h i_t\cdots j_1 k>\}\cdots$$

类似地有

$$\begin{aligned}<\overline{\sigma_2(k)}> = &<kp_1\cdots p_l n>\cdots\{<ki_s\cdots i_1 n_h j_t\cdots j_1 k>\\ &+<n_h i_1\cdots i_s k><n_h i_t\cdots i_1 k>\\ &-<n_h j_t\cdots j_1 k><n_h i_1\cdots i_s k>\}\cdots\end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned}&<\sigma_2(k)>+<\overline{\sigma_2(k)}>\\ =&<kp_1\cdots p_l n>\cdots[<kj_1\cdots j_t n_h i_1\cdots i_s k>\\ &+<ki_s\cdots i_1 n_h j_t\cdots j_1 k]\cdots\\ =&[<kj_1\cdots j_t n_h i_1\cdots i_s k>\\ &+<ki_s\cdots i_1 n_h j_t\cdots j_1 k>]<kp_1\cdots p_1 n>\cdots\\ =&[<kj_1\cdots j_t n_h i_1\cdots i_s k p_1\cdots p_l n>\\ &+<ki_s\cdots i_1 n_h j_t\cdots j_1 k p_1\cdots p_l n>]\cdots\\ =&<\sigma_2(k)^*>+<\overline{\sigma_2(k)}^*>\end{aligned} \qquad ④$$

作为置换的集合,并集 $S=(1°ⓐ)\cup(1°ⓑ)\cup(2°ⓐ)\cup(2°ⓑ)$ 为不交并.由前面所述对应 $\sigma_i(k)\to\sigma_i(k)^*$ $(i=1,2)$,为 S 到 3° 的单射,现对于 3° 中的任一元 $\sigma_3(k)=(np_1\cdots p_l k j_1\cdots j_t)\cdots$;如果 $\max\{p_1,\cdots,p_l,k\}=k$,那么 1° 中能找到一个置换与它对应.如果 $\max\{p_1,\cdots,p_l,k\}>k$,那么在 2° 中能找到一个置换与它对应.由式(3.1.5)知 $\varepsilon(\sigma_i(k))=-\varepsilon(\sigma_i(k)^*)$ $(i=1,2)$,从而根据式①,②,③,④,得

$$\begin{aligned}\det D_k &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma(k))<\sigma(k)>\\ &=\sum_{\sigma_1(k)}\varepsilon(\sigma_1(k))<\sigma_1(k)>\\ &\quad+\sum_{\sigma_2(k)}\varepsilon(\sigma_2(k))<\sigma_2(k)>\\ &\quad+\sum_{\sigma_3(k)}\varepsilon(\sigma_3(k))<\sigma_3(k)>\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\sigma_1(k)^*} \epsilon(\sigma_1(k)^*)<\sigma_1(k)^*> \\
&\quad -\sum_{\sigma_2(k)^*} \epsilon(\sigma_2(k)^*)<\sigma_2(k)^*> \\
&\quad +\sum_{\sigma_3(k)} \epsilon(\sigma_3(k))<\sigma_3(k)> \\
&= -\sum_{\sigma_3(k)} \epsilon(\sigma_3(k))<\sigma_3(k)> \\
&\quad +\sum_{\sigma_3(k)} \epsilon(\sigma_3(k))<\sigma_3(k)> = 0
\end{aligned}
$$ □

定理 3.2.4 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 中有两行元素对应相等,则

$$\det A = 0$$

证 设 A 中的第 h 行与第 k 行元素对应相等,则由 $A^* = A$ 知 A 的第 h 列与第 k 列的元素对应相等,于是由定理 3.2.2 知,

$$\det A = \det P(h,n)^* AP(h,n) = \det B$$

其中 B 是第 k 行与第 n 行元素对应相等的自共轭阵,则由命题 3.2.6 知 $\det B = 0$,故 $\det A = 0$. □

定理 3.2.5 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 的第 h 行(列)与第 k 行(列)成左(右)比例,即

$$a_{nj} = \lambda a_{kj}(a_{jh} = a_{jk}\lambda),\ j = 1,\cdots,n,\ \lambda\in Q$$

则

$$\det A = 0$$

证 因 $A^* = A$,故当 A 的 h 列与第 k 列成右比例,即 $a_{jh} = a_{jk}\lambda$ 时,A 的第 h 行与第 k 行成左比例即 $a_{hj} = \bar{\lambda}a_{kj}$,则由定理 3.2.2 及命题 3.2.4,命题 3.2.5 知(不妨设 $h\neq n$)

$$\det A = \det P(h,n)^* AP(h,n) = \bar{\lambda}\lambda \det B$$

其中 B 是第 k 行与第 n 行相同的自共轭矩阵,故由命题 3.2.6 知

$\det B=0$，从而 $\det A=0$. □

定理 3.2.6 设 $A\in SC_n(Q)$，则

$$\det P(i,j_\lambda)^*AP(i,j_\lambda)=\det A$$

证 设 $A=a_{ij}$，则因 $A^*=A$ 有 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$，于是由命题 3.2.1 及定理 3.2.5 知

$$\det P(i,j_\lambda)^*AP(i,j_\lambda)$$

$$=|A|+\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & i\text{ 列} & & j\text{ 列} & & \end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij}\lambda & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}\lambda & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}\lambda & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{\lambda}a_{j1} & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji} & \cdots & \bar{\lambda}a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行})\\ \\ (j\text{ 行})\\ \\ \\ \end{array}$$

$$+\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & i\text{ 列} & & j\text{ 列} & & \end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}\lambda & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{\lambda}a_{j1} & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji}\lambda & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji} & \cdots & \bar{\lambda}a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{ji}\lambda & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}\lambda & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ (i\text{ 行})\\ \\ (j\text{ 行})\\ \\ \\ \end{array}$$

$$= |A| + 0 + 0 + 0 = \det A$$ □

推论 设 $A \in SC_n(Q)$，S 是由 $P(i,j)$ 与 $P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积，则

$$\det S^* AS = \det A$$

证 由定理 3.2.2 与定理 3.2.6 即可推得. □

定理 3.2.7 设 $A \in SC_n(Q)$，$U \in U^{n\times n}$，则

$$\det UAU^* = \det A$$

证 因 $U \in U^{n\times n}$，则 $UU^* = I$，因而 U 经过若干次列的消法变换可化为 $V = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,a)(a \neq 0)$，即存在消法矩阵 $P_1,\cdots,P_t$，使 $UP_1\cdots P_t = V$[1]，于是

$$UP_1\cdots P_tP(n(a^{-1})) = I$$

由此可知

$$U^* = P_1\cdots P_tP(n(a^{-1}))$$

从而有

$$\begin{aligned}
1 &= \det UU^* \\
&= \det P(n(a^{-1}))^* P_t^* \cdots P_1 IP_1\cdots P_tP(n(a^{-1})) \\
&= \overline{a^{-1}}a^{-1}\det I = |a^{-1}|^2
\end{aligned}$$

于是便得到

$$\begin{aligned}
&\det UAU^* \\
&= \det P(n(a^{-1}))^* P_t^* \cdots P_1^* AP_1\cdots P_t^* P(n(a^{-1}))^* \\
&= \det P(n(a^{-1}))^* AP(n(a^{-1})) \\
&= |a^{-1}|^2\det A = \det A
\end{aligned}$$ □

§3.3 四元数矩阵的重行列式及其性质

在上两节，虽然已给四元数矩阵的行列式下了定义，但它一般不具有常规行列式的诸性质，然而我们注意到对自共轭四元数矩

阵来说，常规行列式的一些性质仍类似成立．于是启发人们用 A^*A 的行列式代替 A 的行列式，这就是由陈龙玄教授于 1991 年首先提出的所谓四元数矩阵重行列式的概念，并建立了重行列式理论．这一理论在解决四元数体上线性代数的一些重大问题的过程中显示出较大的优越性．

定义 3.3.1 设 $A\in Q^{n\times m}$，则定义 A 的重行列式为

$$\|A\|=|A^*A| \tag{3.3.1}$$

命题 3.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$，则存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*AS=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n),c_i\in R,i=1,\cdots,n \tag{3.3.2}$$

证 对 A 的阶数 n 作数学归纳法．当 $n=1$ 时，显然命题成立．设 A 为 $n-1$ 阶时，命题成立，现对 n 阶自共轭阵 $A=(a_{ij})$ 来证明命题成立．

若 $a_{11}\neq 0$，为了把位于第 i 列第 1 行的矩阵元素化为零，作“把第 1 列的右 $(-a_{11}{}^{-1}a_{i1})$ 倍加到第 i 列”的初等变换，为此只要把相应的初等矩阵

$$P_i=P(i,(-a_{i1}a_{11}{}^{-1})1),i=2,\cdots,n$$

逐个右乘于 A，就得到

$$AP_2P_3\cdots P_n=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ C & B_{n-1}\end{pmatrix}$$

其中 $C=(a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1})^{\mathrm{T}}$，$B_{n-1}$ 为 $n-1$ 阶方阵，注意到把 P_i $(i=2,\cdots,n)$ 的转置共轭矩阵 $P_i{}^*$ $(i=2,\cdots,n)$ 左乘于 A 时，就实现“把第 1 行的左 $(-a_{11}{}^{-1}a_{1i})$ 倍加到第 i 行”的初等变换，于是有

$$P_n^*\cdots P_2{}^*P_1{}^*AP_1P_2\cdots P_n=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix} \qquad ①$$

其中 $P_1=I_n$，而 $n-1$ 阶方阵 A_{n-1} 仍为自共轭阵. 由归纳假设，它已经可用初等变换化成实对角阵，当对式①右端的方阵 A_{n-1} 作初等变换时，并不影响①中已形成的第 1 行和第 1 列，于是当 $a_{11}\neq 0$ 时，命题已经证明.

当 $a_{11}=0$ 时，若有某 $a_{tt}\neq 0(t=2,3,\cdots,n)$，则在自共轭阵 $B=P^*(1,t)AP(1,t)$ 中，位于第 1 行第 1 列的元素是 $a_{tt}\neq 0$，已属上面讨论过的情形.

当所有 a_{tt} 均等于零时，则 $a_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 中至少有一个不为零，否则 A 中的第 1 行、第 1 列皆为零，可归纳为 $n-1$ 的情形. 若有某 $a_{ij}\neq 0(2\leqslant j\leqslant n)$，则有

$$P^*(1,j_1)AP(1,j_1)=\begin{pmatrix}2a_{1j} & L\\ L^* & A_{n-1}\end{pmatrix}$$

其中 $L\in Q^{1\times(n-1)}$，$A_{n-1}\in SC_{n-1}(Q)$，而由

$$2a_{1j}\neq 0$$

问题归结为上面已讨论过的情形. 于是命题得证. □

推论 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，则存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*AS=\operatorname{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n),c_i>0,i=1,\cdots,n \qquad (3.3.2)'$$

定理 3.3.1 设 $A\in Q^{n\times m}$，则

$$\| A \| \geqslant 0 \qquad (3.3.3)$$

证 因 A^*A 为自共轭矩阵，故由命题 3.3.1 知，存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*A^*AS=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_i\in R,i=1,2,\cdots,n \qquad (3.3.4)$$

故 $\| A \| =\det A^*A=\det S^*A^*AS$

$$= |\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \in R \tag{3.3.5}$$

由式(3.3.4)又有

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = (AS)^*(AS)$$
$$= (\beta_1 \beta_2, \cdots \beta_n)^* (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n),$$

其中 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 AS 的列向量，上式表明，S 把 A 的列向量正交化为

$$(\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}\lambda_j, \lambda_j = (\beta_j, \beta_j) = \beta_j^* \beta_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.3.6}$$

于是由式(3.3.5)及(3.3.6)即得

$$\| A \| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \geqslant 0.$$ □

定理 3.3.2 设 $A \in Q^{n \times n}$，则

$$\| A^* \| = \| A \| \tag{3.3.7}$$

证 首先由定义 3.1.1 可直接验明

$$\det\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix} \qquad ①$$

因左端展开后的每一项也是右端中的项，反之亦然，故相等.

其次，$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$可表为一系列初等矩阵 $P(i, j_\lambda)$ 之积，利用定理 3.2.6，式①及命题 3.2.2，即得

$$(-1)^n \| A^* \| = (-1)^n |AA^*| = \det\begin{pmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A^* & I \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ A^* & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & A^*A \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n |A^*A| = (-1)^n \| A \|$$

故式(3.3.7)成立. □

定理 3.3.3 设 $A, B \in Q^{n\times n}$,则

$$\| AB \| = \| A \| \; \| B \| \tag{3.3.8}$$

证 由式(3.3.4)~(3.3.7),可得

$$\begin{aligned}
\| AB \| &= |B^*(A^*A)B| = |B^*(S^*)^{-1}S^*(A^*A)SS^{-1}B| \\
&= |(S^{-1}B)^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)(S^{-1}B)| \\
&= |(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}B)^*(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \\
&\quad \cdots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}B)| \\
&= \| \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}B \| \\
&= \| (\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}B)^* \| \\
&= \| (S^{-1}B)^* \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \| \\
&= \| (S^{-1}B)^* \| \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\
&= \| (S^{-1}B) \| \; \| A \| = \| B \| \; \| A \| = \| A \| \; \| B \|
\end{aligned}$$ □

推论 设 $A, B \in Q^{n\times n}$,若 $A \sim B$,则

$$\| A \| = \| B \| \tag{3.3.9}$$

证 由 $A \sim B$,则存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$,使

$$PAP^{-1} = B$$

于是由定理 3.3.3,即得

$$\begin{aligned}
\| B \| &= \| PAP^{-1} \| = \| P \| \; \| P^{-1} \| \; \| A \| \\
&= \| PP^{-1} \| \; \| A \| = \| I \| \; \| A \| = \| A \|
\end{aligned}$$ □

定理 3.3.4 设 $P = P(i, j)$, $T = P(i, j_\lambda)$, $G = P(i(\lambda))$,

1° 当 $A \in Q^{n\times m}$ 时,则有

$$\left.\begin{aligned}
&\| AP \| = \| A \|, \; \| PA \| = \| A \|, \\
&\| AT \| = \| A \|, \; \| AG \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

2° 当$A\in Q^{n\times n}$时，则有

$$\| TA \| = \| AT \| = \| A \| \tag{3.3.11}$$

$$\| GA \| = \| AG \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \| \tag{3.3.12}$$

3° 当$A\in Q^{n\times n}$时，若 A 的第h 列(行)是第 k 列(行)的右 λ(左 λ)倍($h\neq k$)，则有

$$\| A \| = 0 \tag{3.3.13}$$

证 1° 因为A^*A 自共轭，由定理3.2.2 及定理 3.2.6，有

$$\| AP \| = |(AP)^*AP| = |P^*A^*AP| = |A^*A| = \| A \|$$

$$\| PA \| = |A^*(P^*P)A| = |A^*IA| = |A^*A| = \| A \|$$

$$\| AT \| = |T^*(A^*A)T| = |A^*A| = \| A \|$$

$$\| AG \| = |G^*(A^*A)G| = \bar{\lambda}\lambda|A^*A| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|.$$

2° 当$A\in Q^{n\times n}$，由定理 3.3.2，有

$$\begin{aligned}\| TA \| &= \| (TA)^* \| = |(TA)(TA)^*| = |T(AA^*)T^*| \\ &= |AA^*| = \| A^* \| = \| A \|.\end{aligned}$$

由定理 3.2.6，有

$$\| AG \| = |G^*A^*AG| = \bar{\lambda}\lambda|A^*A| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|$$

由定理 3.3.2 及定理 3.2.6，有

$$\begin{aligned}\| GA \| &= \| (GA)^* \| = |(GA)(GA)^*| = |G(AA^*)G^*| \\ &= \bar{\lambda}\lambda|AA^*| = \bar{\lambda}\lambda \| A^* \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|\end{aligned}$$

3° 由A^*A 为自共轭阵及定理3.2.4 即知

$$\| A \| = |A^*A| = 0 \qquad \square$$

设 $A=(a_{ij})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in Q^{n\times n}$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是A 的列向量. 由 A 引进列向量

$$\omega_j = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^+ \\ \alpha_n^+ \\ \alpha_{j+1}^+ \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^+ \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{n-1} \alpha_j), j = 1, 2, \cdots, n$$

(3.3.14)

这样的记法是为了简便和醒目.这里约定 $1\alpha_k = \alpha_k$. 可以证明

$$(\alpha_k, \omega_j) = \delta_{kj} \| A \|, k, j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3.3.15)$$

设 $\omega_j = (w_{1j}, \cdots, w_{ij}, \cdots, w_{nj})^{\mathrm{T}}$,记矩阵 $W = (w_{ij})_{n\times n}$,则式(3.3.15)可写成

$$\sum_{t=1}^{n} \bar{a}_{tk} w_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{kt}^{*} w_{tj} = \delta_{kj} \| A \|, \ k, j = 1, 2, \cdots, n$$

(3.3.16)

定理 3.3.5 四元数体上的方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 可逆的充分必要条件是它的重行列式 $\| A \| \neq 0$,且 $A^{-1} = (b_{jk})$, b_{jk} 如式(3.3.19)所示.

证 因 A 可逆,即存在 A^{-1},使 $A^{-1}A = I$,由定理 3.3.3 有,$1 = \| I \| = \| A^{-1}A \| = \| A^{-1} \| \cdot \| A \|$,故 $\| A \| \neq 0$.

当 $\| A \| \neq 0$,由式(3.3.16)得到 $A^* W = I \| A \|$,或

$$\frac{1}{\| A \|} W^* A = I \qquad (3.3.17)$$

可见此时存在 A 之左逆. 由定理 3.3.2, $\| A^* \| = \| A \| \neq 0$,因此 A^* 也存在左逆,即同时存在 A 之右逆,而右逆必然等于左逆,故 A 存在唯一的逆矩阵 A^{-1} 如式(3.3.17),即

$$A^{-1}=\frac{1}{\| A \|}W^{*}=(b_{jk}),\ \bar{b}_{jk}=\frac{1}{\| A \|}w_{kj}$$

依定义 3.3.1 展开式(3.3.14),向量 ω_j 可表为

$$\omega_j=\det(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1},1)^{*}(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots$$
$$\alpha_{n-1}\alpha_j)=\sum_{t=1}^{n}\alpha_t c_{tj} \tag{3.3.18}$$

令 $\delta_k=(0\cdots010\cdots0)^{\mathrm{T}}$,其中"1"在第 k 个位置,则

$$w_{kj}=\delta_k{}^{*}\omega_j=(\delta_k,\omega_j)=(\delta_k,\sum_{t=1}^{n}\alpha_t c_{tj})=\sum_{t=1}^{n}(\delta_k,\alpha_t)c_{tj}$$

由式(3.3.18),最后得到

$$\bar{b}_{jk}=\frac{1}{\| A \|}w_{kj},\ w_{kj}=\det(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1},\delta_k)^{*}$$
$$(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1}\alpha_j),\quad j,k=1,2,\cdots,n \tag{3.3.19}$$

定义 3.3.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\| A \|\neq 0$,则称 A 为**非奇异矩阵**,否则称为**奇异矩阵**.

由定理 3.3.5 及定义 3.3.2,可得如下

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 可逆$\Leftrightarrow A$ 非奇异.

定义 3.3.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 Q 上的 r 个 n 维列向量,若存在不全为零的四元数 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为**左线性相关**,否则称为**左线性无关**.同样可定义**右线性相关**和**右线性无关**.

定理 3.3.6 设 $A_{n\times m}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in Q^{n\times m}$,则列向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$右线性无关的充分必要条件是 $\| A_{n\times m}\|\neq 0$.

证 当$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$右线性相关时,无妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s<m)$ 是它的一个极大右线性无关组,于是存在由若干个初等矩阵 $P(i,j),P(k,l_\lambda)$之积 S,使

$$A_{n\times m}S=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)S=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,0,\cdots,0),s<m$$

由定理 3.3.2,得到

$$\begin{aligned}\|A_{n\times m}\| &= \|A_{n\times m}S\| = \|(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,0,\cdots,0)\| \\ &= \|(A_s,0)\| = \det\begin{pmatrix}A_s^*A_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0 \qquad (3.3.20)\end{aligned}$$

所以,当 $\|A_{n\times m}\|\neq 0$ 时,它的列向量组只能是右线性无关的.

再证必要性.设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$右线性无关,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都不是零向量.显然存在若干个行的初等变换 $P(i,j)$和列的初等变换 $T=P(k,l_\lambda)$,使

$$A_{n\times m}\to\begin{pmatrix}c_1 & 0\cdots 0\\ * & \\ \vdots & * \\ * & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_1 & 0 & \cdots\cdots 0\\ * & c_2 & 0\cdots 0\\ \vdots & * & \\ * & \vdots & * \\ & * & \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}c_1 & & 0\\ & c_2 & \\ & & \ddots & \\ & * & & c_m\\ & & * & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_1 & & 0\\ & c_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & c_m\\ & & B & \end{pmatrix}$$

即存在初等矩阵之积 P 和 T,使

$$PA_{n\times m}T=\begin{pmatrix}c_1 & & 0\\ & c_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_m\\ & & B & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix},\quad c_1c_2\cdots c_m\neq 0 \quad (3.3.21)$$

于是由式(3.3.10),有

$$\|A_{n\times m}\| = \|PA_{n\times m}\mathrm{T}\| = \left\|\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right\| = \det(C^*C+B^*B)$$

$$
=\det\begin{pmatrix} b_{11}+\bar{c}_1c_1 & b_{21}+0 & \cdots & b_{1n}+0 \\ b_{21}+0 & b_{22}+\bar{c}_2c_2 & \cdots & b_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1}+0 & b_{n2}+0 & \cdots & b_{nn}+\bar{c}_nc_n \end{pmatrix}
$$

其中 $B^*B=(b_{ij})_{m\times m}$. 再利用命题 3.2.1 及 3.2.2,把上行列式按行完全拆开,得到若干个都是自共轭的行列式,它们可以调整成对角块形式,再利用定理 3.3.2 得知它们的值都非负,于是得出

$$
\begin{aligned}
\| A_{n\times m} \| &= \det C^*C+\det B^*B+\cdots \\
&= \bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_mc_m+\| B \| +\cdots \\
&\geqslant \bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_mc_m>0
\end{aligned}
$$

□

注 即使 $m=n$, A 是方阵的情形,列向量右线性无关的条件 $\| A \| \neq 0$,也不能用行列式 $|A|\neq 0$ 代替. 例如:

$$
\alpha_1=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}\mathrm{j}=\begin{pmatrix} \mathrm{k} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}; \quad \beta_1=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} \mathrm{k} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

α_1,α_2 右线性相关,而

$$
\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & -\mathrm{i} \end{vmatrix} = -\mathrm{i}^2-\mathrm{k}^2=2\neq 0
$$

$$
\begin{Vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & -\mathrm{i} \end{Vmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & 2 \end{pmatrix}=0
$$

β_1,β_2 右线性无关,而

$$
\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{i}-\mathrm{jk}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0, \quad \begin{Vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{Vmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=4\neq 0
$$

定理 3.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$, $B\in Q^{m\times m}$, $C\in Q^{m\times n}$, $D\in Q^{n\times m}$,则

$$
\begin{Vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{Vmatrix} = \| A \| \, \| B \| \tag{3.3.22}
$$

证 先证

$$\left\| \begin{matrix} A & D \\ 0 & B \end{matrix} \right\| = \| A \| \, \| B \|$$

记 $G = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则

$$\| G \| = \det G^* G = \det \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ D^* & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^* A & A^* D \\ D^* A & D^* D + B^* B \end{pmatrix} \qquad ①$$

显然，当 $\| A \| = 0$ 时，由定理 3.3.6 知 A 的列向量右线性相关，则 G 的前 n 个列向量亦右线性相关，故 $\| G \| = 0$，此时定理成立.

若 $\| A \| \neq 0$，则由定理 3.3.5 知，A 可逆，从而 A^* 亦可逆. 记 $S = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1} D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$，则 S 可分解为一系列初等矩阵 $P_{n+m}(i, j_\lambda)$ 的乘积，由于对任意的 $P_{n+m}(i, j_\lambda)$ 都有

$$\left| P_{n+m}(i, j_\lambda)^* (G^* G) P_{n+m}(i, j_\lambda) \right| = |G^* G|$$

故由式①及命题 3.2.2 有

$$\| G \| = |G^* G| = |S^* G^* G S|$$

$$= \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^* (A^{\mathrm{T}})^* & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* A & A^* D \\ D^* A & D^* D + B^* B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1} D \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^* A & 0 \\ 0 & B^* B \end{pmatrix}$$

$$= |B^* B| \, |A^* A| = \| B \| \, \| A \| = \| A \| \, \| B \|$$

同理可证其他情形. □

定理 3.3.8 设 $A \in Q^{n \times n}$，$B \in Q^{n \times m}$，$C \in Q^{m \times n}$，$D \in Q^{m \times m}$，且 A 可逆，则

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| = \| A \| \, \| D - C A^{-1} B \| \qquad (3.3.23)$$

证 当 A 可逆时,我们有

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

而$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}$是一系列初等矩阵 $P(i,j_\lambda)$ 之积,于是由式(3.3.11)及定理 3.3.7 即得所证. □

定理 3.3.9 设 $A\in Q^{n\times n}$, $D\in Q^{m\times m}$,且皆可逆,$B\in Q^{n\times m}$,$C\in Q^{m\times n}$,则有

$$\| D-CA^{-1}B \| =(\| A \|)^{-1}\| D\| \, \| A-BD^{-1}C \| \tag{3.3.24}$$

证 因为有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

而$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}$是一系列初等矩阵 $P(i,j_\lambda)$ 之积,故由式(3.3.11)及定理 3.3.7,有

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| = \| A-BD^{-1}C \| \, \| D \| \tag{3.3.25}$$

于是由式(3.3.23)与(3.3.25),有

$$\| A \| \, \| D-CA^{-1}B \| = \| A-BD^{-1}C \| \, \| D \| \tag{3.3.26}$$

由此即得式(3.3.24). □

定理 3.3.10 设 $A\in SC_n^{\geq}(Q)$,则

$$|A| = \det A = \| A \|^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.27}$$

证 因 $A\in SC_n^{\geq}(Q)$,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$(见后面定理 4.3.2)使 $A=PP^*$,于是由定理 3.3.3 及定理 3.3.2,有

$$\| A \| = \| PP^* \| = \| P \| \, \| P^* \| = \| P \|^2$$

$$|A| = |PP^*| = \| P^* \| = \| P \|$$

故 $$|A|^2 = \| A \|,\text{即} |A| = \| A \|^{\frac{1}{2}}.$$ □

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$|A| = \det A = \|A\|^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.27$'$}$$

证 对任意实数 $\varepsilon>0$，则 $A+\varepsilon I\in SC_n^{>}(Q)$，由定理3.3.10，有

$$|A+\varepsilon I| = \|A+\varepsilon I\|^{\frac{1}{2}}$$

在上式中，令 $\varepsilon\to0^+$，即得

$$|A| = \|A\|^{\frac{1}{2}} \qquad \square$$

定理 3.3.11 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，则对任意可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，有

$$|PAP^*| = |PP^*||A| \tag{3.3.28}$$

证 由定理3.3.2，有

$$\|PAP^*\| = \|P\|\|A\|\|P^*\| = \|PP^*\|\|A\|$$

再由上式及定理3.3.10，即有

$$\begin{aligned}|PAP^*| &= \|PAP^*\|^{\frac{1}{2}} = \|PP^*\|^{\frac{1}{2}}\|A\|^{\frac{1}{2}}\\ &= |PP^*||A|\end{aligned} \qquad \square$$

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则对任意可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，有

$$|PAP^*| = |PP^*||A|$$

证 对任意 $\varepsilon>0$，则有 $A+\varepsilon I\in SC_n^{>}(Q)$，由定理3.3.11有

$$|P(A+\varepsilon I)P^*| = |PP^*||A+\varepsilon I|$$

在上式中令 $\varepsilon\to0^+$，即得

$$|PAP^*| = |PP^*||A| \qquad \square$$

§3.4 四元数矩阵的重行列式与逆矩阵的计算

由上我们看到，重行列式在解决四元数体上线性代数的一些重大问题有着很大的优越性，但四元数体上的重行列式和逆矩阵若按定义计算是相当麻烦的. 下面给出四元数矩阵重行列式与逆

矩阵的具体计算.

定理3.4.1 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$为上三角阵,则

$$\| A \| = |\lambda_1|^2\cdots|\lambda_n|^2 \tag{3.4.1}$$

当 A 为下三角阵时也有类似结果.

证 由定理3.3.7即得. □

定理3.4.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\| A \|\neq 0$,则存在可逆阵 $S\in Q^{n\times n}$,且 S 是一系列初等阵 $P(i,j)$ 与 $P(i,j_\lambda)$ 之积,使 $SA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,从而有 $\| A \| = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\cdots|\lambda_n|^2$.

证 实际上只需证明矩阵 A 可通过一系列行(左)初等变换化为上三角阵即可.

对 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in Q^{n\times n}$,我们按以下几步进行:

1. 若 $a_{11}\neq 0$,第1行左乘以 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$加至第 i 行($i=2,\cdots,n$),此举可将 a_{11}所在列中 a_{11}以下的元素皆化为0,再转至第4步;

2. 若 $a_{11}=0$,但 $a_{i1}\neq 0(i\in\{2,3,\cdots,n\})$,则互换第1行与第 i 行,再回至第1步;

3. 若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$,则显然有 $\| A \| =0$;

4. 将去掉第1行与第1列余下的子阵重复上述作法,直至最后可将 A 通过行(左)初等变换化为上三角形阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,此时即有 $\| A \| = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\cdots|\lambda_n|^2$. □

容易看出,上述定理的证明过程就是四元数重行列式的一种计算方法,它相当于实数域或复数域上的行列式的消元法.此方法中四元数的乘法运算次数约有$\frac{1}{3}n^3$次,与按定义3.1.1进行计算

所需约$(n-1)n!$的计算量相比较，当 n 较大时，要少得多，且便于编程计算.

由定理 3.3.5 知对 $A\in Q^{n\times n}$，当 $\|A\|\neq 0$ 时，A 是可逆的，由定理 3.4.1 结合定理 3.4.2 并仿照复数域上做法容易证得如下

定理 3.4.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，$\|A\|\neq 0$，则存在可逆阵 $T\in Q^{n\times n}$，且 T 是一系列初等阵 $P(i,j)$，$P(i,j_\lambda)$ 和 $P(i(\lambda))$ 之乘积，使得 $TA=E$，此时有 $A^{-1}=T$.

此定理告诉我们，$Q^{n\times n}$ 中可逆阵 A 必可通过一系列行(左)初等变换化为单位矩阵 I_n，因此，我们可以把复数域上求逆阵的初等变换法移植到四元数体.

对 $A\in Q^{n\times n}$，作矩阵 $B=(A,I_n)\in Q^{n\times 2n}$，对 B 只作行的(左)初等变换，直到将 B 化为形式(I_n,T)，此时 T 即为A^{-1}，若此过程不能完成，则必有 $\|A\|=0$，即 A 不可逆. 此法中四元数乘法运算量约为$\frac{1}{3}n^3$ 次，比用定理 3.3.5 中给出的公式中的所需的 $n^3n!$ 的计算量要简化多了，且易于编程计算.

§3.5 四元数矩阵行列式的其他定义

本节简要地介绍四元数矩阵的行列式的其他定义.

谢邦杰教授对 n 阶四元数矩阵 A 的行列式(不妨记为 $|A|_1=\det_1 A$)是这样间接定义的：如果 $\lambda I-A$ 能由定义 2.1.3 中所规定的三类初等变换化简成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \varphi_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 $\varphi_1(\lambda)|\varphi_2(\lambda)|\cdots\varphi_s(\lambda)$为 R 上的首系数为 1 的多项式，则定义

$$|A|_1=\det{}_1A=(-1)^n\varphi_1(0)\cdots\varphi_s(0)$$

而对自共轭四元数矩阵 A 来说，上述行列式的定义可等价地叙述为如下：

定义 3.5.1 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$，则定义

$$|A|_1=\det{}_1A=\det{}_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{n_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sn_1}a_{n_2j_2}\cdots a_{j_tn_2}\cdots a_{n_rk_2}\cdots a_{k_ln_r} \tag{3.5.1}$$

其中 S_n 是 n 文字的对称群，σ 的循环表示应写成如下正规式：

$$\sigma=(n_1i_2i_3\cdots i_s)(n_2j_2j_3\cdots j_t)\cdots(n_rk_2k_3\cdots k_l) \tag{3.5.2}$$

$$n_1<i_2,\cdots,i_s;n_2<j_2,\cdots,j_t;\cdots;n_r<k_2,\cdots,k_l \tag{3.5.3}$$

$$1=n_1<n_2<\cdots<n_r\leqslant n \tag{3.5.4}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma)&=(-1)^{(s-1)+(t-1)+\cdots+(l-1)}\\&=(-1)^{n-r}\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

同样可以证明下述

定理 3.5.1 设 $A\in SC_n(Q)$，则有

1° $\det_1P(i,j)^*AP(i,j)=\det_1A$

2° $\det_1P(i,j_\lambda)^*AP(i,j_\lambda)=\det_1A$

3° $\det_1P(i(\lambda))^*AP(i(\lambda))=\bar{\lambda}\lambda\det_1A$

谢邦杰意义下的四元数矩阵行列式的研究，在 20 世纪 80～90 年代中获得了不少成果，对四元数矩阵的研究起了较大的推动作用.

我们指出，对于一般的四元数矩阵 A 来说，$|A|$ 与 $|A|_1$ 不一定相等，例如取

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{pmatrix}$$

则有 $|A| = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = 1\cdot\mathrm{i} - \mathrm{j}\cdot\mathrm{k} = \mathrm{i} - \mathrm{i} = 0$

$$|A|_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \mathrm{i}\cdot 1 - \mathrm{k}\cdot\mathrm{j} = \mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}$$

故
$$|A| \neq |A|_1$$

但是对于自共轭四元数矩阵来说，陈龙玄意义下的行列式与谢邦杰意义下的行列式是一样的，即这时定义 3.2.1 与定义 3.5.1 是等价的．事实上，我们有如下

定理 3.5.2 设 $A \in SC_n(Q)$，则

$$|A|_1 = |A|$$

证 因 $A^* = A$，则由命题 3.3.1 知，存在可逆阵 $S \in Q^{n\times n}$，且 S 由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$组成的一系列初等矩阵之积，使得

$$S^*AS = \mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n),\ c_i \in R,\ i = 1,\cdots,n$$

于是由定理 3.2.2 及定理 3.2.6，有

$$\det A = \det(\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)) = c_1c_2\cdots c_n$$

同样由定理 3.5.1，亦有

$$\det\nolimits_1 A = c_1c_2\cdots c_n$$

故
$$|A|_1 = |A| \qquad \square$$

此外，四元数矩阵 A 的行列式还有如下一种定义，不妨称之为四元数矩阵 A 的拟行列式．

定义 3.5.1 设 $A \in Q^{n\times n}$，且 $A = A_1 + A_2\mathrm{j}$，$A_1, A_2 \in C^{n\times n}$，

$$A^\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \in C^{2n\times 2n} \tag{3.5.6}$$

则定义 A 的**拟行列式**为 $2n$ 阶复矩阵A^σ 的行列式，即

$$\mathrm{qdet}A = \det A^\sigma = |A^\sigma| = \begin{vmatrix} A_1 & -A_2 \\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{vmatrix} \tag{3.5.7}$$

拟行列式保持行列式的一些重要性质,例如:$A\in Q^{n\times n}$ 可逆当且仅当 $\mathrm{qdet}A\neq 0$;对任意 A、$B\in Q^{n\times n}$,有 $\mathrm{qdet}AB=\mathrm{qdet}A\,\mathrm{qdet}B$;准三角分块方阵的拟行列式等于其对角块拟行列式的乘积等.但是也有一些行列式经典性质对拟行列式不成立,例如:行列式不是行(列)的线性函数;其 Lpalace 展开公式不再成立等等.但拟行列式还有一些性质.

定理 3.5.3

1° 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 $\mathrm{qdet}A\in R$;

2° 若 $A\in C^{n\times n}$,则 $\mathrm{qdet}A\geqslant 0$.

证 1° 设 $A=A_1+A_2j$,$A_1,A_2\in C^{n\times n}$,则

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}$$

于是
$$\overline{\mathrm{qdet}A}=\overline{\det A^\sigma}=\begin{vmatrix}\overline{A}_1 & -\overline{A}_2\\ A_2 & A_1\end{vmatrix}$$

把这个复行列式作如下变换:

1) 以 -1 乘第 $1,3,\cdots,2n-1$ 行和列;

2) 第 t 行与第 $t+1$ 行对换,同时第 t 列与第 $t+1$ 列对换,$t=1,3\cdots,2n-1$.

按行列式的性质,上述变换不改变此复行列式的值,但另一方面,变换之后的行列式成为 $\det A^\sigma=\mathrm{qdet}A$,故 $\mathrm{qdet}A$ 是实数.

证 2° 当 $A\in C^{n\times n}$ 时,$A^\sigma=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$,

故
$$\mathrm{qdet}A=\begin{vmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{vmatrix}=\det A\det\overline{A}=|\det A|^2\geqslant 0. \qquad \square$$

我们自然会问,四元数矩阵的重行列式与拟行列式之间有什么关系?我们将证明,四元数方阵的重行列式与拟行列式是一致的.为此,我们先给出关于四元数矩阵的 Jordan 标准形的一个定理,而其证明可参见文献[25].

定理 3.5.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 相似于一个 Jordan 形矩阵 J,即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\omega_1) & & & \\ & J_{n_2}(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\omega_k)\end{pmatrix}=J,\ \sum_{s=1}^{k} n_s=n \tag{3.5.8}$$

其中

$$J_{n_s}(\omega_s)=\begin{pmatrix} \omega_s & 1 & & \\ & \omega_s & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \omega_s \quad 1\end{pmatrix}\in Q^{n_s\times n_s},1\leqslant s\leqslant k \tag{3.5.9}$$

其中,$\omega_s=a_s+b_s\mathrm{i}\in C,b_s\geqslant 0,1\leqslant s\leqslant k$.且除了对角 Jordan 块的排列次序外,$J$ 是由 A 唯一确定的.我们称式(3.5.8)中的 J 为 A 的 Jordan 标准形.

定理 3.5.5 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 的重行列式等于 A 的拟行列式,即有

$$\| A \| =\mathrm{qdet}A \tag{3.5.10}$$

证 设 A 的 Jordan 标准形 $J=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_k}(\lambda_k))$,其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为复数,则由定理 3.5.4 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使得 $P^{-1}AP=J$,由定理 3.3.3,有

$$\| J \| = \| P^{-1}AP \| = \| P^{-1} \| \ \| A \| \ \| P \| = \| A \|$$

再由定理 3.3.7,有

$$\| A \| = \prod_{i=1}^{k} \| J_{n_i}(\lambda_i) \|$$

而

$$\| J_{n_i}(\lambda_i) \| = |J_{n_i}^*(\lambda_i)J_{n_i}(\lambda_i)| = |\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)|\,|J_{n_i}(\lambda_i)|$$

故
$$\| A \| = \prod_{i=1}^{k} \left|\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)\right|\,\left|J_{n_i}(\lambda_i)\right|$$

另一方面，由复数矩阵的性质知

$$J^{\sigma}=(P^{-1}AP)^{\sigma}=(P^{\sigma})^{-1}A^{\sigma}P^{\sigma}$$

于是有

$$\begin{aligned}|A^{\sigma}|=|J^{\sigma}|&=|\mathrm{diag}(J,\bar{J})|=|\bar{J}||J|\\&=\prod_{i=1}^{k}\left|\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)\right|\left|J_{n_i}(\lambda_i)\right|\end{aligned}$$

所以有

$$\|A\|=|A^{\sigma}|=\mathrm{qdet}A$$ □

推论　设 $A\in Q^{n\times n}$，则 $\mathrm{qdet}A\geqslant 0$.

第四章　四元数矩阵的另几个数值特征

矩阵是由 $m\times n$ 个元素排成的一个整体，这个看来相当简单的对象，实际上可以千变万化，极其复杂，这也许就是矩阵魅力之所在．但是在许多实际情况起突出作用的常常是矩阵的某些数值特征，如矩阵的行列式、特征值、奇异值、秩、迹、范数等，这些数值特征构成了常规矩阵理论中的重要内容而被普遍地研究过，对四元数矩阵来说，当然也要重点研究这些数值特征．我们曾在第三章专门讨论了四元数矩阵的行列式问题，本章将继续讨论四元数矩阵的特征值、谱、奇异值、秩与迹等几个矩阵数值特征，而关于这些数值特征的不等式将放到第五章讨论．

§4.1　四元数矩阵的特征值与特征多项式

由于四元数乘法不满足交换律，这使得四元数矩阵的特征值与特征多项式的定义及性质比起常规矩阵来要复杂得多．

定义 4.1.1　设 $A\in Q^{n\times n}$，若存在 $\lambda\in Q$ 及 $0\neq\alpha\in Q^{n\times 1}$，使得

$$A\alpha=\alpha\lambda\text{（或 }A\alpha=\lambda\alpha\text{）}\tag{4.1.1}$$

则称 λ 为 A 的**右（或左）特征值**，而称 α 为 A 的属于右（或左）特征值 λ 的**特征向量**．如果 λ 既是 A 的右特征值，又是 A 的左特征值，则称 λ 为 A 的**特征值**．

注　四元数矩阵 A 的右特征值不一定是左特征值，反之，左

特征值也不一定为右特征值.我们将在后面举例说明之.

定义 4.1.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则称 $\|\lambda I_n - A\|$ 为 A 的**重特征多项式**,记为 $F_A(\lambda)$,或简记为 $F(\lambda)$,即

$$F_A(\lambda)=\|\lambda I_n - A\| \tag{4.1.2}$$

定义 4.1.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,则称 A 的导出阵 $A^\sigma\in C^{2n\times 2n}$ 的特征多项式 $|\lambda I_{2n}-A^\sigma|$ 为 A 的**拟特征多项式**,记为 $F_A^\sigma(\lambda)$,或简记为 $F^\sigma(\lambda)$,即

$$F_A^\sigma(\lambda)=|\lambda I_{2n}-A^\sigma| \tag{4.1.3}$$

定理 4.1.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,$\lambda\in Q$,则 λ 是 A 的左特征值 $\Leftrightarrow$ $F_A(\lambda)=0$.

证 λ 是 A 的左特征值,即存在 Q 上的非零 n 维向量 x,使得 $Ax=\lambda x$,即 $(\lambda I-A)x=0$,这等价于 $\lambda I-A$ 的列向量右线性相关,由定理 3.3.6 知,这又等价于 $\|\lambda I-A\|=0$,即

$$F_A(\lambda)=0$$ □

命题 4.1.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\lambda_0\in Q$ 是 A 的右特征值,α 是 A 的属于 λ_0 的特征向量,$\lambda\sim\lambda_0$(即 $\exists\, 0\neq b\in Q$,使 $\lambda=b^{-1}\lambda_0 b$)则 λ 也是 A 的右特征值,而 $\beta=\alpha b$ 是 A 的属于 λ 的特征向量.

证 由条件有

$$A\alpha=\alpha\lambda_0$$
$$\lambda=b^{-1}\lambda_0 b,\ 0\neq b\in Q$$
$$\beta=\alpha b$$

于是有

$$A\beta=A\alpha b=\alpha\lambda_0 b=\alpha b b^{-1}\lambda_0 b=\alpha b\lambda=\beta\lambda$$

故 λ 是的右特征值,$\beta=\alpha b$ 是 A 的属于 λ 的特征向量. □

定理 4.1.2(右特征值存在性) 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 必存在右特征值 $\lambda=a+bi\in C$,且 $\bar\lambda$ 也是 A 的右特征值,从而 A 必有非负虚部的右特征值.

证 由式(2.3.1),可设

$$A=A_1+A_2\mathrm{j}\quad(\text{其中 } A_1,A_2\in C^{n\times n})$$

由式(2.3.8),有

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\in C^{2n\times 2n}$$

由 C 上的矩阵理论可知,A^σ 必有在特征值 $\lambda\in C\subset Q$,于是有 C 上的 $2n$ 维非零列向量 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$,使

$$\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda$$

其中 α_1,α_2 是 C 上的 n 维列向量,即

$$A_1\alpha_1-A_2\alpha_2=\alpha_1\lambda \qquad ①$$

$$\overline{A}_2\alpha_1+\overline{A}_2\alpha_2=\alpha_2\lambda \qquad ②$$

将式②两端取共轭(注意到它们都是 C 上的矩阵),得

$$A_2\overline{\alpha_1}+A_2\overline{\alpha_2}=\overline{\alpha_2\lambda} \qquad ③$$

作 Q 上 n 维列向量

$$\alpha=\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j},\ \beta=-\bar{\alpha}_2+\alpha_1\mathrm{j} \qquad ④$$

由 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\neq 0$ 知,α_1,α_2 中至少有一个不为零,从而 α 与 β 均为 Q 上的非零的 n 维列向量,于是由式④,(1.3.6),①,③,有

$$\begin{aligned}A\alpha&=(A_1+A_2\mathrm{j})(\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j})\\&=(A_1\alpha_1-A_2\alpha_2)+(A_1\bar{\alpha}_2+A_2\bar{\alpha}_1)\mathrm{j}\\&=\alpha_1\lambda+\bar{\alpha}_2\bar{\lambda}\mathrm{j}=\alpha_1\lambda+\bar{\alpha}_2\mathrm{j}\lambda\\&=(\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j})\lambda=\alpha\lambda\end{aligned}$$

故 λ 是 A 的右特征值.

又因为

$$A\beta=(A_1+A_2\mathrm{j})(-\bar{\alpha}_2+\alpha_1\mathrm{j})$$

$$
\begin{aligned}
&= (-A_1\bar{\alpha}_2 - A_2\bar{\alpha}_1) + (A_1\alpha_1 - A_2\alpha_2)\mathrm{j} \\
&= -\bar{\alpha}_2\bar{\lambda} + \alpha_1\lambda\mathrm{j} \\
&= -\bar{\alpha}_2\bar{\lambda} + \alpha_1\mathrm{j}\bar{\lambda} \\
&= (-\bar{\alpha}_2 + \alpha_1\mathrm{j})\bar{\lambda} \\
&= \beta\bar{\lambda}
\end{aligned}
$$

所以 λ 与 $\bar{\lambda}$ 均为 A 的右特征值. 而 λ 与 $\bar{\lambda}$ 必有一具有非负虚部.

□

例 Q 上的二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{pmatrix}$$

由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} j$$

令

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

作 C 上的 4 阶矩阵,即 A 的导出阵

$$A^\sigma = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 的拟特征多项式

$$F_A^\sigma(x) = |xI_4 - A^\sigma| = \begin{vmatrix} x-1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & x-1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4$$

令 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

则 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\lambda_2$ 及 $\bar{\lambda}_2$ 都是 A^σ 在 C 上的右特征值.对 λ_1,容易求得齐次线性方程组

$$(\lambda_1 I_4-A^\sigma)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

的一个非零解

$$x_1=\lambda_1(\lambda_1-1),\quad x_2=-\mathrm{i}\lambda_1(\lambda_1-1)^2$$
$$x_3=\mathrm{i}(\lambda_1-2),\quad x_4=-(\lambda_1-)(\lambda_1-2)$$

令

$$\begin{aligned}\alpha &=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{x}_3\\\bar{x}_4\end{pmatrix}\mathrm{j}=\begin{pmatrix}x_1+\bar{x}_3\mathrm{j}\\x_2+\bar{x}_4\mathrm{j}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1-1)-(\bar{\lambda}_1-2)\mathrm{k}\\-\mathrm{i}\lambda_1(\lambda_1-1)^2-(\bar{\lambda}_1-1)(\bar{\lambda}_1-2)\mathrm{j}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{k}\\\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}+\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\mathrm{k}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则有 $A\alpha_1=\alpha_1\lambda_1$,即 λ_1 是 A 的右特征值.

同样令 $\beta_1=\begin{pmatrix}-\bar{x}_3\\-\bar{x}_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}\mathrm{j}$,有 $A\beta_1=\beta_1\bar{\lambda}_1$,即 $\bar{\lambda}_1$ 也是 A 的右特征值. □

注 定理 4.1.2 表明,Q 上任何方阵在 $C\subset Q$ 中总有右特征值,而且它的非实右特征值在 C 中是成对出现的.

定理 4.1.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,则必存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $P^{-1}AP$ 是上三角阵,即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

其中 $\lambda_s=a_s+h_s\mathrm{i}(h_s\geqslant 0)\in C, s=1,\cdots,n$.

证 对阶数 n 归纳. 当 $n=1$ 时,由命题 1.3.7 知定理成立. 假定对于 Q 上 $n-1$ 阶矩阵定理成立. 对 Q 上 n 阶矩阵 A,由定理 4.1.2,存在 $\lambda_1\in C$ 以及 Q 上 n 维非零列向量 α_1,使

$$A\alpha_1=\alpha_1\lambda_1$$

把 α_1 扩充为 Q 上 n 维右列向量空间的一个基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列得到 Q 上一个 n 阶矩阵 P_1,则 P_1 是可逆阵,且

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \bar{\beta} \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

其中 β 是 Q 上 $n-1$ 维列向量,A_1 是 Q 上 $n-1$ 阶的矩阵,由归纳假设,存在 Q 上 $n-1$ 阶可逆阵 T,使

$$T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \lambda_3 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_s=a_s+h_s\mathrm{i}\in C, h_s\geqslant 0, s=2,3,\cdots,n$.

令 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & T\end{pmatrix}$,则 $P\in Q^{n\times n}$ 且 P 可逆,并且 $P^{-1}AP$ 具有式(4.1.4)的形式. 于是定理得证. □

对 $\forall\, q\in Q$,由式(1.1.10)知,q 的矩 $N(q)=\bar{q}q$,q 的迹 $T(q)=q+\bar{q}$;对 n 维列向量 $\alpha=(q_1,q_2,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,我们定义 $N(\alpha)\xlongequal{\triangle}\sum\limits_{i=1}^{n}N(q_i)=\alpha^*\alpha$.

命题 4.1.2 设 $\alpha,\beta\in Q^{n\times 1}$，$\alpha\neq\beta$，若 $N(\alpha)=N(\beta)$，且 $\alpha^*\beta\in R$，则存在广义酉阵 $U=I_n-2uu^*$，使 $U\alpha=\beta$，其中 $u\in Q^{n\times 1}$是单位列向量(即 $N(u)=1$).

证 作 Q 上的 n 维列向量

$$u=(\alpha-\beta)(\sqrt{N(\alpha-\beta)})^{-1} \qquad ①$$

易知 $N(u)=1$. 将上式改写为

$$\beta-\alpha=-u\sqrt{N(\alpha-\beta)} \qquad ②$$

由假设 $\alpha^*\beta\in R$，则有

$$\overline{\alpha^*\beta}=\alpha^*\beta$$

又$\overline{\alpha^*\beta}=(\alpha^*\beta)^*$，再由(2.1.10)式，有

$$(\alpha^*\beta)^*=\beta^*\alpha$$

故

$$\alpha^*\beta=\beta^*\alpha$$

于是

$$\begin{aligned}N(\alpha-\beta)&=(\alpha-\beta)^*(\alpha-\beta)=(\alpha^*-\beta^*)(\alpha-\beta)\\&=\alpha^*\alpha+\beta^*\beta-\beta^*\alpha-\alpha^*\beta=\overline{2(\alpha^{\mathrm{T}}-\beta^{\mathrm{T}})}\alpha\end{aligned}$$

故由上式及式②即得

$$\sqrt{N(\alpha-\beta)}=2u^*\alpha$$

再由上式及式①，②，即有

$$\beta-\alpha=-2uu^*\alpha$$

即

$$\beta=\alpha-2uu^*\alpha=(I_n-2uu^*)\alpha=U\alpha \qquad \square$$

命题 4.1.3 设可逆阵 $A\in Q^{n\times n}$，则必存在 $U\in U^{n\times n}$及可逆的上三角阵 $V\in Q^{n\times n}$，且

$$V=\begin{pmatrix}v_1 & & * \\ & v_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n\end{pmatrix}$$

使 $A=UV$.

证 对 A 的阶数 n 用归纳法. $n=1$，命题显然成立. 假设对 n

-1,命题成立,则对 n 阶可逆阵 A,将 A 按它的列分块:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

其中 $$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}},i=1,\cdots,n$$

i)若 $a_{11}\neq 0$,而 $a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$中至少有一个非零元,则作 n 维列向量

$$\beta_1=(b_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

其中 $$b_{11}=a_{11}N(a_{11})^{-1}N(\alpha_1)$$

于是 $\alpha_1\neq\beta$,$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$,且 $\alpha_1{}^*\beta_1=N(\alpha_1)\in R$,故由命题 4.1.2,存在 $W_1\in U^{n\times n}$,使 $W_1\alpha_1=\beta_1$,于是

$$W_1A=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad ①$$

ii)若 $a_{11}=0$,则由 A 可逆,知 $a_{21},\cdots,a_{n1}$中至少有一个非零元,这时令

$$\beta_1=(\sqrt{N(\alpha_1)},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

则仍有 $\alpha_1\neq\beta_1$,$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$,且 $\alpha^*\beta=0\in R$,于是由命题 4.1.2 又可得式①的形状.

由归纳法假设,必存在 $U_1\in U^{(n-1)\times(n-1)}$及 $n-1$ 阶上三角阵 V_1,使

$$A_1=U_1V_1$$

令 $$U=W_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix},V=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}$$

便得

$$A=UV \qquad \square$$

命题 4.1.4 设可逆阵 $A\in Q^{n\times n}$,则必存在 $U\in U^{n\times n}$及可逆的上三角阵 $V\in Q^{n\times n}$,且

$$V=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},\lambda_t>0,t=1,\cdots,n$$

使
$$A=UV$$

证 由命题 4.1.3 知，存在 $U_1\in U^{n\times n}$ 及上三角阵 $V_1\in Q^{n\times n}$，且

$$V_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

使
$$A=U_1V_1$$

因 A 可逆，则 V_1 亦可逆，故 $\mu_s\neq 0$，从而 $|\mu_s|>0$，$s=1,\cdots,n$，将 V_1 改写成

$$V_1=\begin{pmatrix}\mu_1|\mu_1|^{-1} & & \\ & \mu_2|\mu_2|^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n|\mu_n|^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}|\mu_1| & & * \\ & |\mu_2| & \\ & & \ddots \\ & & & |\mu_n|\end{pmatrix}$$

易证 $\quad \operatorname{diag}(\mu_1|\mu_1|^{-1},\cdots,\mu_n|\mu_n|^{-1})=U_2\in U^{n\times n}$

令 $\quad U=U_1U_2$，则 $U\in U^{n\times n}$，

次令 $\quad V=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_s=|\mu_s|>0$，$s=1,\cdots,n$

则上述 U,V 使

$$A=UV \qquad \square$$

定理 4.1.4(Schur 定理的推广) 设 $A\in Q^{n\times n}$，则必存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

其中 $\lambda_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\lambda_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$. 式(4.1.5)也称为四元数矩阵的**舒尔**(Schur)**三角分解**.

证 由定理 4.1.3 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} \qquad ①$$

其中 $\mu_s=\mu_s^{(1)}+\mu_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\mu_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$. 对可逆阵 P,由命题 4.1.4,必存在 $U\in U^{n\times n}$与上三角阵

$$V=\begin{pmatrix}v_1 & & * \\ & v_2 & \\ & & \ddots \\ & & & v_n\end{pmatrix},\text{其中 } v_s>0,s=1,\cdots n \qquad ②$$

使
$$P=UV$$
于是由式①,②,有

$$(UV)^{-1}AUV=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

即
$$U^*AU=V\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}V^{-1} \qquad ③$$

易证式③右边的 V^{-1}也是上三角阵,上三角阵的乘积仍是上三角阵,且其乘积的对角线上的元素均为形如 $\lambda_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i},\lambda_s^{(2)}\geqslant 0$ $(s=1,\cdots,n)$的复数. □

由定理 4.1.4 可得如下:

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 酉相似于实对角阵$\Leftrightarrow A\in SC_n(Q)$.

证 "$\Leftarrow$" 由定理 4.1.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使式(4.1.5)成立,即

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & q_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

上式两端取转置共轭并注意到 $A^*=A$,则有

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ \bar{q}_{12} & \bar{\lambda}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{q}_{1n} & \cdots & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

比较上面两式,即得 $q_{st}=0,(s\neq t)$. $\lambda_s\in R$,即

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_s\in R,s=1,\cdots,n \qquad ①$$

"⇒" 设有 $U\in U^{n\times n}$,使式①成立,则

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*,\lambda_s\in R,s=1,\cdots,n$$

于是

$$A^*=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*=A$$

故 $A\in SC_n(Q)$. □

定义 4.1.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,$\lambda_s\in Q$,$s=1,\cdots,n$,如果有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.1.6}$$

则称 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的一组**谱值**. 而由定理 4.1.4 中所得的谱值 $\omega_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i}\in C$,$\lambda_s^{(2)}\geqslant 0$,$s=1,\cdots,n$ 称为 A 的**谱值主值**.

定理 4.1.5 Q 上的两个相似的 n 阶矩阵有相同的谱值. 即相似变换不改变四元数矩阵的谱值.

证 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，$A\sim B$，则存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$，使 $P_1^{-1}AP_1=B$，又若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的谱值，则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使式(4.1.6)成立. 于是可逆阵 $P_2=P_1^{-1}P\in Q^{n\times n}$，使

$$P_2^{-1}BP_2=P^{-1}(P_1BP_1^{-1})P=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

故 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 B 的谱值.

同理可证，B 的谱值也是 A 的谱值，故命题成立. □

定理 4.1.6 设 $A\in Q^{n\times n}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一组谱值. 若 $\mu_s\sim\lambda_s$，$s=1,\cdots,n$，则 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 也是 A 的一组谱值.

证 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一组谱值，则存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$，使

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

由 $\mu_s\sim\lambda_s$，$s=1,\cdots,n$，则存在 $0\neq q_s\in Q$，$s=1,\cdots,n$，使

$$\mu_s=q_s^{-1}\lambda_s q_s,\quad s=1,\cdots,n$$

作 $P_2=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$，则 P_2 可逆，若令 $P=P_1P_2$，则

$$P^{-1}AP=P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=\begin{pmatrix}q_1^{-1}\lambda_1q & & *\\ & \ddots & \\ & & q_n^{-1}\lambda_nq\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$$

故 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 也是 A 的一组谱值. □

注 定理 4.1.6 表明，虽然 A 的谱值有无限多组，但谱值主值是唯一的. 又由于相似同类四元数的矩 $N(q)$ 相等，故四元数矩阵 A 的谱值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的矩的和 $\sum\limits_{s=1}^{n}N(\lambda_s)$ 是个定数.

定理 4.1.7 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若 A 与 B 相似,则 A 与 B 有相同的拟特征多项式.

证 因 $A,B\in Q^{n\times n}$ 相似,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$ 使

$$P^{-1}AP=B$$

由命题 2.2.3,有

$$(P^{\sigma})^{-1}A^{\sigma}P^{\sigma}=B^{\sigma}$$

由复数域 C 上的矩阵理论知,A^{σ} 与 B^{σ} 相似,从而有相同的特征多项式,即 A 与 B 有相同的拟特征多项式. □

命题 4.1.5 设 $B\in Q^{n\times n}$,若 B 为上三角阵,即

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & q_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_s\in C(s=1,\cdots,n)$,则 B 的拟特征多项式 $F_A{}^{\sigma}(\lambda)$ 是 R 上的形如(4.1.7)的多项式,且 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_n,\bar{\lambda}_n$ 是 B 的拟特征多项式的 $2n$ 个根.

证 设 $B=B_1+B_2\mathrm{j}$,其中 $B_1,B_2\in C^{n\times n}$,则

$$B_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n}\\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是 B^{σ} 的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(\lambda)=|\lambda I_{2n}-B^{\sigma}|&=\begin{vmatrix}\lambda I_n-B_1 & B_2\\ -\overline{B}_2 & \lambda I_n-\overline{B}_1\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\bar{\lambda}_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\bar{\lambda}_2)\cdots\\ &\quad(\lambda-\lambda_n)(\lambda-\bar{\lambda}_n)\\ &=(\lambda^2+|\lambda_1|^2)(\lambda^2+|\lambda_2|^2)\cdots(\lambda^2+|\lambda_n|^2)\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

故 B 的拟特征多项式 $F_B^\sigma(\lambda)$ 为 $2n$ 次实系数式项式，且 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_n,\bar{\lambda}_n$ 是 $F_B^\sigma(\lambda)$ 的 $2n$ 个根（n 对共轭复根）. □

定理 4.1.8 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$ 是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式，从而有共轭的 n 对复根.

证 由定理 4.1.4 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t\in C,t=1,\cdots,n$$

又由命题 4.1.5 知，B 的拟特征多项式是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式，再由定理 4.1.7 知，A 与 B 的拟特征多项式相同，因此 A 的拟特征多项式也是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式，从而有共轭的 n 对复根. □

定理 4.1.9 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 $F_A^\sigma(A)=0$.

证 我们把 $F_A^\sigma(A)=|\lambda I_{2n}-A^\sigma|$ 简记为 $f(\lambda)$，则由复数域 C 上的 Hamilton-Cayley 定理知

$$f(A^\sigma)=0$$

由定理 4.1.5 知，$f(\lambda)$ 是 R 上的多项式，于是由命题 1.3.2 之 4°与上式知

$$(f(A))^\sigma=f(A^\sigma)=0$$

由上式及命题 2.3.2 之 1°知

$$f(A)=0$$

即

$$F_A^\sigma(A)=0$$ □

定理 4.1.10 设 $\lambda\in Q$，则 λ 是 $A\in Q^{n\times n}$ 的右特征值 $\Leftrightarrow$

$$F_A^\sigma(\lambda)=0$$

证 “$\Leftarrow$” 设 $\lambda\in Q$ 使

$$F_A^\sigma(\lambda)=0$$

由命题 1.3.7 知，必存在 $0\neq b\in Q$，使

$$b\lambda b^{-1}=\lambda_0\in C$$

又由 $F_A^\sigma(\lambda)$的系数为实数,及命题 1.3.5,有

$$F_A^\sigma(\lambda_0)=F_A^\sigma(b\lambda b^{-1})=bF_A^\sigma(\lambda)b^{-1}=0$$

即 λ_0 是 A^σ 的一个特征值,由复数域上的矩阵理论知,存在 C 上的 $2n$ 维非零列向量 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$(其中 α_1,α_2 为 C 上的 n 维列向量,且 α_1 与 α_2 至少有一个不为零),使

$$A^\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda_0 \qquad ①$$

设

$$A=A_1+A_2\mathrm{j}$$

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}$$

于是由式①,有

$$A_1\alpha_1-A_2\bar{\alpha}_2=\alpha_1\lambda_0 \qquad ②$$

$$\bar{A}_2\alpha_1+\bar{A}_1\bar{\alpha}_2=\bar{\alpha}_2\lambda_0 \qquad ③$$

将式③两端取共轭,得

$$A_2\bar{\alpha}_1+A_1\alpha_2=\alpha_2\bar{\lambda}_0 \qquad ④$$

令 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j}$,则 α 为 Q 上的 n 维非零列向量,由式②,④,得

$$\begin{aligned}A\alpha&=(A_1+A_2\mathrm{j})(\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j})\\ &=A_1\alpha_1+A_2\mathrm{j}\alpha_2\mathrm{j}+A_1\alpha_2\mathrm{j}+A_2\mathrm{j}\alpha_1\\ &=A_1\alpha_1+A_2\bar{\alpha}_2\mathrm{jj}+A_1\alpha_2\mathrm{j}+A_2\bar{\alpha}_1\mathrm{j}\\ &=A_1\alpha_1-A_2\bar{\alpha}_2+(A_1\alpha_2+A_2\bar{\alpha}_1)\mathrm{j}\\ &=\alpha_1\lambda_0+\alpha_2\bar{\lambda}_0\mathrm{j}=\alpha_1\lambda_0+\alpha_2\mathrm{j}\lambda_0\\ &=(\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j})\lambda_0=\alpha\lambda_0\end{aligned} \qquad (4.1.8)$$

故 λ_0 是 A 的右特征值. 再令 $\beta=\alpha b$,因 $\lambda=b^{-1}\lambda_0 b$,故

$$A\beta=A\alpha b=\alpha\lambda b=(\alpha b)(b^{-1}\lambda_0 b)=\beta\lambda$$

因此 λ 是 A 的右特征值.

"⇒" 设 $\lambda\in Q$ 为 A 的右特征值,则存在 Q 上的 n 维非零列

向量 α，使 $A\alpha=\alpha\lambda$. 由定理 4.1.7 及定理 4.1.8 知，A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$ 为实系数多项式，且 $F_A^\sigma(A)=0$，于是由命题 2.3.2 之 4°知

$$\alpha F_A^\sigma(\lambda)=F_A^\sigma(A)\alpha=0$$

因为 $\alpha\neq0$，故得 $F_A^\sigma(\lambda)=0$. □

由定理 4.1.7 及定理 4.1.10 可得：

定理 4.1.11 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 有且仅有 n 个右特征主值 $\lambda_1(A^\sigma),\cdots,\lambda_n(A^\sigma)$.

定理 4.1.12 设 $A\in Q^{n\times n}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in Q$ 为 A 的一组谱值，即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

记 $\omega(\lambda_s)$ 为 λ_s 的主值，$s=1,\cdots,n$，则 $\omega(\lambda_1),\cdots,\omega(\lambda_n)$ 为 A 的右特征主值.

证 因为对于每一个 $\lambda_s(s=1,\cdots,n)$ 必存在 Q 的非零元 b_s，使得 $b_s^{-1}\lambda_s b_s=\omega(\lambda_s)\in C$，取 $F=P\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$P$ 为式(4.1.9)中的可逆阵 P，则 $F\in Q^{n\times n}$，F 可逆，由式(4.1.9)，有

$$F^{-1}AF=B=\begin{pmatrix}\omega(\lambda_1) & & * \\ & \omega(\lambda_2) & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

由命题 4.1.5 及定理 4.1.10 知，$\omega(\lambda_1),\cdots,\omega(\lambda_n)$ 是 A 的右特征主值. □

定理 4.1.13 设 $A\in SC_n(Q)$，则

1° A 的右特征值为实数；

2° A 的右特征值一定是 A 的左特征值.

证 1° 设 λ 为 A 的右特征值，则存在 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in$

$Q^{n\times 1}$,使得

$$Ax = x\lambda \tag{①}$$

于是有 $$x^*Ax = x^*x\lambda = |x|^2\lambda = \lambda|x|^2 \tag{②}$$

且有 $$(x^*Ax)^* = (x^*x\lambda)^*,\ x^*A^*x = \bar{\lambda}x^*x.$$

注意到 $A^* = A$,故由上式有

$$x^*Ax = \bar{\lambda}x^*x = \bar{\lambda}|x|^2 \tag{③}$$

由式②,③及$|x|\neq 0$,即知有 $\bar{\lambda}=\lambda$,从而 $\lambda\in R$.

证 2° 设λ是A的右特征值,由1°知λ必为实数,

于是由 $$Ax = x\lambda$$

有 $$Ax = \lambda x$$

故λ亦是A的左特征值. □

推论 自共轭阵A的右特征值就是A的特征值,且自共轭阵A的特征值均为实数.

由上述推论及定理4.1.4的推论即得如下

定理4.1.14 设 $A\in SC_n(Q)$,则存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.1.10}$$

其中 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 是A的全部n个特征值,且当 $A>0$ 时有 $\lambda_s>0(s=1,\cdots,n)$,当 $A\geqslant 0$ 时有 $\lambda_s\geqslant 0(s=1,\cdots,n)$.

注 定理4.1.14称为自共轭阵的**谱分解定理**.

推论1 设 $A\in SC_n(Q)$,则

1° $A>0\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda_s(A)>0,\ s=1,\cdots,n$;

2° $A\geqslant 0\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda_s(A)\geqslant 0,\ s=1,\cdots,n$.

推论2 设 $A\in SC_n(Q)$, $U\in U^{n\times n}$,则

$$\lambda_s(U^*AU) = \lambda_s(A),\ s=1,\cdots,n \tag{4.1.11}$$

即酉相似变换不改变自共轭阵的特征值.

定理 4.1.15 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 相似于一个实对角阵,则该对角阵的主对角线上的元素恰为 A 的全部特征值.

证 由题设有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t\in R,t=1,\cdots,n$$

记 $P=(p_1,\cdots,p_n)$,则 $0\neq p_t\in Q^{n\times 1},t=1,\cdots,n$,且

$$(Ap_1,\cdots,Ap_n)=(p_1\lambda_1,\cdots,p_n\lambda_n)$$

得
$$Ap_t=p_t\lambda_t,t=1,\cdots,n$$

由于 λ_t 为实数,故有

$$Ap_t=\lambda_tp_t,t=1,\cdots,n$$

因此 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的右特征值也是 A 的左特征值,从而是 A 的特征值. □

定义 4.1.5 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 能相似于一实对角阵,则称 A 为**中心封闭阵**;若 A 能相似于一实矩阵,则称 A 为**可中心化阵**.

显然,中心封闭阵必是可中心化阵;自共轭阵必是中心封闭阵.由定理 4.1.14 可得如下

定理 4.1.16 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 为中心封闭阵,则 A 的特征值全为实数,且存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A)) \qquad (4.1.12)$$

其中 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 为 A 的特征值.

定理 4.1.17 与中心封闭阵相似的矩阵必为中心封闭阵,且两者具有相同的特征值.换句话说,相似变换不改变中心封闭阵的特征值,当然也不改变自共轭阵的特征值.

证 设 $A\in Q^{n\times n}$为中心封闭阵,则存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$A=P_1\text{diag}(\lambda_1(A),\cdots\lambda_n(A))P_1^{-1},\lambda_s(A)\in R,1\leqslant s\leqslant n.$$

设 $B \sim A$,即存在可逆阵 $Q \in Q^{n\times n}$,使

$$B = QAQ^{-1}$$

于是 $$B = QP_1\mathrm{dizg}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P_1^{-1}Q^{-1}$$

令 $P = QP_1$,则 P 可逆,且使

$$B = P\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P^{-1}$$

故 B 也是中心封闭阵,且

$$\lambda_s(B) = \lambda_s(A),\ s = 1,\cdots,n$$

□

由定理 4.1.10 知,当 $A \in Q^{n\times n}$时,A 的右特值与 A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$的根是一致的,而由命题 4.1.5 知 $F_A^\sigma(\lambda)$是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式,它的复根是共轭成对出现的,即 $\lambda_s = \lambda_s^{(1)} \pm \lambda_s^{(2)}\mathrm{i}$, $\lambda_s^{(2)} \geqslant 0$ $(s = 1,\cdots,n)$,记 $\omega(\lambda_s) = \lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}\mathrm{i}$, $\lambda_s^{(2)} \geqslant 0$ $(s = 1,\cdots,n)$为 A 的右特征主值,则 A 的右特征主值(按重数计)一共有 n 个.而由定理 4.1.12 知,由式(4.1.9)所确定的 A 的 n 个谱值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的主值 $\omega(\lambda_1),\cdots,\omega(\lambda_n)$亦皆为 A 的 n 个右特征值,可见 A 的右特征主值、A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$的根的主值、A 的谱值主值三者是一致的.

记 $A \in Q^{n\times n}$的右特征值的全体为 T_A,即

$$T_A = \{b\lambda_n b^{-1} \mid \forall \neq b \in R, \lambda_i \text{ 是} A \text{ 的右特征主值}, i = 1,\cdots,n\}$$

定理 4.1.18 $A \in Q^{n\times n}$,则 T_A 为无限集$\Leftrightarrow A$ 的右特征主值至少有一个不是实数.

证 显然当 $\lambda_i \in R$, $i = 1,\cdots,n$ 时,$T_A = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$为一有限集.当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中至少有一个不属于 R 时,T_A 为无限集.事实上,设 $\lambda_t \overline{\in} R$,对于任何的正整数 m,令 $b_m = 1 + m\mathrm{j}$,有

$$\begin{aligned} b_m^{-1}\lambda_t b_m &= \frac{1}{1+m^2}(1-m\mathrm{j})\lambda_t(1+m\mathrm{j}) \\ &= \frac{1}{1+m^2}(\lambda_t + m^2\bar{\lambda}_t) + \frac{1}{1+m^2}(\lambda_t - \bar{\lambda}_t)\mathrm{j} \end{aligned}$$

故对于任意两个不同的正整数 m_1 与 m_2,都有

$$b_{m_1}{}^{-1}\lambda_t b_{m1} \neq b_{m_2}{}^{-1}\lambda_t b_{m2}$$

所以 $b_1{}^{-1}\lambda_t b_1, b_2{}^{-1}\lambda_t b_2$，都是 T_A 中不同的元，从而 T_A 为无限集. □

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{k}\\ \mathrm{k} & 1\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$，则 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\mathrm{j}$，从而

$$F_A{}^{\sigma}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & \lambda-1 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i} & \lambda-1 & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=[(1-\lambda)^2-1]^2 \tag{4.1.12)'$$

而

$$\begin{aligned}F_A(\lambda) &= \|\lambda I-A\| = |(\lambda I-A)^*(\lambda I-A)|\\
&= \left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & \mathrm{k}\\ -\mathrm{k} & \lambda-1\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}\lambda-1 & \mathrm{k}\\ -\mathrm{k} & \lambda-1\end{pmatrix}\right|\\
&= \left|\begin{pmatrix}\bar\lambda-1 & \mathrm{k}\\ -\mathrm{k} & \bar\lambda-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-1 & \mathrm{k}\\ -\mathrm{k} & \lambda-1\end{pmatrix}\right|\\
&= \begin{vmatrix}(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1 & (\bar\lambda-1)\mathrm{k}+\mathrm{k}(\lambda-1)\\ -\mathrm{k}(\lambda-1)-(\bar\lambda-1)\mathrm{k} & 1+(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1\end{vmatrix}\\
&= [(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1]^2+[(\bar\lambda-1)\mathrm{k}+\mathrm{k}(\lambda-1)]^2\\
&= (\bar\lambda\lambda-\lambda-\bar\lambda+2)^2+(\bar\lambda\mathrm{k}+\mathrm{k}\lambda-2\mathrm{k})^2
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

由式(4.1.12)易证，$\lambda=0,2$ 是 $F_A{}^{\sigma}(\lambda)$之根，从而由定理 4.1.10 知也是 A 的全部右特征主值. 但由定理 4.1.13 知 $\lambda=0,2$ 也应是 A 的左特征值. 而事实上由式(4.1.13)知 $\lambda=0,2$ 确实是 $F_A(\lambda)$之根，这也应验了 $\lambda=0,2$ 也是 A 的左特征值. 由式(4.1.13)可以验证 $\lambda=1+\mathrm{i}$ 亦使 $F_A(x)=F_A(1+\mathrm{i})=0$，故由定

理4.1.1知$1+i$也是A的左特征值,其实由$A\begin{pmatrix}-j\\1\end{pmatrix}=(1+i)\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$也说明了$1+i$是$A$的左特征值.但由式(4.1.12)知:$F_A^\sigma(1+i)\neq 0$,故$1+i$不是$A$的右特征值.

注 例1亦表明$F_A(\lambda)\neq F_A^\sigma(\lambda)$.

例2 设$A=\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}$,$P=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 2\end{pmatrix}$,则$P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$

于是 $A\sim B=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1+3j & -2k\\ 5k & 1+3j\end{pmatrix}$$

$$\| A \| = \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\| B \| = \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

故有$\| B \| = \| PAP^{-1} \| = \| A \|$.

再看

$F_B(\lambda)$

$=\| \lambda I - B \|$

$$=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1-3j & 2k\\ -5k & \lambda-1-3j\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}\lambda-1-3j & 2k\\ -5k & \lambda-1-3j\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}\bar\lambda-1+3j & 5k\\ -2k & \bar\lambda-1+3j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-1-3j & 2k\\ -5k & \lambda-1-3j\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}(\bar\lambda-1+3j)(\lambda-1+3j)+25 & 2(\bar\lambda-1+3j)k+5k(\lambda-1-3j)\\ -2k(\lambda-1-3j)-5(\bar\lambda-1+3j)k & 4+(\bar\lambda-1+3j)(\lambda-1-3j)\end{vmatrix}$$

$$=[(\bar\lambda-1+3j)(\lambda-1-3j)+4][(\bar\lambda-1+3j)(\lambda-1-3j)+25]$$

$$+[2k(\lambda-1-3j)+5(\bar{\lambda}-1+3j)k][2(\bar{\lambda}-1+3j)k+5k(\lambda-1-3j)] \tag{4.1.14}$$

可以验证 $\lambda=0,2,1+i$ 均不能使式(4.1.14)为 0，即 $\lambda=0,2,1+i$ 均不是 $F_B(\lambda)$ 之根.

注 例 2 说明，虽然 $A\sim B$，但 $F_A(\lambda)\neq F_B(\lambda)$，故左特征值和重多项式均不是相似变换的不变量. 然而，由定理 4.1.12 知，任意四元数矩阵 A 总存在(复)右特征值，又由定理 4.1.5 知，四元数矩阵的拟特征多项式是相似变换的不变量，从而由定理 4.1.8 知，四元数矩阵的右特征值亦是相似变换的不变量.

定理 4.1.4 之推论表明，当且仅当 A 为自共轭的四元数矩阵时，A 酉相似于实对角阵. 那么，什么样的四元数矩阵可以对角化呢？我们先证如下

命题 4.1.6 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 相似于对角阵，则 A 必相似于 C 上的对角阵.

证 因 A 相似于对角阵，即存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$，使

$$P_1^{-1}AP_1=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$$

由命题 1.3.7，必存在 $b_t\in Q$，$b_t\neq 0$，$1\leqslant t\leqslant n$，使

$$b_ta_tb_t^{-1}\in C,1\leqslant t\leqslant n$$

令
$$P=P_1\mathrm{diag}(b_1^{-1},\cdots,b_n^{-1})$$

则 $P^{-1}AP$ 是 C 上的对角阵. □

定义 4.1.6 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 $AA^*=A^*A$，则称 A 为 Q 上的**正规阵**.

显然，自共轭阵必是正规阵，但反之不真.

定理 4.1.19 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 为正规阵的充要条件是 A 酉相似于对角阵，即存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \tag{4.1.15}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in C$，且为 A 的 n 个右特征值.

证 充分性是显然的.下证必要性,设 A 为正规阵,我们来证明式(4.1.13)成立.

首先由定理 4.1.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\ \lambda_t\in C,1\leqslant t\leqslant n. \qquad ①$$

于是

$$U^*AA^*U$$

$$=\begin{pmatrix}N(\lambda_1)+\sum_{j=2}^{n}N(q_{1j}) & & & *\\ & N(\lambda_2)+\sum_{j=3}^{n}N(q_{2j}) & & \\ & & \ddots & \\ & & N(\lambda_{n-1})+N(q_{n-1,n}) & \\ & & & N(\lambda_n)\end{pmatrix} \qquad ②$$

$$U^*A^*AU$$

$$=\begin{pmatrix}N(\lambda_1) & & & & *\\ & N(\lambda_2)+N(q_{12}) & & & \\ & & N(\lambda_3)+\sum_{i=1}^{n}N(q_{i3}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N(\lambda_n)+\sum_{i=1}^{n}N(q_{in})\end{pmatrix} \qquad ③$$

由 A 是正规阵的假设,比较两式②,③各主对角元,即得 $N(q_{ij})=0$,即 $q_{ij}=0,1\leqslant i<j\leqslant n$,故由式①即得式(4.1.15). □

§4.2 四元数矩阵的秩 奇异值 迹

一、四元数矩阵的秩

定义 4.2.1 设

$$A=(a_{ij})_{n\times m}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\in Q^{n\times m},$$

其中 $\alpha_j=(a_{1j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}},j=1,\cdots,m;\beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{im}),i=1,\cdots,n$，则称列向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$的极大右(左)线性无关组的个数为 A 的**列右(左)秩**;称行向量组$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$的极大左(右)线性无关的个数为 A 的**行左(右)秩**;在 A 的子方阵中,重行列式不为零的子方阵的最大阶数 r 称为矩阵A 的**秩**,记作 $\mathrm{rank}A=r$;如果 $n=m=r$,则称 A 为**满秩矩阵**;如果 $r=0$,则称 A 为 **0 秩矩阵**,此时显然 A 的所有元素均为零;又满秩矩阵必为方阵.

显然以下命题成立:

命题 4.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 的行、列的初等变换不改变 A 的列右秩与行左秩.

定理 4.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 满秩$\Leftrightarrow A$ 可逆.

证 由定理3.3.5 即得. □

定理 4.2.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

$$A\text{ 的列右秩}=A\text{ 的列左秩}=\mathrm{rank}A \tag{4.2.1}$$

$$A\text{ 的行右秩}=A\text{ 的行左秩}=\mathrm{rank}A \tag{4.2.2}$$

证 设 A 的列右秩为 s,$\mathrm{rank}A=r$,则 A 有 r 阶子方阵 A_r,$\|A_r\|\neq 0$. 由定理3.3.5,右齐次方程组 $A_rx=0$ 只有零解,故 A_r 所在的 r 个列向量不能右线性相关,故 $s\geqslant r$. 另一方面,不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是A 的列向量的一个极大右线性无关组,记 $A_s=(\alpha_1,$

$\cdots,\alpha_s)$，则存在初等矩阵之积 P 与 T，$P\in Q^{n\times n}$，$T\in Q^{s\times s}$，使

$$PA_sT=\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_s\end{pmatrix},c_1c_2\cdots c_s\neq0$$

由定理 3.3.4 之 1°知，A 的任意两行或两列的互换不改变矩阵重行列式的值，因此可设对角阵 C 的获得来自 A 的左上角，于是上式变成

$$P_{s\times s}\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\qquad\vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}T_{s\times s}=\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_s\end{pmatrix}$$

再由式(3.3.10)得知 A 有 s 阶子式

$$\left\|\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}\right\|=\left\|P_{s\times s}\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\qquad\vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}T_{s\times s}\right\|$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_n\end{pmatrix}\right\|$$

$$=\bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_sc_s>0$$

因此，又有 $r\geqslant s$，故 $r=s$.

其次，由于对齐次方程组取转置共轭后，有

$$\sum_i x_ia_{ij}=0\Leftrightarrow\sum_i\bar{a}_{ji}\bar{x}_i=0,j=1,2,\cdots,m$$

所以

A 的行左秩 $=A^*$ 列右秩 $=\mathrm{rank}A^*=\mathrm{rank}A=r$

故式(4.2.1)成立. 将 A 换作 A^{T} 即得式(4.2.2). □

注 在四元数体 Q 上，一般地 $\mathrm{rank}A^*\neq\mathrm{rank}A$.

推论 设 $A\in Q^{m\times n}$，则 A 的初等变换不改变 A 的秩.

定理 4.2.3 设 $A \in Q^{m\times n}$, $\mathrm{rank}A = r$,则存在可逆阵 $P \in Q^{m\times m}$, $T \in Q^{n\times n}$,使

$$PAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

我们略去这个定理的证明(可参阅文献[14]).

定理 4.2.4 设 $A \in Q^{n\times n}$,则

$$\mathrm{rank}A = \frac{1}{2}\mathrm{rank}A^{\sigma} \tag{4.2.4}$$

其中 A^{σ} 为 A 的导出阵.

证 设 $\mathrm{rank}A = r$,则由定理 4.2.3 知,存在可逆阵,$P \in Q^{m\times m}$、$T \in Q^{n\times n}$,使

$$PAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由上式及式(2.3.15),(2.3.16),有

$$P^{\sigma}A^{\sigma}T^{\sigma} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\sigma} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且 P^{σ}, T^{σ} 都是复数域 C 的可逆阵,所以 A^{σ} 的秩为 $2r$,故式(4.2.4)成立. □

推论 1 设 $A, B \in Q^{m\times n}$,则

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B \Leftrightarrow \mathrm{rank}A^{\sigma} = \mathrm{rank}B^{\sigma}$$

设 A, B, C 为四元数体 Q 上的矩阵,则由复数域 C 上矩阵秩的结论[6]及定理 4.2.4 可得如下推论:

推论 2 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - B$ 的行数

$$\leqslant \mathrm{rank}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}. \tag{4.2.5}$$

推论 3 $\mathrm{rank}(A+B) \leqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B. \quad (4.2.6)$

$$\mathrm{rank}(A-B) \geqslant \mathrm{min}A - \mathrm{rank}B. \quad (4.2.6)'$$

推论 4 $\operatorname{rank}(ABC)\geqslant\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}B.$

$$(4.2.7)$$

推论 5 设 A、B 为相合矩阵，则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B.$ (4.2.8)

推论 6 设 A 为对合矩阵，即 $A^2=I_n$，则

$$\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A+I)=n. \tag{4.2.9}$$

推论 7 设 $A\in Q^{n\times n}$，A 为等幂矩阵，即 $A^2=A$，则

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(A-I)=n. \tag{4.2.10}$$

推论 8 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in Q^{n\times n}$，且 $A_1A_2\cdots A_m=0$，则

$$\operatorname{rank}A_1+\operatorname{rank}A_2+\cdots+\operatorname{rank}A_m\leqslant(m-1)n. \tag{4.2.11}$$

推论 9 设 $A\in Q^{m\times n}$，则

$$\operatorname{rank}A^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\bar{A} \tag{4.2.12}$$

$$\operatorname{rank}A^{*}=\operatorname{rank}\bar{A} \tag{4.2.13}$$

$$\operatorname{rank}A^{*}A=\operatorname{rank}A \tag*{(4.2.13)$'$}$$

证 仅证推论 9. 设 $A=A_1+A_2\mathrm{j}$，$A_1,A_2\in C^{m\times n}$，

则 $$A^{\mathrm{T}}=A_1^{\mathrm{T}}+A_2^{\mathrm{T}}\mathrm{j},\quad \bar{A}=\bar{A}_1-A_2\mathrm{j}$$

故有 $$(A^{\mathrm{T}})^{\sigma}=\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}}\\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\ (\bar{A})^{\sigma}=\begin{pmatrix}\bar{A}_1 & A_2\\ -\bar{A}_2 & A_1\end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}A^{\mathrm{T}}&=\frac{1}{2}\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})^{\sigma}=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}}\\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}}\\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_1 & \bar{A}_2\\ -A_2 & \bar{A}_1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\overline{\begin{pmatrix}A_1 & \bar{A}_2\\ -A_2 & \bar{A}_1\end{pmatrix}}=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\bar{A}_1 & A_2\\ -\bar{A}_2 & A_1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{rank}(\bar{A})^{\sigma}=\operatorname{rank}\bar{A}
\end{aligned}$$

故式(4.2.12)成立.

由$(A^*)^\sigma=(A^\sigma)^*$及当$B$为复矩阵时有$\mathrm{rank}B^*=\mathrm{rank}B$，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}A^* &= \frac{1}{2}\mathrm{rank}(A^*)^\sigma=\frac{1}{2}\mathrm{rank}(A^\sigma)^* \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{rank}A^\sigma=\mathrm{rank}A\end{aligned}$$

故式(4.2.13)亦成立. □

二、四元数矩阵的奇异值

设$A\in Q^{m\times n}$，$\mathrm{rank}A=r$. 于是可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

其中A_{11}为r阶可逆子阵，从而下列二方程组

$$Ax=0 \tag{4.2.14}$$

$$(A_{11},A_{12})x=0 \tag{4.2.14$'$}$$

是同解的，而矩阵

$$G=\begin{pmatrix}-A_{11}^{-1} & A_{12}\\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\in Q^{n\times(n-r)} \tag{4.2.15}$$

的$(n-r)$列构成方程组(4.2.14)′即方程组(4.2.14)的一个基础解系，方程组的任何解均为此基础解系的右线性组合.

定义 4.2.2 设Q上的一组n维列向量：

$$u_1=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1n})^{\mathrm T}$$
$$u_2=(u_{21},u_{22},\cdots,u_{2n})^{\mathrm T}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n=(u_{n1},u_{n2},\cdots,u_{nn})^{\mathrm T}$$

满足条件

$$u_i{}^* u_j=(\bar{u}_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in})\begin{pmatrix}u_{j1}\\u_{j2}\\\vdots\\u_{jn}\end{pmatrix}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

则称 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是一个**广义标准正交组**.

定义 4.2.3 如果 Q 上的方程组(4.2.14)的基础解系(4.1.15)是一个广义标准正交组,即 G 满足 $G^*G=I_{n-r}$,则称它是一个**广义标准正交的基础解系**.

命题 4.2.2 Q 上方程组(4.2.14)有基础解系(即 $r<n$)时,就必存在广义标准正交的基础解系.

证 先取方程组(4.2.14)的一个非零解 u,令 $u_1=\dfrac{1}{a}u$,其中 $a=\sqrt{u^*u}$ 为一正实数,这样就把 u 标准化为 u_1,使 $u_1{}^*u_1=1$,而 $\{u_1\}$ 构成一广义标准正交组,然后考虑方程组

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & u_1^*\end{pmatrix}X=0$$

如果 $r+1<n$,则此方程组又有非零解 u,再把 u 标准化为 u_2,则由

$$u_1{}^*u_2=0=0=u_2{}^*u_1,\quad u_1{}^{\mathrm{T}}\bar{u}_1=u_2{}^{\mathrm{T}}\bar{u}_2=1$$

即知 $\{u_1,u_2\}$ 构成一个广义标准正交组.

如果还有 $r+2<n$,则再看方程组

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & u_1{}^*\\ & u_2{}^*\end{pmatrix}X=0$$

再任取一非零解并标准化为 u_3,易知 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 又为一个广义标准正交组.如此继续下去,最后就得出一广义标准正交基础解系了. □

定义 4.2.4 设 $U\in Q^{n\times t}$,若 $U^*\cdot U=I_t$,则称 U 为**广义列酉阵**,其全体记为 $U^{n\times t}$.

由命题 4.2.2 及文献[1]299 页定理 10 及 292 页定理 2 得

命题 4.2.3 设 $V_1\in U^{n\times t}$,则 $t\leqslant n$,且存在 $U_2\in U^{n\times(n-t)}$,使得$(U_1,U_2)\in U^{n\times n}$.

命题 4.2.4 设 $A\in Q^{m\times n}$,则 $A^*A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$AA^*\in SC_m^{\geqslant}(Q)$.

证 由$(A^*A)^*=A^*A$,故 $A^*A\in SC_n(Q)$,且对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,有

$$x^*Bx=x^*A^*Ax=(Ax)^*(Ax)\geqslant 0$$

故 $$A^*A\in SC_n^{\geqslant}(Q).$$

同理可证 $$AA^*\in SC_m^{\geqslant}(Q)$$ □

由定理 4.1.14 推论 1 知,半正定自共轭阵的 n 个特征值均非负,故对任意四元数矩阵 A,A^*A 与 AA^* 的 n 个特征值均非负.

定理 4.2.5 设 $A\in Q^{m\times n}$,$\mathrm{rank}A=r$,则存在 $U\in U^{m\times m}$,$V\in U^{n\times n}$,使得

$$U^*AV=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{rank}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)\quad(4.2.16)$$

证 当 $r=0$ 时,命题显然成立.设 $r>0$,由 $\mathrm{rank}A=r$,则 $\mathrm{rank}A^*A=r$,这时 A^*A 为非零的半正定自共轭阵,故由定理 4.1.14 及其推论知,存在 $V\in U^{n\times n}$,使

$$V^*A^*AV=\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$$

其中 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r$ 为 A^*A 的正特征值的算术平方根,记 $V=(V_1,V_2)$,其中 $V_1\in Q^{n\times r}$,$V_2\in Q^{n\times(n-r)}$,则由矩阵分块乘法得:

$$\begin{cases} A^* AV_1 = V_1 D^2 \\ A^* AV_1 = 0,\ A^* AV_2 = 0 \end{cases}$$

从而 $\begin{cases} U_1{}^* U_1 = I \\ AV_1 = 0,\ AV_2 = 0 \end{cases}$, 其中 $U_1 = AV_1 D^{-1}$

于是由命题 4.2.3,有 $U_2 \in U^{m \times (m-r)}$,使 $U = (U_1, U_2) \in U^{m \times n}$ 并且

$$U^* AV = \begin{pmatrix} D^{-1} V_1{}^* A^* AV_1 & D^{-1} V_1{}^* A^* AV_2 \\ U_2{}^* AV_1 & U_2{}^* AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

定理 4.2.6 设 $A \in Q^{m \times n}$, $\mathrm{rank} A = r > 0$,则有 $U \in U^{m \times r}$, $V \in U^{n \times r}$,使得

$$A = UDV^*, D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \tag{4.2.17}$$

其中 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 $A^* A$ 与 AA^* 的正特征值的算术平方根.

证 类似于定理 4.2.5 的证明可知,存在 $W \in U^{m \times m}$, $Z \in U^{n \times n}$,使得

$$W^* AZ = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \mathrm{diag}(\tau_1, \cdots, \tau_r) \quad ①$$

其中 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_r > 0$ 是 AA^* 的正特征值的算术平方根. 于是

$$Z^* A^* AZ = Z^* A^* W^* WAZ = \begin{pmatrix} D_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\tau_1{}^2 \geqslant \tau_2{}^2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_r{}^2 > 0$ 也是 $A^* A$ 的正特征值. 因此 $\sigma_s = \tau_s$, $s = 1, \cdots, n$. 故式(4.2.17)成立. $\square$

注 上面的证明表明, $A^* A$ 与 AA^* 有相同的非负特征值,式(4.2.17)中的 D 是唯一确定的.

定义 4.2.5 设 $A \in Q^{m \times n}$,则称自共轭阵 $A^* A$ 与 AA^* 的公共特征值的非负平方根为 A 的**奇异值**.

有了定义 4.2.5,则由定理 4.2.5 及定理 4.2.6 可得:

定理 4.2.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,则存在 $U,V\in U^{n\times n}$,使

$$A=U^{*}\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)V \tag{4.2.18}$$

其中 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant 0$ 为 A 的 n 个奇异值,称式(4.2.18)为矩阵 A 的**奇异值分解**.

一般把矩阵 A 的特征值记为$\lambda_s(A)$,矩阵 A 的奇异值记为 $\sigma_s(A)$,则由定义 4.2.5,有

$$\sigma_s(A)=\sqrt{\lambda_s(A^{*}A)},s=1,\cdots,n \tag{4.2.19}$$

且 $\sigma_s(A)$按降序排列为 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)\geqslant 0$.

显然我们有如下:

定理 4.2.8 当 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$时,有

$$\sigma_s(A)=\lambda_s(A),s=1,\cdots,n. \tag{4.2.20}$$

由定理 4.1.14 之推论 2,可得:

定理 4.2.9 设 $A\in Q^{n\times n}$,则对于任意的 $U,V\in U^{n\times n}$,有

$$\sigma_s(U^{*}AV)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n \tag{4.2.21}$$

证 由式(4.2.19)及式(4.1.11),知

$$\sigma_s(U^{*}AV)=\sqrt{\lambda_s((U^{*}AV)^{*}(U^{*}AV))}$$

$$=\sqrt{\lambda_s(V^{*}A^{*}AV)}=\sqrt{\lambda_s(A^{*}A)}=\sigma_s(A)$$

其中 $s=1,\cdots,n$. □

三、四元数矩阵的迹

由于四元数体的非交换性,它给四元数代数理论的研究,当然也包括四元数矩阵迹的性质的研究带来了巨大困难.事实上,关于实(复)矩阵迹的几个简单性质:

1) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;

2) 相似矩阵有相同的迹;

3) 一个矩阵的迹等于其全部特征值之和.

它们在四元数矩阵上都不复成立.我们还是从四元数矩阵迹的定

义和简单性质谈起.

定义 4.2.6 设 $A=(a_{ij}), A\in Q^{n\times n}$，则称 A 的主对角元素的和为 A 的迹，记作 $\mathrm{tr}A$，即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{t=1}^{n}a_{tt} \tag{4.2.22}$$

而 $|\mathrm{tr}A|$ 称为 A 的迹模.

四元数矩阵的迹有如下一些性质：

命题 4.2.5 设 $A, B\in Q^{n\times n}, \lambda, \mu\in Q$，则

1° $\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\mathrm{tr}A+\mu\mathrm{tr}B$ (4.2.23)

2° $\mathrm{tr}(A\lambda+B\mu)=(\mathrm{tr}A)\lambda+(\mathrm{tr}B)\mu$ (4.2.24)

注 当四元数矩阵 A 与 B 相似时，$\mathrm{tr}A$ 不一定等于 $\mathrm{tr}B$，这是与常规矩阵不一样的.

为了更进一步讨论四元数矩阵迹的性质，我们先来证明如下定理.

定理 4.2.10 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in Q^{n\times n}$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA) \tag{4.2.25}$$

证 由式(1.1.21)与式(1.1.22)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))&=\mathrm{Re}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{st}b_{ts}\Big)\\&=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{ts}a_{st}\Big)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(BA))\end{aligned}$$ □

推论 1 设 A、$B\in Q^{n\times n}$，且 A 相似于 B，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B) \tag{4.2.26}$$

证 因 A 相似于 B，则有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$A=PBP^{-1}$$

于是由式(4.2.25)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}PBP^{-1})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}P^{-1}PB)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)\end{aligned}$$ □

注 推论 1 表明相似变换不改变四元数矩阵迹的实部.

推论 2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in Q^{n\times n}(m \geqslant 2)$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A_1A_2\cdots A_m) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}A_sA_{s+1}\cdots A_mA_1\cdots A_{s-1}) \quad (4.2.27)$$

对任意 $1 \leqslant s \leqslant m$ 均成立.

注 定理 4.2.10 及其推论表明,凡是在复矩阵中关于迹的有关等式或不等式,想移植到四元数矩阵中时,一般都要换成迹的实部.

定理 4.2.11 设 $A \in Q^{n\times n}$,则

$$1^\circ\ \operatorname{Re}(\operatorname{tr}A^*) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}A); \quad (4.2.28)$$

$$2^\circ\ \operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) = \operatorname{tr}\frac{A+A^*}{2}. \quad (4.2.29)$$

证 1° 设 $A = (a_{ij})$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A^*) = \operatorname{Re}\Big(\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ii}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\sum_{i=1}^n a_{ii}\Big) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}A)$$

2° 显然有 $\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\dfrac{A-A^*}{2}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{a_{ii}-\bar{a}_{ii}}{2}\right) = 0$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) &= \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left[\left(\frac{A+A^*}{2}\right)+\left(\frac{A-A^*}{2}\right)\right]\right)\\ &= \operatorname{Retr}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)+\operatorname{Retr}\left(\frac{A-A^*}{2}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)\end{aligned}$$

□

定理 4.2.12 设 $A \in Q^{k\times n}$,则

$$\operatorname{tr}AA^* = \operatorname{tr}A^*A \quad (4.2.30)$$

证 设 $A = (a_{ij})$,则

$$\operatorname{tr}AA^* = \sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^n a_{st}\bar{a}_{st} = \sum_{t=1}^n\sum_{s=1}^k \bar{a}_{st}a_{st} = \operatorname{tr}A^*A$$

□

§4.3 四元数自共轭矩阵的若干性质

我们知道,实对称阵和厄米特(Hermite)阵分别在实矩阵和复矩阵中扮演着非常重要的角色,同样,自共轭阵在四元数矩阵中也起着重要的作用.在第二章第三节已介绍了自共轭阵的基本性质,在第三章论述四元数矩阵的行列式及重行列式以及本章引入四元数矩阵的奇异值时,就都用到了自共轭阵的一些基本性质,这一节,我们讨论自共轭四元数矩阵的更进一步的性质.

命题4.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 可逆,则

$$A^{-1}\in SC_n(Q)$$

证 因 $A\in SC_n(Q)$,则 $A^*=A$,由 A 可逆,则 A^{-1} 与 $(A^*)^{-1}$ 均存在且 $(A^*)^{-1}=A^{-1}$.又由式(2.1.11)有 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$,故 $(A^{-1})^*=A^{-1}$,因此 $A^{-1}\in SC_n(Q)$. □

命题4.3.2 设 $A\in SC_n(Q)$,$P\in Q^{n\times n}$,则 $P^*AP\in SC_n(Q)$.特别

1° 若 $A>0$ 或 $A\geqslant 0$,则 $P^*AP\geqslant 0$;

2° 若 $A>0$,P 可逆,则 $P^*AP>0$;

3° 若 A 可逆,$D\in SC_m(Q)$,则

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^*A^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^*A^{-1} & I_m \end{pmatrix}^*$$
$$=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B^*A^{-1}B \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

其中 $D-B^*A^{-1}B\in SC_m(Q)$.

证 因 $A^*=A$,则 $(P^*AP)^*=P^*A^*P=P^*AP$,故 $P^*AP\in SC_n(Q)$.

1° 因 $A>0$,则对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有 $x^*Ax>0$.令 $y=Px$,

则 $y\in Q^{n\times 1}$ 且 y 可能等于零，于是有 $x(P^*AP)x=y^*Ay\geqslant 0$. 故 $P^*Ay\in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

2° 当 $A>0$，P 可逆时，则对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有 $y=Px\neq 0$，于是有 $x^*(P^*AP)x=y^*Ay>0$，故 $P^*AP\in SC_n^{>}(Q)$.

3° 式(4.3.1)可通过直接计算而验证其成立. 注意到 $A\in SC_n(Q)$，则 $A^{-1}\in SC_n(Q)$，于是有

$$(D-B^*A^{-1}B)^*=D^*-B^*(A^{-1})^*B=D-B^*A^{-1}B$$

故 $D-B^*A^{-1}B\in SC_m(Q)$. □

命题 4.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，若互换 A 的 i,j 两行，再互换 i,j 两列而得到 B，则 A 相合于 B.

证 令 $P(i,j)$ 是由 I_n 的 i,j 两列互换而来的，则有 $P(i,j)^*=P(i,j)$，且有 $P(i,j)^*AP(i,j)=B$. 故 A 相合于 B. □

命题 4.3.4 设 $0\neq A\in SC_n(Q)$，则存在非零的 $p=(p_1,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，使 p^*Ap 为非零实数.

证 设 $A=(a_{ij})$，则

$$p^*Ap=\sum_{s,t=1}^{n}\bar{p}_sA_{st}p_t$$

如果有某个 $a_{tt}\neq 0$，则取 $p_t=1$，而其余的 $p_r=0$，这时便有

$$p^*Ap=a_{tt}\neq 0$$

如果 A 的主对角线上的元素均为零，则总有一个 $a_{st}\neq 0$，设

$$a_{st}=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\neq 0$$

若其中的 $a_1\neq 0$，则取 $p_s=p_t=1$，而其余的 $p_r=0$，由式(1.1.25)，即有

$$\begin{aligned}p^*Ap&=\bar{p}_sa_{st}p_t+\bar{p}_ta_{ts}p_s=a_{st}+a_{ts}\\&=a_{st}+\bar{a}_{st}=2a_1\neq 0.\end{aligned}$$

若 $a_2\neq 0$，则取 $p_s=1$，$p_t=\mathrm{i}$，而其余的 $p_r=0$，则由式(1.1.26)有 $p^*Ap=a_{st}\mathrm{i}-\mathrm{i}\bar{a}_{st}=-2a_2\neq 0$

若 $a_3 \neq 0$，则取 $p_s = 1$，$p_t = \mathrm{j}$，而其余的 $p_r = 0$，则由式(1.1.27)有 $p^* A p = a_{st}\mathrm{j} - \mathrm{j}\bar{a}_{st} = -2a_3 \neq 0$

若 $a_4 \neq 0$，则取 $p_s = 1$，$p_t = \mathrm{k}$，而其余的 $p_r = 0$，则由式(1.1.28)有 $p^* A p = a_{st}\mathrm{k} - \mathrm{k}\bar{a}_{st} = -2a_4 \neq 0$. □

定理 4.3.1 设 $A \in SC_n(Q)$，$\mathrm{rank}A = r$，则存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使

$$A = P^* \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)P \quad (4.3.2)$$

其中 1 的总个数 s 与 -1 的总个数 t 之和 $s+t=r$，且可以不出现 1 与 -1 的二者之一.

证 由 $A \in SC_n(Q)$ 及命题 3.3.1 知，存在可逆阵 $P_1 \in Q^{n\times n}$，使

$$P_1^* AP_1 = \mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n) = C, c_i \in R, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

再对矩阵 C，累用命题 4.3.3，可知存在可逆阵 $P_2 \in Q^{n\times n}$，使

$$P_2^* CP_2 = \mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_s,-b_1,\cdots,-b_t,0,\cdots,0) = B,$$

其中 $a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_t > 0$，且由相合变换不改变矩阵的秩(定理 4.2.4 之推论 5)知 $s+t=r$.

再令 $P_3 = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{a_s}},\dfrac{1}{\sqrt{b_1}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{b_t}},1,\cdots,1\right) \in Q^{n\times n}$，则 P_3 可逆，且

$$P_3^* BP_3 = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$$

于是令 $P = P_1P_2P_3$，则 P 可逆，且有

$$P^* AP = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$$

即式(4.3.2)成立，由于相合变换不改变矩阵的秩数，故必有 $s+t=r$. □

注 定理 4.3.1 实际上给出了 n 阶自共轭阵 A 在相合变换下的标准形是：

$$P^*AP=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}, s+t=r=\operatorname{rank}A \qquad (4.3.2)'$$

式(4.3.2)中的 s 与 t 分别称为 A 的**正惯性指数与负惯性指数**.

定理 4.3.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则下列诸命题等价:

1° $A\in SC_n^>(Q)$;

2° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $P^*AP=I_n$;

3° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $A=P^*P$;

4° $A\in SC_n(Q)$ 且 $\lambda_s(A)>0, s=1,\cdots,n$

证 1°⇔4°,由定理 4.1.14 及其推论 1°即知.

1°⇒3° 由 $A\in SC_n^>(Q)$ 及定理 4.1.14 知存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_t>0, t=1,\cdots,n \qquad ①$$

令
$$P_1=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad P=P_1U$$

则 P 是可逆的,且由式①,有

$$A=(P_1U)^*(P_1U)=P^*P$$

3°⇒2° 显然

2°⇒1° 由 $P^*AP=I_n$ 及式(2.1.11)有

$$A=(P^*)^{-1}I_nP^{-1}=(P^{-1})^*P^{-1}$$

则 $A^*=A$,故 $A\in SC_n(Q)$,又对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,令 $P^{-1}x=y$,则 $y\neq 0$,且

$$x^*Ax=(P^{-1}x)^*(P^{-1}x)=y^*y>0$$

故 $A\in SC_n^>(Q)$. □

定义 4.3.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 的诸行在 Q 上右线性无关,

则称 A 为 Q 上的**右高矩阵**.

定理 4.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,下列诸命题等价:

1° $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$;

2° A 与下列矩阵是相合的

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

其中 $r\leqslant n$;

3° $A=L^*L$,其中 $L\in Q^{r\times n}$,为右高矩阵;

4° $A=S^*S$,其中 $S\in Q^{n\times n}$;

5° $A\in SC_n(Q)$且 $\lambda_s(A)\geqslant 0, s=1,\cdots,n$.

证 1°⇔5° 由定理 4.1.14 及其推论 2 即知.

1°⇒2° 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 由定理 4.3.1 知有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 P^*AP 呈现(4.3.2)式那样的矩阵,现要此对角阵为式(4.3.3),必要且只要,此时式(4.3.2)中不出现 -1,假若出现 -1,设第 i 个对角元素为 -1,令

$$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=P(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

其中 1 在第 i 个位置,这时就有

$$x^*Ax=-1<0$$

导出矛盾.故此时式(4.3.2)必为式(4.3.3).

2°⇒3° 设有可逆阵 P 使 P^*AP 为式(4.3.3),令 L 为 $(P^*)^{-1}$的前 r 行作成的子块,即设 $P^{-1}=\begin{pmatrix} L \\ P_0 \end{pmatrix}$,则 L 的诸行在 Q 上右线性无关,即是右高矩阵,且有

$$\begin{aligned} A &=(P^{-1})^*\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}=(L^*,P_0^*)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ P_0 \end{pmatrix} \\ &=L^*L \end{aligned}$$

3°⇒4° 取 $S=L$ 即可.

4°⇒1° 由 $A=S^*S$,则 $A^*=S^*S=A$,故 $A\in SC_n(Q)$,

于是由定理4.1.14知，$\exists\, U\in U^{n\times n}$，使

$$U^{*}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R, i=1,\cdots,n$$

$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为A 的全部特征值，即有

$$(US)^{*}(US)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R, i=1,\cdots,n$$

$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为A 的全部特征值，即有

$$(US)^{*}(US)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R, i=1,\cdots,n$$

于是对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^n$，有

$$0\leqslant(USx)^{*}(USx)=\lambda_1 x_1{}^2+\cdots+\lambda_n x_n^2$$

分别取 x 为$(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$(其中1在第 i 个位置)代入上式即得 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$，再由5°即知1°成立. □

定理4.3.4 Q 上的相合变换不改变矩阵的自共轭性、正定性或半正定性.

证 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 自共轭，B 与 A 相合，则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$B=P^{*}AP \tag{①}$$

于是

$$B^{*}=(P^{*}AP)^{*}=P^{*}A^{*}P=P^{*}AP=B,$$

故 B 仍是自共轭的.

若 A 正定，则由定理4.3.2知，有可逆阵 $T\in Q^{n\times n}$，使 $A=T^{*}T$，于是由式①，有

$$B=P^{*}AP=(TP)^{*}(TP)$$

注意到 TP 亦可逆，故由定理4.3.2即知 B 是正定的.

同理可证，当 A 是半正定时，则 B 亦是半正定的. □

定理 4.3.5 设 $A\in SC_n(Q)$，则 A 为(半)正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式皆为正(皆为非负).

证 先证必要性，对 A 的阶数用归纳法. 当 $n=1$ 时，显然成立. 假定对 $n-1$ 阶的矩阵断言成立，现在看 n 阶的自共轭阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

并令其左上角的 $n-1$ 阶子块为自共轭阵

$$A_0=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

因 A 是正定的，则对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in Q^{(n-1)\times 1}$，有

$$x^*A_0x=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{n-1},0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}>0$$

故 A_0 亦为正定的. 由归纳假设知，A_0 的各阶顺序主子式皆为正，从而知 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式均为正，最后只要再证 $|A|>0$ 就行了. 由定理 4.3.2 之 4°知，A 的所有特征值皆为正，再由定理 4.1.14 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(\lambda)),\lambda_s(A)>0,s=1,\cdots,n \quad ①$$

于是由定理 3.2.7 及式①，即知

$$|A|=|U^*AU|=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s(A)>0$$

再证充分性，也采用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 现假设 $n-1$ 阶时结论成立，下证 n 阶时结论亦成立.

设自共轭阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A 的各阶顺序主子式皆为正，要证

A 是正定的. 令 $B=(a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,由假设知 B 的各阶顺序主子式皆为正,知 B 是正定的,由上面已证的必要性知,$|B|>0$,于是 $\|B\|=|B|^2\neq 0$,由定理 3.3.5 知 B 是可逆的. 又由命题 3.3.1 推论知,存在可逆阵 $S\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,使

$$S^*BS=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}),\lambda_t>0,t=1,\cdots,n-1$$

且
$$|B|=|S^*BS|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$$

其中 S 是一系列$(n-1)$阶初等矩阵 $P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,记

$$A=\begin{pmatrix} B & C\\ C^* & a_{nn}\end{pmatrix},\text{ 其中 } C=\begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}$$

令 $D=-B^{-1}C$,则 $D^*=-C^*(B^{-1})^*,D^*B^*=-C^*$,于是,有

$$\begin{pmatrix} S_* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C\\ C^* & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} S^*BS & 0\\ 0 & a_{nn}-C^*(B^{-1})C\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \lambda_{n-1} & 0\\ & 0 & & a_{nn}-C^*(B^{-1})^*C\end{pmatrix}$$

记
$$\lambda_n=a_{nn}-C^*(B^{-1})^*C$$

显然$\begin{pmatrix} S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可分解为一系列 n 阶初等矩阵$P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,故有

$$|A|=\left|\begin{pmatrix} S^* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right|$$

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|B|\cdot\lambda_n$$

由已知$|A|>0$,且$|B|>0$,则由上式知$\lambda_n>0$,故矩阵相合于$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,此处$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$皆为正数,即$A$是正定的.半正定的情形同理可证. □

推论 设$A\in SC_n(Q)$,则A为(半)正定的充要条件是A的各阶主子式皆为正(非负).

证 充分性由定理4.3.5的充分性即知.下面证必要性.我们可用第二套初等变换把A的任一主子阵化成另一矩阵B的一个顺序主子阵,而B与A是相合的,故B仍为自共轭阵且由A为正定的及定理4.3.8易知B为正定的,而由定理4.3.3的必要性知B的各阶顺序主子式皆为正,因此A的各阶主子式皆为正. □

定理 4.3.6 设$A\in SC_n(Q)$,$\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A)$为$A$的$n$个特征值,则

$$1^\circ\ \det A=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.4}$$

$$2^\circ\ \mathrm{tr}A=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.5}$$

$$3^\circ\ \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}N(a_{st})=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A) \tag{4.3.6}$$

4° 当$|\lambda_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|$时,有

$$|\lambda_s(A)|=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n \tag{4.3.7}$$

特别当$A\geqslant0$时,有$\lambda_s(A)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n$ (4.3.8)

5° 当$A>0$时,则A可逆,且$A^{-1}\in SC_n^{>}(Q)$,当$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$,$\lambda_1(A^{-1})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A^{-1})$时,有

$$\lambda_s(A^{-1})=\lambda_{n-s+1}^{-1}(A),s=1,\cdots,n \tag{4.3.9}$$

6° 当$A>0$时,有$|A|>0,\mathrm{tr}A>0$ (4.3.10)

7° 当$A\geqslant0$时,有$|A|\geqslant0,\mathrm{tr}A\geqslant0$ (4.3.11)

证 1° 由$A\in SC_n(Q)$及定理4.1.14知,存在$U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^* = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(A) \end{pmatrix} = D \qquad ①$$

再由定理 3.2.7 知

$$\det A = \det D = \prod_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$$

2° 由式①,有

$$A = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)) U$$

设 $U = (u_{st})$,则

$$\operatorname{tr} A = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) |u_{st}|^2 = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$$

3° 由式①,有

$$\begin{aligned} U^* A^* AU &= (U^* A^* U)(U^* AU) \\ &= (U^* AU)(U^* AU) \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1^2(A), \cdots, \lambda_n^2(A)) \end{aligned}$$

又因 $A^* A \in SC_n(Q)$,故由 2°有

$$\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(A)$$

又显然有 $$\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} N(a_{st})$$

因此有 $$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} N(a_{st}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(A).$$

4° 当$A \in SC_n(Q)$时,有 $A^* = A$,于是

$$\begin{aligned} \sigma_s(A) &= \sqrt{\lambda_s(A^* A)} = \sqrt{\lambda_s(A^2)} \\ &= \sqrt{\lambda_s^2(A)} = |\lambda_s(A)|, s = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

特别当 $A \geqslant 0$ 时,有 $\lambda_s(A) \geqslant 0$,故有

$$\sigma_s(A) = |\lambda_s(A)| = \lambda_s(A), s = 1, \cdots, n$$

5° 因为$\lambda(A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda(A)}$,当把矩阵的特征值排成降序的形式

时自然有式(4.3.9)成立.

再由 1°、2°即知 6°、7°成立. □

定理 4.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 是中心封闭阵,$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$是 A 的 n 个实特征值,则

1° $$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.12}$$

2° $$\|A\|=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A) \tag{4.3.13}$$

3° 当$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$ 时,A^{-1}存在且亦为中心封闭阵,并有

$$\lambda_s(A^{-1})=\lambda_{n-s+1}(A),\quad s=1,\cdots,n \tag{4.3.14}$$

4° 若$B\sim A$,则 B 亦为中心封闭阵,且

$$\lambda_s(B)=\lambda_s(A),\quad s=1,\cdots,n \tag{4.3.15}$$

证 1° 因A 为中心封闭阵,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$A=P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots\lambda_n(A))P \tag{①}$$

于是由式①与定理 4.2.10 推论 2 及定理 4.3.2,知

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A)&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P))\\&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))))\\&=\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A))=\sum_{s=1}^{N}\lambda_s(A)\end{aligned}$$

2° 由式①及定理 3.3.3,知

$$\begin{aligned}\|A\|&=\|P^{-1}\|\,\|\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\|\,\|P\|\\&=\|P^{-1}P\|\cdot\|\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\|\\&=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A)\end{aligned}$$

3° 当诸 $\lambda_s(A)>0$ 时,由式①即知 A 可逆,从而显然有式(4.3.14)成立.

4° 由 B 与 A 相似,则存在可逆阵 $Q\in Q^{n\times n}$,使

$$B = Q^{-1}AQ$$

于是由式①及上式有

$$B = Q^{-1}P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))PQ \tag{②}$$

令 $P_1 = PQ$，则 P_1 可逆，且由式②有

$$B = P_1^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P_1$$

可见 B 仍是中心封闭阵，且

$$\lambda_s(B) = \lambda_s(A),\ s = 1,\cdots,n \qquad \square$$

推论 相似变换不改变中心封闭阵的中心封闭性，也不改变中心封闭阵的特征值、迹的实部及重行列式.

定理 4.3.8 设 $A \in Q^{n\times n}$，则 A 的主子阵能继承其自共轭性、正定性或半正定性.

证 设 $A \in Q^{n\times n}$，若 A 是自共轭的，则显然 A 的各主子阵也是自共轭的；若 A 还是正定的，A_k 是 A 的 k 阶主子阵，由定理 4.3.5 之推论的必要性知，A 的各阶主子式皆为正，从而 A_k 的各阶主子式亦皆为正，再由定理 4.3.5 推论的充分性即知 A_k 亦是正定的. 半正定的情形同理可证. $\square$

定理 4.3.9 相似变换不改变自共轭阵的特征值，酉相似变换不改变自共轭阵的行列式与迹.

证 因为自共轭阵必是中心封闭阵，故由定理 4.3.6 知，相似变换不改变自共轭阵的特征值. 又由于酉相似也是酉相合，故由命题 4.3.3 知，酉相似变换也不改变矩阵的自共轭性，进而由定理 4.3.6，即知酉相似变换不改变自共轭阵的行列式与迹. $\square$

定理 4.3.10 设 A、$B \in SC_n(Q)$，$A > 0$，$B \geqslant 0$，则有可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使

$$\left.\begin{aligned} &P^*AP = I_n \\ &P^*BP = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix},\ b_s \geqslant 0,\ s = 1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{4.3.16}$$

证 由 $A\in SC_n(Q)$, $A>0$ 及定理 4.3.2 知，有可逆阵 $P_0\in Q^{n\times n}$，使

$$P_0^* AP_0=I_n$$

由 $B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.3.4 知，$P^* BP\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 于是由定理 4.1.14 知，有 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^* P_0^* BP_0U=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}, b_s\geqslant 0, s=1,\cdots,n$$

令 $P=UP_0$，则 P 可逆，且

$$P^* AP=U^* P_0^* AP_0U=U^* I_nU=I_n$$

$$P^* BP=U^* P_0^* BP_0U=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}, b_s\geqslant 0, s=1,\cdots,n \quad \square$$

命题 4.3.5 设 $A=(a_{ij})\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，若对某个 i 有 $a_{ii}=0$，则 $a_{ij}=a_{ji}=0$, $\forall j=1,2,\cdots,r$, $r=\mathrm{rank}A$.

证 因 $\mathrm{rank}A=r$，则由定理 4.3.3，有 $A=RR^*$，其中 $R=(p_{ij})\in Q^{n\times r}$，从而 $a_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}\bar{p}_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{r} N(p_{ik})=0$，由此推出 $p_{ij}=0(j=1,2,\cdots,r)$，于是 $a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}\bar{p}_{ij}=0$，与此同时 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}=0(j=1,2,\cdots,r)$. $\square$

命题 4.3.6 设 $B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，若 $B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$，则

1° $\mathrm{rank}(B_2,B_3)=\mathrm{rank}B_3$，且 $B_3x=-B_2$ 有解；

2° $\mathrm{rank}(B_1,B_2^*)=\mathrm{rank}B_1$，且 $B_1x^*=B_2^*$有解.

证 因为 $B\geqslant 0$，由定理 4.3.8 知 B_1 与 B_3 均为半正定，设 B_3 为 t 阶方阵，则由定理 4.1.14 之推论知有 $U\in U^{t\times t}$，使得

$$UB_3U^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{pmatrix}\geqslant 0$$

于是

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & (UB_2)^* \\ UB_2 & B_4 \end{pmatrix}\geqslant 0$$

其中 $B_4=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{bmatrix}$. 又由命题 4.3.5 知，若 $\lambda_i=0$，则 (UB_2,B_4)的第 i 行全为 0，从而

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(B_2,B_3)&=\operatorname{rank}U(B_2,B_3)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}\\&=\operatorname{rank}(UB_2,B_4)=\operatorname{rank}B_3\end{aligned}$$

最后由文献[1]299 页定理 9 知 $B_3X=-B_2$ 恒有解，于是 1°得证. 同样可证明 2°. □

定理 4.3.11 设 $A,B\in SC_n(Q)$，则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使得

$$\left.\begin{aligned}&P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\&P^*BP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},\lambda_t\geqslant 0,t=1,\cdots,n.\end{aligned}\right\}\quad(4.3.17)$$

证 若 $A>0$，由定理 4.3.10，结论显然成立；若 $\operatorname{rank}A=r<n$，则由定理 4.3.3 知存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$A_0=P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而由定理 4.3.4 知，$B_0=P^*BP=\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，其中 $B_1\in Q^{r\times r}$. 令

$$L=\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$$

其中 X 满足 $B_3X=-B_2$（这一矩阵方阵的有解由命题 4.3.6 可

知). 显然 L 可逆且容易验证有

$$L^* AL=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L^* BL=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

由定理 4.3.4 与定理 4.3.5 知 M 与 N 均为半正定，从而有广义酉阵 V_1 及 V_2 使得

$$\begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}, \mu_t \geqslant 0$$

其中 $t=1,\cdots,n$，而此时又有

$$\begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix} L^* A_0 L \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是只须令
$$P=UL\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

即得

$$P^* AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^* BP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_t \geqslant 0, t=1,\cdots,n \qquad \square$$

定理 4.3.12 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使得 $P^* AP$ 与 $P^{-1}B(P^*)^{-1}$ 同时为实对角阵，即

$$\left.\begin{aligned} & P^* AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & P^{-1}B(P^*)^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_t \geqslant 0, t=1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.18)$$

2° AB 与 BA 相似于同一非负实对角阵，从而它们是具有相同非负特征值的中心封闭阵. 且若 A、B 可换，则

$$AB=BA\in SC_n^{\geqslant}(Q)$$

证 1° 仿命题4.3.6的证明,只须取其中 X 满足矩阵方程:$B_1X^*=B_2{}^*$ 即可.

2° 由式(4.3.18),有

$$\begin{aligned}P^*AB(P^*)^{-1}&=(P^*AP)(P^{-1}BP^{*-1})\\&=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix},\lambda_t>0,t=1,\cdots,r\end{aligned}$$

$$P^*BAP=(P^{-1}BP^{*-1})(P^*AP)=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix},\lambda_t>0,t=1,\cdots,r.$$

故2°成立. □

类似地,我们还可得:

定理4.3.13 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则 AB 与 BA 相似于同一正实对角阵,从而它们是具有相同正特征值的中心封闭阵,且当 A,B 可换时,有 $AB=BA\in SC_n^{>}(Q)$.

定理4.3.14 设 $A,B\in SC_n(Q),A>0,B\geqslant0$,则 AB 与 BA 相似于同一非负实对角阵,从而它们是具有相同非负特征值的中心封闭阵,且当 A,B 可换时,有 $AB=BA\in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

定理4.3.15 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则 $AB,BA,A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$,

$B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$为相似的中心封闭阵,且

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$$
$$=\lambda_s(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})\geqslant 0,\quad s=1,\cdots,n. \tag{4.3.19}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA)=\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.20}$$

证 不妨设 $\mathrm{rank}A=r$,则由自共轭阵的谱分解定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^*=\mathrm{diag}(D,0),D=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_r(A))>0 \qquad ①$$

由定理 4.3.4 知,有 $UBU^*\in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

设 $UBU^*=\begin{pmatrix}B_1 & B_2{}^*\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}$,其中 $B_1\in Q^{r\times r}$,且由定理 4.3.8 知$B_1\in SC_r^{\geqslant}(Q)$.

令

$$U=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix},\ 其中\ U_1\in U^{r\times n}$$

则

$$UA^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}U^*=UA^{\frac{1}{2}}U^*UBU^*UA^{\frac{1}{2}}U^*$$
$$=\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}B(U_1{}^*,U_2{}^*)\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}},0) \qquad ②$$

令 $L=\begin{pmatrix}I & 0\\ X & I\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$,其中 X 满足$B_1X=-B_2$(这一方程有解,由定理命题 4.3.6 可知),于是 L 可逆且有

$$[U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*]^{-1}AB[U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*]$$

$$=\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1^*D^{\frac{1}{2}},0) \qquad ③$$

由式②,③知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$与 AB 相似.而由定理 4.3.12 知 AB 与 BA 是具有相同非负特征值的中心封闭阵.再由定理 4.1.16 知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$亦为中心封闭阵,且

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n.$$

同理可证

$$\lambda_s(BA)=\lambda_s(AB)=\lambda_s(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n.$$

故式(4.4.19)成立.

又由定理 4.2.10 推论 2,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

由于 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\geqslant 0$$

故式(4.3.20)成立. □

推论 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

1° 当$A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 或 $A>0,B\geqslant 0$ 或 $A\geqslant 0,B>0$ 时,有

$$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q);$$

2° 当$A>0,B>0$ 时,有 $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{>}(Q)$.

证 当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$时,则$(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^*=(A^{\frac{1}{2}})^*B^*(A^{\frac{1}{2}})^*=A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$,故 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n(Q)$.又由定理 4.3.15 知 $\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\geqslant 0(s=1,\cdots,n)$,从而由定理 4.3.3 知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,同理可证其他情形. □

定理 4.3.16 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,m 为正整数,则$(AB)^m$,

$(BA)^m, (A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m, (B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m$ 皆为相似中心封闭阵，且有

$$\lambda_s((AB)^m) = \lambda_s((BA)^m) = \lambda_s((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m)$$
$$= \lambda_s((B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m), s = 1, \cdots, n \quad (4.3.21)$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^m) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(BA)^m) = \mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m$$
$$= \mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m \quad (4.3.22)$$

证 由定理 4.3.15 知 $AB, BA, A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}, B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 为相似的中心封闭阵，故存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使

$$AB = P^{-1}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}P$$

故 $$(AB)^m = (P^{-1}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}P)^m = P^{-1}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m P$$

因此 $(AB)^m$ 与 $(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m$ 相似.

注意到 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则 $(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，于是由定理 4.1.17 知，$(AB)^m$ 为中心封闭阵，且

$$\lambda_s((AB)^m) = \lambda_s((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m), s = 1, \cdots, n$$

同理可证式(4.3.21)的其他等式.

又由定理 4.2.10 知，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^m) &= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(ABAB\cdots AB)) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B\cdots A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B)) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\cdots A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m) \\ &= \mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m\end{aligned}$$

同理可证式(4.3.22)中的其他等式. □

对于自共轭四元数矩阵的导出阵，有如下

定理 4.3.17 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° $A^\sigma, B^\sigma \in SC_{2n}^{\geqslant}(C)$

2° $AB, (AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$ 分别在 Q, C 上相似于非负实对角阵，且对每个 $s(s=1,\cdots,n)$有

$$\lambda_s(A)=\sigma_s(A)=\lambda_{2s-1}(A^\sigma)=\lambda_{2s}(A^\sigma)$$
$$=\sigma_{2s-1}(A^\sigma)=\sigma_{2s}(A^\sigma) \qquad (4.2.23)$$
$$\lambda_s(AB)=\lambda_{2s-1}(A^\sigma B^\sigma)=\lambda_{2s}(A^\sigma B^\sigma) \qquad (4.2.24)$$

证 由 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$A = U^* \mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U, \lambda_s(A) \geqslant 0, s=1,\cdots,n \qquad ①$$

由定理 4.2.8 知，

$$\lambda_s(A)=\sigma_s(A), s=1,\cdots,n, \qquad ②$$

于是由式①，并利用式(2.3.15)，(2.3.17)，有

$$A^\sigma = (U^\sigma)^* \mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A),\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^\sigma \qquad ③$$

由式③，②即知 $A^\sigma \in SC_{2n}^{\geqslant}(C)$，且式(4.3.23)成立.

又由定理 4.3.15 知

$$\lambda_s(AB) \geqslant 0, s=1,\cdots,n$$

且存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使

$$PABP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB)) \qquad ④$$

这样由式④并利用式(2.3.15)及式(2.3.16)，有

$$P^\sigma A^\sigma B^\sigma (P^\sigma)^{-1}$$
$$= \mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB),\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB)) \qquad ⑤$$

于是由式⑤，即知$(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$ 在C上相似于非负实对角阵，且有式(4.2.24)成立. □

对于自共轭四元数矩阵的迹，有如下

定理 4.3.18 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{tr}AB = \overline{\mathrm{tr}BA} \qquad (4.3.25)$$

证 设 $BA = (c_{st})_{n\times n}$，则

$$\overline{\mathrm{tr}BA}=\overline{\sum_{s=1}^{n}c_{ss}}=\sum_{s=1}^{n}\bar{c}_{ss}=\mathrm{tr}(BA)^*$$

注意到 $A^*=A,B^*=B$，则有 $(BA)^*=A^*B^*=AB$，由此即知式(4.3.25)成立. □

定理 4.3.19 设 $A,B\in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA\Leftrightarrow \mathrm{tr}AB\in R.$$

证 当 $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$ 时，由式(4.3.25)即知有 $\mathrm{tr}AB\in R$，反之，当 $\mathrm{tr}AB\in R$ 时，由式(4.3.25)，有

$$\overline{\mathrm{tr}BA}=\mathrm{tr}AB=\overline{\mathrm{tr}AB}$$

故 $\mathrm{tr}BA=\mathrm{tr}AB$. □

定理 4.3.20 设 $A,B\in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{tr}\,\frac{AB+BA}{2}\tag{4.3.26}$$

证 由式(4.3.25)知

$$\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}BA=\mathrm{tr}AB+\overline{\mathrm{tr}AB}$$

由此即知式(4.3.26)成立. □

定理 4.3.21 设 $A\in SC_n(Q)$，$U\in U^{n\times n}$，则

$$\mathrm{tr}(UAU^*)=\mathrm{tr}A\tag{4.3.27}$$

证 由定理 4.3.9 即得 □

定理 4.3.22 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)\geqslant 0\tag{4.3.28}$$

证 由定理 4.3.15 知，AB 在 Q 上相似于非负实对角阵，即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$PABP^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))=D$$

其中，$\lambda_s(AB)\geqslant 0,s=1,\cdots,n$

又由定理 4.2.10 之推论 1 知，相似变换不改变矩阵迹的实部，故有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}D)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)\geqslant 0.$$ □

第五章　四元数矩阵中的不等式

不等式是一个广阔的数学领域，从某种意义上来说，不等式比等式有更大的用处，具有更普遍的意义，它在各个数学分支中都扮演着非常重要的角色，这个领域里的成果也异常丰富.

在这一章里，我们将从凸函数、控制不等式、双随机矩阵出发，在一些熟知的基本数值不等式的基础上，讨论与四元数矩阵的诸数值特征相联系的一系列不等式，其中有些结果就是对常规矩阵来说也是新的.

§5.1　凸函数　双随机矩阵　控制不等式

一、凸函数

定义 5.1.1　设 $f(t)$ 是区间 I 上的实函数，若对任意 $x,y\in I$ 及任意 $\alpha\in(0,1)$，恒有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\qquad(5.1.1)$$

则称 f 是区间 I 上的**下凸函数**；若式(5.1.1)中的等号当且仅当 $x=y$ 成立，则称 f 是**严格下凸**的；若式(5.1.1)中的不等号反向，则称 f 是 I 上的**上凸函数**；类似地可定义**严格上凸**；下凸函数与上凸函数统称为**凸函数**；严格下凸函数与严格上凸函数统称为**严格凸函数**.

定理 5.1.1　设 $f(t)$ 是 I 上实函数，若 $f(t)$ 在 I 上二阶可导，且 $f''(t)\geqslant0(\leqslant0)$，$\forall t\in I$，则 $f(t)$ 是 I 上的下(上)凸函数，

且当 $f''(t)>0(<0)$时，$f(t)$为严格下（上）凸函数.

证 $\forall t_1<t_2<t_3\in I$，由拉格朗日中值定理，有 $\theta_1\in(t_1,t_2)$，$Q_2\in(t_2,t_3)$，使得

$$f(t_2)-f(t_1)=f'(\theta_1)(t_2-t_1)$$
$$f(t_3)-f(t_2)=f'(\theta_2)(t_3-t_2)$$

由 $f''(t)\geqslant 0$ 知 $f'(t)$在 I 上单增，故 $f'(\theta_1)\leqslant f'(\theta_2)$，于是有

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\leqslant\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2} \quad ①$$

由 t_1,t_2,t_3 的取法的任意性，且 $t_2=\alpha t_1+(1-\alpha)t_3$，有 $\alpha=\frac{t_3-t_2}{(t_3-t_1)}\in(0,1)$，可将式①变形为

$$f(t_2)\left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_3-t_2}\right)\leqslant\frac{f(t_1)}{t_3-t_2}+\frac{f(t_1)}{t_2-t_2}$$

即
$$f(t_2)\leqslant\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}f(t_1)+\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}f(t_3)$$
$$=\alpha f(t_1)+(1-\alpha)f(t_2)$$

故 $f(t)$是 I 上的下凸函数，且由式①的由来易见严格凸性函数的条件.上凸和严格上凸的情形可仿证之. □

由凸函数定义易得如下

定理 5.1.2 设 $f(t)$是区间 I 上的下凸函数，则

1° 对$\forall x_1,x_2;y_1,y_2\in I$ 且$x_1\geqslant x_2$，$y_1\geqslant y_2$，$x_1\neq y_1$，$x_2\neq y_2$，有

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}\geqslant\frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2} \quad (5.1.2)$$

2° 设$x_1,\cdots,x_n\in I$，$p_i>0$，$p_1+\cdots+p_n=p$，则

$$f\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i) \quad (5.1.3)$$

在式(5.1.3)中，令 $p_1=p_2=\cdots p_n=\frac{1}{n}$，可得

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{5.1.3$'$}$$

当 $f(t)$为上凸函数时，上诸不等式反向.

式(5.1.3)也称为**凸函数的琴生不等式**.

本章将要用到的重要的下凸函数有

1° $f(t)=-\ln t, t\in(0,+\infty)$

2° $f(t)=t^{\alpha}, \alpha>1, t\in(0,+\infty)$

这由定理 5.1.1 显见，且均为严格下凸函数.

由 $f(t)=-\ln t$ 是$(0,+\infty)$上的下凸函数，及式(5.1.3)$'$，即得如下的**几何—算术平均值不等式**：

设 $x_i\geqslant 0, p_i>0, 1\leqslant i\leqslant n, p_1+\cdots+p_n=p$，则

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_i}{p} \tag{5.1.4}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.1.4$'$}$$

二、双随机矩阵与控制不等式

定义 5.1.2 设 $P=(p_{ij})\in R^{n\times n}$，$P$ 的各元素非负，且

$$Pe_n=e_n, P^{\mathrm{T}}e_n=e_n \tag{5.1.5}$$

这里 $e_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{n\times 1}$，即

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1, j=1,\cdots,n \\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1, i=1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5$'$}$$

即矩阵 P 的各列、各行元素之和均为 1，则称 P 为R 上的**双随机矩阵**，记为 $P\in\mathscr{H}(R)$.

若满足的式(5.1.5)$'$换成如下的式(5.1.5)$''$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\leqslant 1, j=1,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\leqslant 1, i=1,\cdots,n\end{array}\right\} \tag{5.1.5$''$}$$

则称 P 为 R 上的**次双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}_s(R)$.

定义 5.1.3 设 $P=(p_{ij})\in Q^{n\times n}$,若满足

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} |p_{ij}|=1, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}|=1, i=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \tag{5.1.6}$$

则称 P 是 Q 上的**广义双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}(Q)$.

若满足的式(5.1.6)换成如下的(5.1.6)′

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} |p_{ij}|\leqslant 1, j=1,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}|\leqslant 1, i=1,\cdots,n\end{array}\right\} \tag{5.1.6$'$}$$

则称 P 为 Q 上的**广义次双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}_s(Q)$. 易证下面

命题 5.1.1

1° 若 $A\in\mathscr{P}$(或 $A\in\mathscr{P}_s$),则 $A^{\mathrm{T}},\overline{A}\in\mathscr{P}$,(或 $A^{\mathrm{T}},\overline{A}\in\mathscr{P}_s$),且对任意置换矩阵 T,有 $TA,AT\in\mathscr{P}$(或 $TA,AT\in\mathscr{P}_s$).

2° 若 $A,B\in\mathscr{P}_s$,则 $AB,BA\in\mathscr{P}_s$.

定义 5.1.4 设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$满足$x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n,y_1\geqslant\cdots\geqslant y_n$,

1° 若

$$\sum_{s=1}^{k} x_s\leqslant\sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.7}$$

则称**向量 x 被 y 控制**,或说 **y 弱优于 x**,记为 $x\prec_w y$.

2° 若

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k = 1,\cdots,n-1\\&\sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s\end{aligned}\right\} \tag{5.1.8}$$

则称**向量 x 被 y 严控**,或说 **y 优于 x**,记为 $x \prec y$.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^{1\times n}$,以下均假定向量 x 的分量是按降序 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$ 排好的. 而把以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的乱序排列作成的向量记为 $\tilde{x}$,于是易得如下两个定理:

定理 5.1.3 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^{1\times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{n} x_{n-s+1} \leqslant \sum_{s=1}^{k} \tilde{x}_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} x_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.9}$$

定理 5.1.4 设 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$,则有

$$\sum_{t=1}^{k} x_s y_{n-s+1} \leqslant \sum_{s=1}^{k} \tilde{x}_s \tilde{y}_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} x_s y_s, k=1,\cdots n \tag{5.1.10}$$

为了讨论控制不等式,我们将常用到如下的所谓**阿贝尔**(Abel)**变换**:

设 $a_t,b_t(t=1,\cdots,n)$是实数或四元数,则成立等式

$$\sum_{t=1}^{n} a_t b_t = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + a_n \sum_{s=1}^{n} b_s \tag{5.1.11}$$

定理 5.1.5 设 $a_t,b_t,c_t\in R$,若 $a_t\geqslant 0, b_t\geqslant 0, t=1,\cdots,n$, $c_1\geqslant\cdots\geqslant c_n$,且

$$\sum_{t=1}^{k} a_t \leqslant \sum_{t=1}^{k} b_t, k=1,\cdots,n \tag{5.1.12}$$

则有

$$\sum_{t=1}^{k} c_t a_t \leqslant \sum_{t=1}^{k} c_t b_t, k=1,\cdots,n \tag{5.1.13}$$

证 由阿贝尔变换即式(5.1.11)及条件,有

$$\sum_{t=1}^{k} c_t a_t = \sum_{t=1}^{k-1} (c_t - c_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} a_s + c_k \sum_{t=1}^{k} a_t$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (c_t - c_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + c_k \sum_{t=1}^{k} a_t$$

$$= \sum_{t=1}^{k} c_t b_t, k = 1, \cdots, n$$

故式(5.1.13)成立. □

定理 5.1.6 设 $a_t, C_t^{(k)} \in R, 1 \leqslant t, k \leqslant n$，若 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，且对任意 $1 \leqslant l \leqslant n$，有 $\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \min\{l, k\}$，则

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} \leqslant \sum_{t=1}^{k} a_t, 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.1.14}$$

证 由阿贝尔变换及条件，有

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{s=1}^{n} C_s^{(k)}$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{s=1}^{n} C_s^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) t + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) k + n a_n$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) t + a_k \cdot k = \sum_{t=1}^{k} a_t, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

故式(5.1.14)成立. □

定理 5.1.7 设 $a_t, C_t^{(k)} \in R, 1 \leqslant t, k \leqslant n$，若 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，且

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \begin{cases} \sum_{t=1}^{l} b_t, 1 \leqslant l \leqslant k-1 \\ \sum_{t=1}^{k} b_t, k \leqslant l \leqslant n \end{cases}$$

则

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} \leqslant \sum_{t=1}^{k} a_t b_t, 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.1.15}$$

证 由阿贝尔变换及条件,有

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{n} C_t^{(k)}$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{n} C_t^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{k} C_t^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{k} b_t$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + a_k \sum_{t=1}^{k} b_t = \sum_{t=1}^{k} a_t b_t$$

故式(5.1.15)成立. □

向量受控与双随机矩阵之间的关系有如下的

定理 5.1.8 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in R^{n\times 1}$,且非负,则

1° $x \prec y \Leftrightarrow$ 存在双随机阵 $P\in\mathscr{P}(R)$ 使得 $x=Py$;

2° $x \prec_w y \Leftrightarrow$ 存在次双随机阵 $P\in\mathscr{P}_s(R)$,使 $x=Py$.

证 1° 不妨设 x,y 的分量均为降序排好的.

"$\Leftarrow$" 改记 $x=Py$ 为分块形式为

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \tag{①}$$

这里 $\quad x^{(1)}=(x_1,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}}, x^{(2)}=(x_{k+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

$$y^{(1)}=(y_1,\cdots,y_k)^{\mathrm{T}}, y^{(2)}=(y_{k+1},\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

其余是相应分块,记 $e_k=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{k\times 1}$,于是由式①有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} x_i &= e_k^{\mathrm{T}} x^{(1)} = e_k^{\mathrm{T}}(P_{11}y^{(1)} + P_{12}y^{(2)}) \\
&= e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - e_k^{\mathrm{T}}(I_k - P_{11})y^{(1)} + e_k^{\mathrm{T}} P_{12} y^{(2)} \\
&\leqslant e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - e_k^{\mathrm{T}}(I_k - P_{11})e_k y_k + e_k^{\mathrm{T}} P_{12} e_{n-k} y_k \\
&= e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - [e_k^{\mathrm{T}} e_k - e_k^{\mathrm{T}}(P_{11}, P_{12})e_n] y_k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i - (e_k^{\mathrm{T}} e_k - e_k^{\mathrm{T}} e_k) y_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i, k = 1, \cdots, n-1$$

且由式(5.1.5),有 $$e_n^{\mathrm{T}} x = e_n^{\mathrm{T}} P y = e_n^{\mathrm{T}} y$$

故得 $$x \prec y$$

"$\Rightarrow$" 对 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$, $x \prec y$, 即 $x=y$, 而 1 正是 1 阶的双随机阵,故当 $n=1$ 时,结论成立.现假设阶数 $\leqslant n-1$ 时结论为真,下面考虑 n 阶情形:

已知 $x \prec y$,可分两种情况:

(i) $x_1 = y_1$,此时,记

$$\tilde{x} = (x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \tilde{y} = (y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$$

可得 $\tilde{x} \prec \tilde{y}$,由归纳假设,存在双随机阵 $\tilde{P}$,使 $\tilde{x} = \tilde{P}\tilde{y}$.取

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}$$

显见 P 仍为双随机阵,且有 $x = Py$.

(ii) $x_1 < y_1$.此时必有 y 的某个坐标不大于 x_1(否则控制条件不能成立),设 y_t 是其中的第一个,即有 $x_1 < y_1, y_2, \cdots, y_{t-1}$,但 $y_t \leqslant x_1 < y_1$,后一不等式保证了存在 $\alpha \in [0,1]$,使得

$$x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_t$$

令

$$P_1 = \left(\begin{array}{ccc:c} \alpha & 0 \cdots 0 & 1-\alpha & \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & I_{t-2} & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & \\ 1-\alpha & 0 \cdots 0 & \alpha & \\ \hdashline & 0 & & I_{n-t} \end{array}\right)$$

显然 P_1 为双随机阵，记 $P_1 y = z = (z_1, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，则有

$$
\begin{aligned}
&z_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_t = x_1 \\
&z_t = (1-\alpha) y_1 + \alpha y_t = y_t + y_1 - x_1 \qquad \text{②} \\
&z_2 = y_2, \cdots, z_{t-1} = y_{t-1}, z_{t+1} = y_{t+1}, \cdots, z_n = y_n
\end{aligned}
$$

注意到 $z_1 = x_1$，记 $\tilde{z} = (z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，可证 $\tilde{x} \prec \tilde{z}$. 事实上，由式②知：

当 $k \leqslant t-1$ 时，有

$$\sum_{i=2}^{k} z_i = \sum_{i=1}^{k} y_i > \sum_{i=2}^{k} x_1 \geqslant \sum_{i=2}^{k} x_i$$

当 $k > t-1$ 时，有

$$\sum_{i=2}^{k} z_i = \sum_{\substack{i \neq t \\ i=1}}^{k} y_i + y_t + y_1 - x_1 = \sum_{i=1}^{k} y_i - x_1 \geqslant \sum_{i=2}^{k} x_i$$

得受控条件满足. 而 $e_{n-1}^{\mathrm{T}} \tilde{z} = e_n^{\mathrm{T}} z - x_1 = e_n^{\mathrm{T}} y - x_1 = e_n^{\mathrm{T}} x - x_1 = e_{n-1}^{\mathrm{T}} \tilde{x}$，得 $\tilde{x} \prec \tilde{z}$，于是仿 1°得，双随机阵 P_2 使 $x = P_2 z$，取 $P = P_2 P_1$，就有 $x = P_2 z = P_2 P_1 y = Py$，而 P 为双随机阵.

2° 同理可证. □

定理 5.1.9 设 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n \times 1}$，则 $x \prec_w y$ 的充要条件是存在 $P = (p_{ij}) \in \mathscr{P}_s(Q)$，使

$$x = Py$$

特别地，若 $P \in \mathscr{P}(R)$，则对任意 $y \in R^{n \times 1}$ 有 $Py \prec y$.

证 充分性. 设 $x = Py, P \in \mathscr{P}_s(Q)$，则

$$|x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}| |y_j|, i = 1, \cdots, n$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} |x_i| &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}| |y_j| = \sum_{j=1}^{n} |y_j| \sum_{i=1}^{k} |p_{ij}| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |y_j| t_j \qquad \text{①}
\end{aligned}
$$

其中，$1\leqslant k\leqslant n$，$0\leqslant t_j=\sum_{i=1}^{k}|p_{ij}|\leqslant 1$，$j=1,\cdots,n$，且

$$\sum_{j=1}^{n} t_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}|p_{ij}|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}1=k \qquad ②$$

从而由式①，②，有

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i|-\sum_{i=1}^{k}|y_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|y_j|t_j-\sum_{j=1}^{k}|y_j|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}|y_j|t_j-\sum_{j=1}^{k}|y_j|+|y_k|(k-\sum_{j=1}^{n}t_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(|y_j|-|y_k|)(t_j-1)+\sum_{j=k+1}^{n}t_j(|y_j|-|y_k|)\leqslant 0$$

故有 $x\prec_w y$.

当 $P\in\mathscr{P}(R)$时，对 $y\in Q^{n\times 1}$，设 $x=Py=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，与上类似可证 $Py\prec_w y$，且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}y_i=\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{k}p_{ij}=\sum_{j=1}^{n}y_j$$

从而有 $Py\prec y$.

必要性.记 $\tilde{x}=(|x_1|^2,\cdots,|x_n|^2)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{y}=(|y|^2,\cdots,|y_n|^2)^{\mathrm{T}}$，则由命题 5.1.8 之 1°的必要性知存在 $W\in\mathscr{P}_s(R)$，使

$$\tilde{x}=W\tilde{y}$$

令
$$D_1=\mathrm{diag}(\frac{\bar{x}_1}{|x_1|^2},\cdots,\frac{\bar{x}_n}{|x_n|^2})$$

$$D_2=\mathrm{diag}(\frac{\bar{y}_1}{|y_1|^2},\cdots,\frac{\bar{y}_n}{|y_n|^2})$$

则
$$\tilde{x}=D_1x,\tilde{y}=D_2y$$

易验证：$D_1^{-1}=D_1^*$，$D_2\in\mathscr{P}(Q)\subset\mathscr{P}_s(Q)$.

令 $P=D_1^{-1}WD_2$，则易知有 $P\in\mathscr{P}_s(Q)$，且有

$$x=D_1^{-1}\tilde{x}=D_1^{-1}W\tilde{y}=D_1^{-1}WD_2y=Py \qquad \square$$

定理 5.1.10 设 $x,y\in R^{n\times 1}$，且它们的分量均已按降序排

列，P 是任给的 n 阶双随机阵，则有

$$x^{\mathrm{T}}\underline{y}\leqslant x^{\mathrm{T}}Py\leqslant x^{\mathrm{T}}y \tag{5.1.16}$$

这里，$\underline{y}\triangleq(\underline{y}_1,\cdots,\underline{y}_n)^{\mathrm{T}}$，而 $\underline{y}_t=y_{n-t+1}$，$t=1,\cdots,n$.

证 先证式(5.1.16)右边的不等式，用数学归纳法. 当 $n=1$，结论显然为真. 假设对 $n-1$ 维向量，结论为真，现讨论 n 维情形. 记

$$z=Py=(z_1,\cdots,z_n),\ \tilde{z}=(z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{y}=(y_2+y_1-z_1,y_3,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

则由 $z\prec y\Rightarrow\tilde{z}\prec\tilde{y}$，故有 $n-1$ 阶双随机阵 $\tilde{P}$ 使 $\tilde{z}=\tilde{P}\tilde{y}$，由归纳假设，可得

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{z}\leqslant\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y},\text{这里 }\tilde{x}=(x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

由于 $\quad x^{\mathrm{T}}z=x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{z}\leqslant x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y}$

而

$$\begin{aligned} x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y}&=x_1z_1+x_2(y_1-z_1)-x_1y_1+x^{\mathrm{T}}y\\ &=(x_1-x_2)(z_1-y_1)+x^{\mathrm{T}}y\leqslant x^{\mathrm{T}}y\end{aligned}$$

即得 $\quad x^{\mathrm{T}}z\leqslant x^{\mathrm{T}}y \quad$ 即 $x^{\mathrm{T}}Py\leqslant x^{\mathrm{T}}y$.

在已得的结果中用 $-y$ 代替 y，则有

$$x^{\mathrm{T}}P(-y)\leqslant x^{\mathrm{T}}(-y)$$

即得

$$x^{\mathrm{T}}\underline{y}\leqslant x^{\mathrm{T}}Py$$

□

关于凸函数与控制不等式，有如下

定理 5.1.11 设 I 为一区间，$x_s,y_s\in I$，$s=1,\cdots,n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$，若 $x\prec_w y$，即 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant\cdots\geqslant y_n$，且满足

$$\sum_{s=1}^{k}x_s\leqslant\sum_{s=1}^{k}y_s,k=1,\cdots,n \tag{5.1.17}$$

则对 I 上任一下凸递增函数 $f(t)$，有

$$\sum_{s=1}^{k}f(x_s)\leqslant\sum_{s=1}^{k}f(y_s),k=1,\cdots,n \tag{5.1.18}$$

证 不妨设 $x_s \neq y_s$（因为当 $x_s = y_s$ 时，有 $f(x_s) = f(y_s)$，不等式(5.1.18)中的这一项可以不考虑)，对任意正整数 $k \leqslant n$，令

$$D_s = \frac{f(x_s) - f(y_s)}{x_s - y_s}, s = 1, \cdots, k \qquad ①$$

因 $f(t)$ 是 I 上的递增下凸函数，注意到 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，及式(5.1.10)，由式①，有

$$D_s \geqslant D_{s+1} \geqslant 0, s = 1, \cdots, k \qquad ②$$

令 $$X_s = \sum_{r=1}^{s} x_r, Y_s = \sum_{r=1}^{s} y_r, s = 1, \cdots, k,$$

由式(5.1.10)有 $$x_s \leqslant Y_s, s = 1, \cdots, k, \qquad ③$$

于是由式②,③，有

$$\sum_{s=1}^{k-1} (X_s - Y_s)(D_s - D_{s+1}) + (X_k - Y_k) D_k \leqslant 0,$$

即 $$\sum_{s=1}^{k-1} X_s(D_s - D_{s+1}) + X_k D_k \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} Y_s(D_s - D_{s+1}) + Y_k D_k,$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} (X_s - X_{s-1}) D_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} (Y_s - Y_{s-1}) D_s$$

（其中 $X_0 = 0$，$Y_0 = 0$）

即 $$\sum_{s=1}^{k} x_s \frac{f(x_s) - f(y_s)}{x_s - y_s} \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s \frac{f(x_s) - f(y_s)}{x_s - y_s}$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} \frac{x_s f(x_s) - x_s f(y_s) - y_s f(x_s) + y_s f(y_s)}{x_s - y_s} \leqslant 0$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} [f(x_s) - f(y_s)] \leqslant 0$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} f(x_s) \leqslant \sum_{s=1}^{k} f(y_s), s = 1, \cdots, n$$ □

定理 5.1.12 设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$，$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$，若

$$\prod_{s=1}^{k} x_s \leqslant \prod_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.19}$$

则
$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.20}$$

证 不妨设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_r > 0, x_{r+1}=\cdots=x_n=0$,则

$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_r > 0, y_{r+1} \geqslant y_{r+2} \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0, r=1,\cdots,n,$

令
$$a_s=\ln x_s, b_s=\ln y_s, s=1,\cdots,r,$$

对式(5.1.19)两边取对数,得

$$\sum_{s=1}^{k} a_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} b_s, k=1,\cdots,r \quad ①$$

令 $f(t)=e^t$,则 $f(t)$是$(0,+\infty)$上的下凸递增函数,且

$$f(a_s)=x_s, f(b_s)=y_s, s=1,\cdots,r$$

于是由式①及定理 5.1.11 有

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,r \quad ②$$

又 $x_{r+1}=\cdots=x_n=0, y_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0,$ ③

从而由式②及式③,即得

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n.$$

故式(5.1.20)成立. □

定理 5.1.13 设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0, y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$,若

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n$$

则当 $p \geqslant 1$ 时有

$$\sum_{s=1}^{k} x_s^p \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s^p, k=1,\cdots,n \tag{5.1.21}$$

证 令 $f(t)=t^p, t\in[0,+\infty)$,则当 $p>1$ 时,有 $f'(t)=pt^{p-1}>0, f''(t)=p(p-1)t^{p-2}>0, t\in(0,\infty)$,故 $f(t)$是[0,

$+\infty)$上的下凸递增函数，从而由定理 5.1.11 即知式(5.1.21)成立．而当 $p=1$ 时，由条件即知式(5.1.21)成立． □

§5.2 几个数值不等式

本节将给出在讨论四元数矩阵不等式中要常用到的几个数值不等式．

一、贝努利(Bernoulli)不等式

定理 5.2.1 设 $x>-1$，则

1° 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x \tag{5.2.1}$$

2° 当 $0<\alpha<1$ 时，有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x \tag{5.2.2}$$

式(5.2.1)、(5.2.2)中等号当且仅当 $x=0$ 时成立．

证 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x(x>-1)$，则

1° 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，有

$$f'(x)=\alpha((1+x)^{\alpha-1}-1)\begin{cases}<0, & -1<x<0\\ =0, & x=0\\ >0, & x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$在$(-1,0]$上严格递减，而在$[0,+\infty)$上严格递增，故 $f(x)$在 $x=0$ 处取最小值 $f(0)=0$，从而 $f(x)\geqslant 0$，且等号仅在 $x=0$ 处成立，因此式(5.2.1)成立．

2° 可同理证之． □

二、杨格(Young)不等式

定理 5.2.2 设 $a_i, p_i>0(i=1,2)$，且 $p_1+p_2=1$，则

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\leqslant p_1a_1+p_2a_2 \tag{5.2.3}$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2$ 时成立.

证 在式(5.2.1)中令 $1+x=\frac{a_1}{a_2}$, $\alpha=p$,则有

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1}\leqslant 1+p_1\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)=(1-p_1)+p_1\frac{a_1}{a_2}=p_2+p_1\frac{a_1}{a_2}$$

上式两边同乘以 $a_2^{p_1+p_2}=a_2$,即得式(5.2.3). □

利用数学归纳法可将式(5.2.3)推广为如下的:

定理 5.2.3 设 $a_i, p_i>0(i=1,\cdots,n)$且 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{5.2.4}$$

其中等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时成立.

证 当 $n=2$ 时,由定理 5.2.3 知成立. 现设式(5.2.4)对 $n-1$ 成立,则对 n,由式(5.2.3)及归纳假设,有

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}&=a_i^{p_1}\left(\prod_{i=2}^{n} a_i^{p_i/(1-p_1)}\right)^{1-p_1}\\&\leqslant p_1a_1+(1-p_1)\prod_{i=2}^{n} a_i^{p_i/(1-p_1)}\\&\leqslant p_1a_1+(1-p_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{p_i}{1-p_1}a_i\\&=p_1a_1+\sum_{i=2}^{n} p_ia_i=\sum_{i=1}^{n} p_ia_i\end{aligned}$$

□

另外,我们指出,当诸 a_i 为非负时,式(5.2.4)亦成立. 因为当 a_i 中有一个为零时式(5.2.4)的左边$=0$,而右边$\geqslant 0$,故得如下

定理 5.2.4 设 $a_i\geqslant 0, p_i>0(i=1,\cdots n)$且 $p_1+\cdots+p_n=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n} p_ia_i \tag{5.2.5}$$

又当 $p_1+\cdots+p_n=p<1$ 时,有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\leqslant 1-p+\sum_{i=1}^{n} p_ia_i \tag{5.2.5$'$}$$

定理 5.2.5 设 $a_i \geqslant 0, p_i > 0(i=1,\cdots,n)$ 且 $p_1+\cdots+p_n=p$，则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leqslant \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^p \tag{5.2.6}$$

证 设 $p_i' = \frac{1}{p} p_i (i=1,\cdots,n)$，则 $p_i' > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i' = 1$，故由定理 5.2.4，有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i'} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i' a_i$$

即
$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

即
$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leqslant \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^p$$
□

定理 5.2.6 设 $a_{ij} \geqslant 0, p_j > 0, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$，则

1° 当 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \tag{5.2.7}$$

2° 当 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leqslant p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j/p} \tag{5.2.7'}$$

证 1° 由式(5.2.5)，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(a_{ij}^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}a_{ij}^{p_j} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\end{aligned}$$

$2°$ 由$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$有$\frac{p}{p_1}+\cdots+\frac{p}{p_m}=1$，于是由式(5.2.7)有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\frac{p}{p_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{p_j/p}=p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{p_j/p}\qquad\square$$

三、琴生(Jensen)不等式

定理5.2.7 设 $a_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$，$\beta>\alpha>0$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\qquad(5.2.8)$$

证 当诸 a_i 全为零时式(5.2.8)取等号成立．现设诸 a_i 中至少有一个大于零，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}=M_{\beta}>0,\text{因诸 }a_i\geqslant 0,\text{故 }0\leqslant\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n),$$

又 $\beta>\alpha>0$，故 $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$，于是由指数函数 $a^x(0<a<1)$的递减性，有

$$\left(\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\geqslant\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}=1$$

从而
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\geqslant M_{\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

于是式(5.2.8)成立． $\square$

推论 设 $a_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$，$r\in R^{+}$，则

$1°$ 当 $r\geqslant 1$ 时有$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r$； (5.2.9)

$2°$ 当 $0<r\leqslant 1$ 时有$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r$． (5.2.10)

下面我们给出琴生不等式(5.2.9)、(5.2.10)的一个加强，为此先给出如下

命题 5.2.1 设 $a>b>0$，$r\geqslant 2$，则

$$a^r-b^r\leqslant(a-b)(a+b)^{r-1} \tag{5.2.11}$$

证 显然 $r=2$ 时，式(5.2.11)取等号成立，下设 $r>2$，令

$$\psi(t)=t^r-(1-t)^r+1-2t,\ t\in(\frac{1}{2},1) \qquad ①$$

因为 $\psi''(t)=r(r-1)[t^{r-2}-(1-t)^{r-2}]>0,t\in(\frac{1}{2},1)$，又 $\psi(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，故 $\psi(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上为严格下凸函数，注意到 $\psi(\frac{1}{2})=\psi(1)=0$，因此

$$\psi(t)<0,t\in(\frac{1}{2},1) \qquad ②$$

因 $r>2$，对 $a>b>0$，取 $\beta=a$，$\alpha=a+b$，则 $\frac{1}{2}<\frac{\beta}{\alpha}<1$，于是在式①中令 $t=\frac{\beta}{\alpha}$，则由式②，有

$$\psi(\frac{\beta}{\alpha})=(\frac{\beta}{\alpha})^r-(\frac{\alpha-\beta}{\alpha})^r+1-2\frac{\beta}{\alpha}<0$$

即 $$\beta^r-(\alpha-\beta)^r=(2\beta-\alpha)\alpha^{r-1}$$

即 $$a^r-b^r=(a-b)(a+b)^{r-1}$$

故式(5.2.11)成立. □

定理 5.2.8(琴生不等式的加强) 设 $a_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，则

1° 当 $r\geqslant 2$ 时，有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^r\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{r}{n}} \tag{5.2.12}$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^r\geqslant[\sum_{i=1}^{n}a_i+(n^{\frac{1}{r}}-n)(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}}]^r \tag{5.2.13}$$

证　1° 先证当 $r=2$ 或 $n=1,2$ 时，不等式(5.2.12)成立.

当 $r=2$ 时，不妨设 $a_1\cdots a_n=1$. 由几何—算术平均值不等式(5.1.4)，有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2-\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2=2\sum_{i\neq j} a_{ij}$$

$$\geqslant 2C_n^2\cdot(\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1})^{1/C_n^2}=n^2-n$$

故 $n=2$ 时，式(5.2.12)为真，而当 $n=1$ 时，式(5.2.12)显然为真.

当 $n=2$ 时，设 $r>2,a_1>a_2$，令

$$\Psi(x)=[(x+a_2)^r-x^r-a_2^r]/(xa_2)^{r/2},x\in[a_1,a_2]$$

于是由命题 5.2.1 知，当 $x\in(a_1,a_2)$时，有

$$\Psi'(x)=\frac{r}{2}x^{-\frac{r}{2}-1}a_2^{-\frac{r}{2}}[(x-a_2)(x+a_2)^{r-1}-x^r+a_2^r]\leqslant 0$$

故 $\Psi(x)$在$[a_1,a_2]$上递减，而 $\Psi(a_2)=2^r-2$，因此

$$\Psi(a_1)\geqslant 2^r-2$$

由此即知当 $n=2$ 时，式(5.1.12)成立.

下面证明，当 $r>2,n>2$ 时，式(5.1.12)亦成立. 不妨设 $a_1\cdot\cdots\cdot a_n=1$，这样证式(5.2.12)即相当于证

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\geqslant n^r-n$$

这等价于证明：在条件

$$a_1\cdot\cdots\cdot a_n=1$$

下，函数 $f(a_1\cdots a_n)=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r$ 的最小值

$$\min f=n^r-n$$

作辅助函数

$$F(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r+\lambda(\prod_{i=1}^{n} a_i-1)$$

令 $$\frac{\partial F}{\partial a_j}=r(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}-ra_j^{r-1}+\frac{\lambda}{a_j}=0(j=1,\cdots,n)$$
将上式整理,得
$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}(a_j-a_k)=a_j^r-a_k^r$$
其中,$j\neq k$;$j,k=1,\cdots,n$.若有某对 j,k,$a_j\neq a_k$(不妨设 $a_j>a_k$),则由命题 5.2.1,有
$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}=\frac{a_j^r-a_k^r}{a_j-a_k}\leqslant(a_j+a_k)^{r-1}$$
这是矛盾,故有
$$a_1=a_2=\cdots=a_n=1 \qquad ①$$
不难算出辅助函数 $F(a_1,\cdots,a_n,\lambda)$在式①和 $\lambda=r(1-n^{r-1})$处的二阶全微分
$$\mathrm{d}^2F=r(n^r-n)(\mathrm{d}a_1^2+\cdots+\mathrm{d}a_n^2)>0$$
据此知,式①是函数 $f(a_1,\cdots,a_n)$的唯一的极小值点.

最后考察 $a_1\cdots a_n=1$ 的边界情况.注意在 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有一个,如 $a_1\to+\infty$时,则 $f(a_1,\cdots,a_n)\to+\infty$.事实上,对于 $\alpha=r-1\geqslant1$,由琴生不等式(5.2.9),有
$$\begin{aligned}f(a_1,\cdots,a_n)&=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&=(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{\alpha}-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&\geqslant(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha})-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&=\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}(a_1+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)\\&>a_1^{\alpha}(a_2+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

$$\geqslant a_1^q(n-1)(a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$>(n-1)a_1^{q-\frac{1}{n-1}}\to+\infty(当\ a_1\to+\infty)$$

据以上事实,知函数 $f(a_1,\cdots,a_n)$在 $a_1=\cdots=a_n=1$ 处取最小值,这最小值为 n^r-n,且式(5.2.12)取等号,当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=1$,故式(5.2.12)成立.

2° 令 $p=\frac{1}{r}$,则由 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 有 $p\geqslant2$,于是由式(5.2.12),有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{p}}\right)^p\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i+(n^p-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{n}}$$

将上式两边同时取$\frac{1}{p}$次方,得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}a_i+(n^p-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{n}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^r\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}a_i+(n^{\frac{1}{r}}-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^r$$

故式(5.2.13)成立. □

四、赫尔德(Hölder)不等式

定理 5.2.9 设 $a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,n,k>0,k\neq1$ 且 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$,

1° 当 $k>1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\tag{5.2.14}$$

2° 当 $k<1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\tag{5.2.15}$$

上两式中等号当且仅当$\frac{a_1^k}{b_1^{k'}}=\frac{a_2^k}{b_2^{k'}}=\cdots=\frac{a_n^k}{b_n^{k'}}$时成立.

证 考虑函数 $f(x)=x^k(x>0,k>1)$,因为 $f''(x)=k(k-1)x^{k-2}$,故当 $x>0,k>1$ 时,函数 $f(x)=x^k$ 在$[0,+\infty)$内为下凸函数,则由凸函数的琴生(Jensen)不等式(5.1.3),有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^k \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad ①$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k$$

在上式中令 $p_i=b_i^{\frac{k}{k-1}}$, $x_i=a_i/b_i^{\frac{1}{k-1}}(i=1,\cdots,n)$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)$$

上式两边开 k 方并由$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$,即得式(5.1.14).

由于当 $0<k<1$ 时,$f(x)=x^k$ 为$(0,+\infty)$内的上凸函数,故这时不等式①中的不等式号反向,由此便得式(5.1.15).

由于式①从而式(5.2.14),(5.2.15)的等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$,即

$$x_1^k=x_2^k=\cdots=x_n^k$$

即
$$\frac{a_1^k}{b_1^{k'}}=\frac{a_2^k}{a_2^{k'}}=\cdots=\frac{a_n^k}{a_n^{k'}}$$

时成立. □

不等式(5.2.14)与(5.2.15)称为**赫尔德**(Hölder)不等式.其中不等式(5.2.14)可推广为

定理 5.2.10 设 $a_{ij},\alpha_j\in R$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2\cdots,m$,则当 $a_{ij}\geqslant0$, $\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j} \tag{5.2.16}$$

证 先设 $a_{ij}>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$. 令 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=A_j(1\leqslant j\leqslant m)$,则式(5.2.16)等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{ij}}{A_j}\right)^{\alpha_j}\leqslant 1 \quad ①$$

利用推广的几何—算术平均不等式(5.1.4),得

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{ij}}{A_j}\right)^{\alpha_j}\leqslant\left(\frac{\alpha_1\dfrac{a_{i1}}{A_1}+\cdots+\alpha_m\dfrac{a_{im}}{A_m}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}\right)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j a_{ij}}{A_j}$$

令 $i=1,2,\cdots,n$,将所得的 n 个不等式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{ij}}{A_j}\right)^{\alpha_j}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j a_{ij}}{A_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{A_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=1$$

故式①成立,从而式(5.2.16)成立.

当 a_{ij}中有为零时,比如 $a_{nm}=0$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m}=\sum_{i=1}^{n-1}a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m}$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}$$

故当 $a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m),\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时,式(5.2.16)成立. □

我们再把不等式(5.2.10)推广为

定理 5.2.11 设 $a_{ij},\alpha_j\in n,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m$,则

1° 当$a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\tag{5.2.17}$$

2° 当$a_{ij}\geqslant0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\leqslant1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\tag{5.2.18}$$

3° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$ 且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\leqslant1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\tag{5.2.19}$$

4° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$ 且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\geqslant1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\tag{5.2.20}$$

5° 当$a_{ij}>0,\alpha_j<0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\tag{5.2.21}$$

证 1° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r=1$ 时，由定理 5.2.10 即知式(5.2.17)成立，当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r>1$ 时，则

$$\frac{\alpha_1}{r}+\frac{\alpha_2}{r}+\cdots+\frac{\alpha_m}{r}=1$$

于是由定理 5.2.10，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(a_{ij}^{r})^{\alpha_j/r}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{r}\right)^{\alpha_j/r}\qquad①$$

因为 $r>1$，则由 Jensen 不等式(5.2.9)，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{r}\right)^{1/r} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad ②$$

于是由式①,②,即得

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} (a_{ij}^{r})^{\alpha_j/r} \leqslant \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{\alpha_j}$$

故式(5.2.17)成立.

2° 当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r<1$时,则$(1-r)+\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$,其中$1-r>0,\alpha_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$,故由定理 5.2.10,有

$$\sum_{i=1}^{n} 1^{1-r} a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{\alpha_m}$$

由此即得式(5.2.18).

3° 令$\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_1},\beta_j=\dfrac{-\alpha_j}{\alpha_1}(2\leqslant j\leqslant m)$,则$\beta_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$,且$\beta_1+\cdots+\beta_m\geqslant 1$,于是由 1°,有

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m})^{\beta_1} a_{i2}^{\beta_2}\cdots a_{im}^{\beta_m}$$

即 $$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m})^{\frac{1}{\alpha_1}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}}$$

由此即可推得式(5.2.19).

4° 仿 3°的证明,并利用 2°即可证得式(5.2.20).

5° 由$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 则$(1-r)+\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$,其中$1-r>0,\alpha_j<0(1\leqslant j\leqslant m)$,故由 3°,有

$$\sum_{i=1}^{n} 1^{1-r} a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{\alpha_m}$$

由此即得式(5.2.21). □

在定理 5.2.11 中,把 $a_{ij}^{\alpha_j}$换成a_{ij},再把$\dfrac{1}{\alpha_j}$换成α_j,则得

推论 1 设 $a_{ij},\alpha_j\in R, i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,m$,则

1° 当 $a_{ij}\geqslant 0, \alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$，且 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j} \qquad (5.2.17)'$$

2° 当 $a_{ij}\geqslant 0, \alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$，且 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j} \qquad (5.2.18)'$$

3° 当 $a_{ij}>0, \alpha_1>0, \alpha_2, \cdots, \alpha_m<0$，且 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j} \qquad (5.2.19)'$$

4° 当 $a_{ij}>0, \alpha_1>0, \alpha_2, \cdots, \alpha_m<0$，且 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j} \qquad (5.2.20)'$$

5° 当 $a_{ij}>0, \alpha_j<0, (1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$，且 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j} \qquad (5.2.21)'$$

在推论 1 中，令 $m=2$ 时，有如下：

推论 2 设 $a_i, b_i\in R, i=1,\cdots,n, p, q\in R$，则

1° 当 $a_i, b_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n, p>0, q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.22)$$

2° 当$a_i,b_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n,p>0,q>0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.23)$$

3° 当$a_i,b_i>0,i=1,\cdots,n,pq<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.24)$$

4° 当$a_i,b_i>0,i=1,\cdots,n,pq<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\geqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.25)$$

5° 当$a_i,b_i>0,i=1,\cdots,n,p<0,q<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.26)$$

在推论 2 之 1° 中,令 $p=q=2$,则得如下**柯西—施瓦兹**(Cauchy-Schwarz)不等式:

推论 3 设 $a_i,b_i\geqslant 0,i=1\cdots n$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad (5.2.27)$$

在定理 5.2.11 中,令 $m=1$,可得

推论 4 设 $a_i\in R,i=1,\cdots,n,\alpha\in R$,则

1° 当$a_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n,\alpha\geqslant 1$时,有

$$n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \qquad (5.2.28)$$

2° 当$a_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n,0<\alpha\leqslant 1$时,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \leqslant n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \qquad (5.2.29)$$

3° 当 $a_i>0, i=1,\cdots,n, \alpha\leqslant 0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \geqslant n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \tag{5.2.30}$$

证 在定理 5.2.11 的 $1^\circ, 2^\circ, 5^\circ$ 中分别令 $m=1$，即知式(5.2.28)与(5.2.29)的右边不等式及式(5.2.30)成立. 为证式(5.2.28)与(5.2.29)的左边不等式，只须在已证的右边不等式中令代换 $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ 即可证得. □

注 式(5.2.28)的右端不等式与式(5.2.29)的左端不等式也就是琴生不等式(5.2.9)与(5.2.10).

在定理 5.2.11 中令 $n=2$，并取 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$，则可得

推论 5 设 $a_j, b_j\geqslant 0, 1\leqslant j\leqslant m, \alpha>0$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\dfrac{1}{m}$ 时，有

$$\left[\prod_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\right]^\alpha \geqslant \left(\prod_{j=1}^{m} a_i\right)^\alpha + \left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^\alpha \tag{5.2.28$'$}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{m}$ 时，有

$$\left[\prod_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\right]^\alpha \geqslant 2^{m\alpha-1}\left[\left(\prod_{j=1}^{m} a_i\right)^\alpha + \left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^\alpha\right] \tag{5.2.29$'$}$$

赫尔德(Hörder)不等式亦可推广为：

定理 5.2.12 设 $a_{ij}\geqslant 0, \alpha_j>0, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m$，则

1° 当 $\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_m}\geqslant\dfrac{1}{r}$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \tag{5.2.31}$$

2° 当 $\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_m}=\dfrac{1}{\alpha}\leqslant\dfrac{1}{r}$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \tag{5.2.32}$$

证 1° 由 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant\frac{1}{r}$ 有 $\frac{r}{\alpha_1}+\cdots+\frac{r}{\alpha_m}\geqslant 1$，则在式(5.2.17)′中把 a_{ij} 换成 a_{ij}^r，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^r\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m}(a_i^r)^{\alpha_j/r}\right]^{r/\alpha_j}$$

由此即知式(5.2.31)成立.

2° 由(5.2.18)′同理可证. □

注 在式(5.2.31)中令 $r=1$，即得式(5.2.17)′，在式(5.2.32)中令 $r=1$，即得式(5.2.18)′.故，前者是后者的推广.

定理 5.2.13 设 $a_{srt}\geqslant 0,\alpha_t>0,1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant t\leqslant p,\alpha_1+\cdots+\alpha_p=\alpha$，则

1° 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_t}\leqslant\prod_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{srt}\right)^{\alpha_t}\tag{5.2.33}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_t}\leqslant(mk)^{1-\alpha}\prod_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{srt}\right)^{\alpha_t}\tag{5.2.34}$$

定理 5.2.14 设 $a_{srt}\geqslant 0,\alpha_{rt}>0,1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant t\leqslant p$，且 $\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\alpha_{rt}=\alpha$，则

1° 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_{rt}}\leqslant\prod_{t=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}a_{srt}\right)^{\alpha_{rt}}\tag{5.2.35}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_{rt}}\leqslant m^{1-\alpha}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}a_{srt}\right)^{\alpha_{rt}}\tag{5.2.36}$$

定理 5.2.13 与定理 5.2.14 可由定理 5.2.11 容易推得.

五、闵可夫斯基(Minkowski)不等式

定理 5.2.15 设 $a_{ij}>0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,p\in R$,则

1° 当 $p\geqslant 1$ 时,有

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(5.2.37)$$

2° 当 $0\neq p\leqslant 1$ 时,有

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(5.2.38)$$

证 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}=&\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\\&+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}+\cdots\\&+\sum_{i=1}^{m}a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\qquad①\end{aligned}$$

而由 Hölder 不等式(5.2.14),有

$$\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

......

$$\sum_{i=1}^{m}a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_{in}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

(其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$)将上 n 个不等式相加,并由式①,则得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

上式两边同除以 $\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$,并注意到 $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$,即得式(5.2.37).

类似地可证式(5.2.38). □

六、康托洛维奇(Kantorovic)不等式

定理 5.2.16 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1$,又 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\tag{5.2.39}$$

证 对于二次函数 $f(x)=Ax^2-2Bx+C(A>0)$,若有 $f(x_0)\leqslant 0$,则函数所对应的抛物线与 x 轴必有交点,也就是 $B^2-AC\geqslant 0$,现考虑二次函数

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)x^2-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\sqrt{\alpha_1\lambda_n}}x+\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i$$

取 $x_0=\sqrt{\lambda_1\lambda_n}$,代入 $f(x)$,经计算可得

$$f(x_0)=\sum_{i=2}^{n-1}a_i\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)}{\lambda_i}$$

又因为 $a_i>0,\lambda_i>0$,及 $\lambda_i\geqslant\lambda_1,\lambda_i\leqslant\lambda_n,i=1,2,\cdots,n$,所以

$$a_i\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)}{\lambda_i}\leqslant 0(i=1,\cdots,n)$$

于是 $f(x_0)\leqslant 0$,从而式(5.2.39)成立. □

定理 5.2.17 设$0<m_1\leqslant a_i\leqslant M_1,0<m_2\leqslant b_i\leqslant M_2,i=1,\cdots,n,\alpha>0$,则

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\alpha}\right)\\&\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{M_1M_2}{m_1m_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}+\left(\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}\right]^2\left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2\end{aligned}\tag{5.2.40}$$

证 因为

$$\left(\frac{a_1^{\frac{\alpha}{2}}}{b_1^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_1^{\frac{\alpha}{2}}}{a_1^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_2^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{a_n^{\frac{\alpha}{2}}}{b_n^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_n^{\frac{\alpha}{2}}}{a_n^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_2^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

上 n 个不等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{\frac{\alpha}{2}}}{b_i^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_i^{\frac{\alpha}{2}}}{a_i^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

由此即可导出式(5.2.40). □

注 不等式(5.2.40)称为 **Po´lya-Szeqo 不等式**.

七、切比雷夫(Чебыщев)不等式

定理 5.2.18 设 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n$, $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \tag{5.2.41}$$

证 因为

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_{ij})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$$

由此即知式(5.2.41)成立. □

定理 5.2.19 设 $a_{ij}\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$，且 $a_{1j}\geqslant a_{2j}\geqslant\cdots\geqslant a_{nj}(1\leqslant j\leqslant m)$，则

$$\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\leqslant n^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \tag{5.2.42}$$

证 对 m 采用归纳法.

当 $m=2$ 时, 由定理 5.2.18, 即知结论成立. 现假设式(5.2.42)对 $m-1$ 成立,则对 m,有

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} &= \left(\prod_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\right)\\
&\leqslant n^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m-1}a_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\right)\\
&\leqslant n^{m-2}\cdot n\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m-1}a_{ij}\right)a_{im}\\
&= n^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}a_{ij}
\end{aligned}$$

这就用数学归纳法证明了不等式(5.2.42)成立. □

注 不等式(5.2.42)是切比雷夫不等式(5.2.41)的推广.

八、幂平均不等式

命题 5.2.2 设 $a_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n, f(x)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}$, 则

1° $f(x)$是$(0,+\infty)$上的递增函数;

2° $$\lim_{x\to+0}f(x)=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}};\tag{5.2.43}$$

3° $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}.\tag{5.2.44}$$

证 1° 首先考察函数$g(t)=t\ln t, t\in(0,+\infty)$. 由 $\lim\limits_{t\to+0}g(t)=0$,故补充定义 $g(0)=0$,则 $g(t)$在$[0,+\infty)$上连续. 因$g''(t)=\frac{1}{t}>0(t\in(0,+\infty))$,故 $g(t)$是$[0,+\infty)$上的下凸函数,由凸函数的琴生不等式(5.1.3)可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}t_i\ln t_i \qquad ①$$

容易算得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^x\ln a_i^x-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)\right] \qquad ②$$

在式①中令 $t_i=a_i^x$，则由式①、②即知有 $f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增.

2° 当a_i 全为零时，式(5.2.43)显然成立，故不妨设 a_i 不全为零，因为

$$\lim_{x\to+0}\ln f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x-\ln n}{x} \qquad ③$$

当 a_i 有 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$个为零时，$\lim\limits_{x\to+0}(\ln\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x-\ln n)$为一负数，从而有 $\lim\limits_{x\to+0}\ln f(x)=-\infty$，于是 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0=(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}}$，即式(5.2.43)成立；当 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$时，由式③及洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\ln f(x)&=\lim_{x\to+0}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\ln a_i\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

3° 当诸a_i 全为零时，式(5.2.44)显然成立，当诸 a_i 不全为零时，不妨设$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}=a_1$，且诸 a_i 中有$k(1\leqslant k\leqslant n)$个等于 a_1，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln n}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln a_1 \left[1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln a_1 + \lim_{x\to+\infty} \ln \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln a_1 + \ln k^0 = \ln a_1$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$. □

由命题 5.2.2 可得如下幂平均不等式.

定理 5.2.20 设 $a_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n, k \in N$,则

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\sqrt[k]{a_1} + \cdots + \sqrt[k]{a_n}}{n}\right)^k$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leqslant \cdots \leqslant \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}} \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\} \tag{5.2.45}$$

九、微微对偶不等式

定义 5.2.1 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times m}$,若诸 $a_{ij} \geqslant 0$,且每行元素都是升序的:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant a_{11} \leqslant \cdots \leqslant a_{1m} \\ &0 \leqslant a_{21} \leqslant \cdots \leqslant a_{2m} \\ &\cdots\cdots \\ &0 \leqslant a_{n1} \leqslant \cdots \leqslant a_{nm} \end{aligned} \tag{5.2.46}$$

则称矩阵 A 为**同序矩阵**.若矩阵 A'的元素全由 A 的元素组成,且元素所在的行数不变,只是大小顺序不一定都是升序的,即式(5.2.46)不全成立,则称 A'为 A 的**乱序矩阵**;若 A 经过交换列的初等变换可化为同序矩阵,则称 A 为**可同序矩阵**;若 $A \in R^{2\times n}$,

且 A 的第一行元素是升(降)序的，而第二行元素是降(升)序的，则称 A 为**全反序矩阵**；若 $A\in R^{2\times n}$，且 A 可通过列交换的初等变换可化为全反序矩阵，则称 A 为**可全反序矩阵**.

定义 5.2.2 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times m}$，记

$$S(A)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}$$

$$T(A)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$$

则分别称 $S(A)$ 与 $T(A)$ 为矩阵 A 的**列积和**与**列和积**.

微微对偶不等式是指如下定理，它首先由张运畴教授于 1980 年提出.

定理 5.2.21 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times m}$ 是同序矩阵，$a_{ij}\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$. $A'=(a_{ij}')$ 是 A 的乱序矩阵，则

$$S(A')\leqslant S(A) \tag{5.2.47}$$

$$T(A')\geqslant T(A) \tag{5.2.48}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}'\leqslant\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij} \tag*{(5.2.47)$'$}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}'\geqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij} \tag*{(5.2.48)$'$}$$

证 1° 若乱序矩阵 A' 是 A 的可同序矩阵，则显然式(5.2.47)与(5.4.48)取等号成立.

2° 若 A' 不是 A 的可同序矩阵，则可不妨设 A' 中存在两列 i,j $(i<j)$ 和 $t(1\leqslant t\leqslant m)$，使得

$$a_{ki}'>a_{kj}',k=1,\cdots,t \tag*{①}$$

$$a_{ki}'\leqslant a_{kj}',k=t,t+1,\cdots,n \tag*{②}$$

则 A' 可经过改造把 A' 变化为 $A''=(a_{ij}'')$，满足

$$a_{ki}''=a_{kj}'<a_{ki}'=a_{kj}'',k=1,\cdots,t \tag*{③}$$

其余 $$a''_{st}=a'_{st} \tag{④}$$

现在令

$$a=a''_{1j}a''_{2j}\cdots a''_{tj},\quad b=a''_{1i}a''_{2i}\cdots a''_{ti}$$

$$c=a''_{t+1,i}a''_{t+3,i}\cdots a''_{mi},\quad d=a'_{t+1,j}a''_{t+2,j}\cdots a''_{nj}$$

则由式①,②,③,④,知有

$$a>b,c\leqslant d.$$

从而

$$S(A'')-S(A')=(ad+bc)-(ac+bd)$$
$$=(a-b)(d-c)\geqslant 0$$

即 $$S(A)\leqslant S(A'')$$

再令

$$x=a'_{1j}+a'_{2j}+\cdots+a'_{tj},y=a'_{1i}+a'_{2i}\cdots a''_{ti}$$

$$z=a'_{t+1,i}+a'_{t+2,i}+\cdots+a'_{ni},w=a'_{t+1,j}+a'_{t+2,j}+\cdots+a'_{nj}$$

则由式①,②,③,④,知有

$$x>y,z\leqslant w.$$

从而

$$T(A'')-T(A')$$
$$=[(x+w)(y+z)-(x+z)(y+w)]\prod_{\substack{r=1\\ i\neq r\neq j}}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a'_{kr}\right)$$
$$=(x+y)(z-w)\prod_{\substack{r=1\\ i\neq r\neq j}}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a'_{kr}\right)\leqslant 0$$

故 $T(A')\geqslant T(A'')$.

如果 A'' 仍是乱序矩阵,可继续按上述方法改造 A'',…,经过有限次(p 次),必可把 A' 改造到同序矩阵 A,得

$$S(A')\leqslant S(A'')\leqslant\cdots\leqslant S(A^{(p)})=S(A)$$
$$T(A')\geqslant T(A'')\geqslant\cdots\geqslant T(A^{(p)})=T(A)$$

综合 1°,2° 即知命题成立. □

§5.3 四元数矩阵特征值的不等式

本节主要讨论四元数矩阵特征值的不等式,且主要是自共轭四元数矩阵的特征值的不等式,为此,我们先引入有关概念及性质.

由定理4.1.14知,若 $A\in SC_n(Q)$, $A\geqslant 0$,则必存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$A=U^{*}\operatorname{diag}(\lambda_1(A)\cdots,\lambda_n(A))U \tag{5.3.1}$$

其中 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ 是 A 的 n 个特征值.分解式(5.3.1)称为 A 的谱分解式

定义 5.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$, $A\geqslant 0$, $\alpha\in R^{+}$(或 $A>0$, $\alpha\in R$), A 的谱分解式为式(5.3.1),则称矩阵 $U^{*}\operatorname{diag}(\lambda_1{}^{\alpha},\cdots,\lambda_n{}^{\alpha})U$ 为矩阵 A 的 α 次方,记为 A^{α},即有

$$A^{\alpha}=U^{*}\operatorname{diag}(\lambda_1^{\alpha}(A),\cdots,\lambda_n^{\alpha}(A))U \tag{5.3.2}$$

为了说明定义5.1.1的合理性,我们还需证明,对 $A\in SC_n(Q)$, $A\geqslant 0$, $\alpha\in R^{+}$(或 $A>0$, $\alpha\in R$),上述定义的 α 次方 A^{α} 是唯一确定的.

为简单计,我们把 $\lambda_s(A)$ 简记为 $\lambda_s(s=1,\cdots,n)$,现假设还存在 $U_1\in U^{n\times n}$,也使得

$$A=U_1{}^{*}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U_1$$

则由上式与式(5.3.1),并注意到 $U^{*}=U^{-1}$,则有

$$U_1{}^{*}\operatorname{diag}(\lambda,\cdots,\lambda_n)U_1=U^{*}\operatorname{diag}(\lambda,\cdots,\lambda_n)U$$

即 $$\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U_1U^{-1}=U_1U^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

令 $U_1U^{-1}=P=(p_{ij})$,比较上式两端,得

$$p_{ij}\lambda_i=p_{ij}\lambda_j,\ p_{ij}\in Q,\ i,j=1,\cdots,n$$

当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时,由上式有 $p_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=0$,故 $p_{ij}=0$,从而 $p_{ij}\lambda_i{}^{\alpha}$

$= p_{ij}\lambda_j^{\alpha}$，当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时，显然有 $p_{ij}\lambda_i^{\alpha} = p_{ij}\lambda_i^{\alpha}$，因此有

$$\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})U_1U^{-1} = U_1U^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})$$

从而有

$$U_1^*\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})U_1 = U^*\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})U$$

这就证明了上述定义与 U 的选择无关，并且是具有确定意义的，而且不难验证，对 $A\in SC_n(Q)$，当 $A\geqslant 0$，$\alpha = n$（n 为正整数）时，上述定义的 $A^{\alpha} = A^n$ 就是通常意义下的半正定矩阵 A 的 n 次方；当 $\alpha = \dfrac{1}{n}$ 时，$A^{\alpha} = A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$ 就是通常意义下的半正定矩阵 A 的 n 次方根；当 $A>0$，$\alpha = -1$ 时，上述定义的 $A^{\alpha} = A^{-1}$ 就是正定矩阵 A 的逆矩阵.

由定义 5.3.1 可得如下

命题 5.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$

1° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$，则 $A^{\alpha}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$；

2° 若 $A>0$，$\alpha\in R$，则 $A^{\alpha}\in SC_n^{>}(Q)$，特别有

$$A^{-1}\in SC_n^{>}(Q);$$

3° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$，且 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots,\geqslant\lambda_n(A)\geqslant 0$ 时，则

$$\lambda_s(A^{\alpha}) = \lambda_s^{\alpha}(A),\ s = 1,\cdots,h;$$

4° 若 $A>0$，$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$，则当 $\alpha\geqslant 0$ 时，有

$$\lambda_s(A^{\alpha}) = \lambda_s^{\alpha}(A),\ s = 1,\cdots,n;$$

5° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha,\beta\in R^+$，（或 $A>0$，$\alpha,\beta\in R$），则

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta},\ A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\alpha+\beta};$$

6° 若 $A\geqslant 0$，$f(x)$ 是实系数多项式，则 $f(A)\in SC_n(Q)$，且

$$\lambda_s(f(A)) = f(\lambda_s),\ s = 1,\cdots,n.$$

定义 5.3.2 设 $A\in SC_n(Q)$，记

$$\varphi_A(\alpha) = \frac{\alpha^*A\alpha}{\alpha^*\alpha},\ 0\neq\alpha\in Q^{n\times 1} \tag{5.3.3}$$

它是 $Q^n \setminus \{0\}$ 到 R 的映射，叫做 A 的 **Rayleigh 商**.

定理 5.3.1 设 $A \in SC_n(Q)$，$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是 A 的特征值，则

$$\lambda_n \leqslant \varphi_A(\alpha) \leqslant \lambda_1, \forall 0 \neq \alpha \in Q^{n\times 1} \tag{5.3.4}$$

$$\lambda_1 = \max_{\alpha\neq 0} \varphi_A(\alpha), \quad \lambda_n = \min_{\alpha\neq 0} \varphi_A(\alpha) \tag{5.3.5}$$

证 由 $A \in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$U^* AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

设 $U = (u_1, \cdots, u_n)$，则由 U 可逆知，U 的 n 个列向量 $u_1, \cdots, u_n$ 右线性无关，于是对于 $0 \neq x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n\times 1}$，有 $\alpha = ux \neq 0$，注意到诸 $\lambda_t \in R$，则有

$$\alpha^* A\alpha = x^* \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) x = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t \bar{x}_t xt$$

又

$$\alpha^* \alpha = x^* x = \sum_{t=1}^{n} \bar{x}_t x_t > 0$$

故有

$$\varphi_A(\alpha) = \frac{A^* A\alpha}{A^* \alpha} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \bar{x}_t x_t}{\sum_{t=1}^{n} \bar{x}_t x_t}$$

注意到 $\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$，故由上式有

$$\lambda_n \leqslant \varphi_A(\alpha) \leqslant \lambda_1$$

又如取 $\alpha = u_1$，则 $\varphi_A(u_n) = \lambda_n$，故 $\quad \lambda_1 = \min_{\alpha\neq 0} \varphi_A(\alpha)$.

同理取 $\alpha = u_n$，则 $\varphi_A(u_n) = \lambda_n$，故 $\quad \lambda_n = \min_{\alpha\neq 0} \varphi_A(\alpha)$ □

定理 5.3.2 设 $A \in SC_n(Q)$，$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 为 A 的特征值，若 $\bar{S} = \{S \mid S$ 是 Q^n 的子空间，$\dim S = t\}$，$\tilde{T} = \{T \mid T$ 是 Q^n 的子空间，$\dim T = n - t + 1\}$，$1 \leqslant t \leqslant n$，则

$$\lambda_t = \max_{S\in \bar{S}} \{\min_{0\neq\alpha\in S} \varphi_A(\alpha)\}, t = 1, \cdots, n \tag{5.3.6}$$

且 $$\lambda_t=\min_{T\in\tilde{T}}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\},t=1,\cdots,n \tag{5.3.7}$$

证 因 $A\in SC_n(Q)$，则存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

令 $U=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),U_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{t-1}),U_2=(\alpha_t,\cdots,\alpha_n)$，则 $Q^n=R_r(U_1)\oplus R_r(U_2)$，($R_r(U_1)$表示由 U_1 的列向量所生成的子空间)，设 S 是 Q^n 的任意 t 维子空间，则 $\dim S>\dim R_r(U_1)$，从而由文献[1]284 页定理 6 知 $\dim(S\cap R_r(U_2))\geqslant 1$，因此，有$0\neq\alpha_0\in S\cap R_r(U_2)$，且可设 $\alpha_0=U_1B$，其中 $0\neq\beta^{\mathrm{T}}=(b_t,\cdots,b_n)$，$b_m\in Q$，$t\leqslant m\leqslant n$．再注意到诸 $\lambda_m\in R$，并注意到它们的大小顺序，则有

$$\varphi_A(\alpha_0)=\frac{\sum_{m=t}^{n}\lambda_m\bar{b}_m b_m}{\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}\leqslant\frac{\lambda_t\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}{\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}=\lambda_t$$

故$\min\limits_{0\neq\alpha\in S}\varphi_A(\alpha)\leqslant\lambda_t$，其中 $S\in\tilde{S}$，即 S 是Q^n 中的任意 t 维子空间，又取 Q^n 的 t 维子空间 $S_0=<\alpha_1,\cdots,\alpha_t>$，则 $\varphi_A(\alpha_t)=\lambda_t$，且对于任意 $\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)\delta\in S_0$，其中 $0\neq\delta\in Q^t$，如前推导有，$\varphi_A(\gamma)\geqslant\lambda_t$，故 $\lambda_t=\min\limits_{0\neq\alpha\in S_0}\varphi_A(\alpha)$，所以 $\lambda_t=\max\limits_{S\in\tilde{S}}\{\min\limits_{0\neq\alpha\in S}\varphi_A(\alpha)\}$．

最后设 $B=-A$，B 的特征值为 $\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$，则易见 $\lambda_t=-\mu_{n+t+1}$，于是由上面结果，得

$$\begin{aligned}\lambda_t&=-\mu_{n-t+1}=-\max_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_B(\alpha)\}\\&\leqslant-\max_{T\in\tilde{T}}\{\min_{0\neq\alpha\in T}(-\varphi_A(\alpha))\}\\&=-\max_{T\in\tilde{T}}\{-\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\}\\&=\min_{T\in\tilde{T}}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\}\end{aligned}$$ □

定理 5.3.3 设 $M\in SC_n(Q)$，A 是M 的任一 $m(\leqslant n)$阶主

子阵,它们的特征值分别为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $u_1 \geqslant \cdots \geqslant u_m$,则

$$\lambda_t \geqslant u_t \geqslant \lambda_{t+(n-m)}, t=1,\cdots,m \tag{5.3.8}$$

特别地,当 $m=n-1$ 时,它们交错排列为

$$\lambda_1 \geqslant u_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant u_{n-1} \geqslant \lambda_n \tag{5.3.9}$$

证 首先,显然有置换矩阵 P,使 A 位于 $P^* MP$ 的左上角,而 $P^* MP$ 与 M 有相同的特征值(因为置换矩阵 $P \in U^{n\times n}$,而由定理 4.3.9 知两相似变换不改变自共轭的特征值),故可不妨设

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

命

$$W=\left\{\begin{pmatrix}\beta \\ 0\end{pmatrix} \middle| \beta \in Q^m\right\} \subseteq Q^n$$

因为

$$\varphi_m\left(\begin{pmatrix}\beta \\ 0\end{pmatrix}\right)=\frac{(\beta^*,0)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta \\ 0\end{pmatrix}}{(\beta^*,0)\begin{pmatrix}\beta \\ 0\end{pmatrix}}=\frac{\beta^* AB}{\beta^*\beta}$$

$$=\varphi_A(\beta), \forall\, 0 \neq \beta \in Q^m$$

记 $\tilde{S}=\{S \subseteq Q^n \mid \dim S=t\}$, $\tilde{S}_0=\{T \subseteq Q^m \mid \dim T=t\}$

则由定理 5.3.2,即得

$$\begin{aligned}\lambda_t &= \max_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_m(\alpha)\} \\ &\geqslant \max_{T\in\tilde{S}_0}\{\min_{0\neq\beta\in T}\varphi_A(\beta)\}=u_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{t+(n-m)} &= \min_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_m(\alpha)\} \\ &\leqslant \min_{T\in\tilde{S}_0}\{\max_{0\neq\beta\in T}\varphi_A(\beta)\}=u_t\end{aligned}$$

□

不等式(5.3.8)、(5.3.9)称为自共轭矩阵特征值的**交错公式**或 **Poincare 特征值分离定理**.

定理 5.3.4 设 $A=(a_{ij}) \in SC_n(Q)$的特征值 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$,

则

$$\lambda_1 \geqslant a_{ss} \geqslant \lambda_n, s=1,\cdots,n \tag{5.3.10}$$

证 因为 a_{ss} 是 A 的一阶主子阵,故在式(5.3.8)中令 $m=1$,即得式(5.3.10). □

关于自共轭矩阵之和的特征值,我们有如下不等式:

定理 5.3.5 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

$$\begin{aligned}\lambda_t(A)+\lambda_n(B)&\leqslant\lambda_t(A+B)\\&\leqslant\lambda_t(A)+\lambda_1(B), t=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

证 对任意 $0\neq\alpha\in Q^n$,有

$$\varphi_A(\alpha)+\min_{\alpha\neq0}\varphi_B(\alpha)\leqslant\varphi_{A+B}(\alpha)\leqslant\varphi_A(\alpha)+\max_{\alpha\neq0}\varphi_B(\alpha)$$

于是由式(5.3.5),有

$$\varphi_A(x)+\lambda_n(B)\leqslant\varphi_{A+B}(\alpha)\leqslant\varphi_A(\alpha)+\lambda_1(B)$$

从而有

$$\begin{aligned}&\min_{T\in T}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\}+\lambda_n(\beta)\\\leqslant&\min_{T\in T}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_{A+B}(\alpha)\}\\\leqslant&\min_{T\in T}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)]+\lambda_1(B)\end{aligned}$$

因此由定理 5.3.2,即式(5.3.6)即知式(5.3.11)成立. □

定理 5.3.6 设 $A\in SC_n(Q)$, $U_k\in U^{n\times k}$(即 $U_k^*U_k=I_k$), $k\leqslant n$, $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$, $\lambda_1(U_k^*AU_k)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k(U_k^*AU_k)$,则

$$\lambda_t(A)\geqslant\lambda_t(U_k^*AU_k)\geqslant\lambda_{n-k+t}(A), 1\leqslant t\leqslant k \tag{5.3.12}$$

证 由命题 4.2.3 知可将 U_k 扩充为 $U=(U_k,U_{n-k})\in U^{n\times n}$,因为 $\lambda_t(A)=\lambda_t(U^*AU)$,且 $U_k^*AU_k$ 为 U^*AU 的 k 阶顺序主子阵,故由定理 4.3.9 及式(5.3.8),有

$$\begin{aligned}\lambda_{n-k+t}(A)&=\lambda_{n-k+t}(U^*AU)\\&\leqslant\lambda_t(U_k^*AU_k)\leqslant\lambda_t(U^*AU)\end{aligned}$$

$$=\lambda_t(A), 1\leqslant t\leqslant n$$

即(5.3.12)式成立. □

命题 5.3.2 设 $A\in SC_n(Q), U\in U^{k\times n}$

$$1^\circ \max_{UU^*=I_k} \operatorname{tr}(UAU^*)=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A), k=1,\cdots,n \tag{5.3.13}$$

$$2^\circ \min_{UU^*=I_k} \operatorname{tr}(UAU^*)=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A), k=1,\cdots,n \tag{5.3.14}$$

证 由命题 4.2.3 知,对于满足 $UU^*=I_k$ 的 $U\in U^{k\times n}$,必存在 $V\in U^{(n-k)\times n}$,使 $\widetilde{U}=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\in U^{n\times n}$,因为

$$\widetilde{U}A\widetilde{U}^*=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}A(U^*,V^*)=\begin{pmatrix}UAU^* & UAV^*\\VAU^* & VAV^*\end{pmatrix}$$

由定理 4.1.17 知

$$\lambda_s(\widetilde{U}A\widetilde{U}^*)=\lambda_s(A), s=1,\cdots,n$$

注意到 UAU^* 是 $\widetilde{U}A\widetilde{U}^*$ 的主子阵,则由定理 5.2.3 知

$$\lambda_s(UAU^*)\leqslant\lambda_s(\widetilde{U}A\widetilde{U}^*), s=1,\cdots,k$$

因此 $\operatorname{tr}(UAU^*)=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(UAU^*)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A), 1\leqslant k\leqslant n$ ①

其次,对 $A\in SC_n(Q)$,由定理 4.1.14 知,存在 $T\in U^{n\times n}$,使

$$TAT^*=\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))$$

令
$$T=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}, T_1\in U^{k\times n},$$

则有

$$T_1AT_1^*=\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_k(A)),\text{且 } T_1T_1^*=I_k$$

此时有
$$\operatorname{tr}(T_1AT_1^*)=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)$$

由此即知式①中等号成立,从而即知式(5.3.13)成立.

同理可证式(5.3.14). □

定理 5.3.7 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

$$\max\left\{\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_{n-s+1}(B)],\ \sum_{B=1}^{k}[\lambda_{n-s+1}(A)+\lambda_s(B)]\right\}$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A+B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)],1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.15}$$

且当 $k=n$ 时等号成立.

证 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)\}+\min_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UBU^*)\}\\&=\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)+\min_{UU^*=I_k}(\mathrm{tr}(UBU^*))\}\\&\leqslant\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)+\mathrm{tr}(UBU^*)]\\&=\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}U(A+B)U^*\}\\&\leqslant\max\{\mathrm{tr}UAU^*\}+\max\{\mathrm{tr}UAU^*\}\end{aligned}$$

从而由命题 5.3.2 即得

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A+B)$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)$$

同理可证

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}S_s(A+B)$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)$$

故式(5.3.14)成立.

当 $k=n$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_{n-s+1}(B)]=\mathrm{tr}(A+B)$$

$$=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)$$ □

定理 5.3.8 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

1° 对满足 $1\leqslant j,k\leqslant n$,且 $j+k\geqslant n+1$ 的 j 和 k 均有

$$\lambda_{j+k-n}(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B) \tag{5.3.16}$$

2° 对满足 $1\leqslant j,k\leqslant n$ 且 $j+k\leqslant n+1$ 的 j 和 k 均有

$$\lambda_{j+k-1}(A+B)\geqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B) \tag{5.3.17}$$

证 1° 采用数学归纳法,由定理 4.1.17 知,对任意 $U\in U^{n\times n}$ 和 $G\in SC_n(Q)$,有

$$\lambda_k(UGU^*)=\lambda_k(G)\quad(k=1,\cdots,n)$$

因此在式(5.3.16)中我们可设

$$A=\Lambda_n=\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots\lambda_n(A))$$

当 $n=1$ 时式(5.3.16)显然成立,假设对 $n-1$,式(5.3.16)成立.

令 $$B=\begin{pmatrix}B_{n-1} & a\\ a^* & b_{nn}\end{pmatrix}\ (b_{nn}\in R),\ C_n=A+B$$

则 $$C_n=\begin{pmatrix}C_{n-1} & a\\ a^* & \lambda_n(A)+b_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 $$C_{n-1}=B_{n-1}+\Lambda_{n-1}$$

当 $\max\{j,k\}=n$ 或 $\min\{j,k\}=1$ 时,由式(5.3.9)可知式(5.3.16)成立.

当 $1<j,k<n$ 时,显然

$$\lambda_{j+k-n}(A+B)=\lambda_{j+(k-1)-(n-1)}(A+B)$$

因为 $1\leqslant j+(k-1)-(n-1)<m$,由式(5.3.9)和归纳假设,可得

$$\begin{aligned}\lambda_{j+(k+1)-(n-1)}(A+B)&\leqslant\lambda_{j+(k+1)-(n-1)}(C_{n-1})\\&\leqslant\lambda_j(\Lambda_{n-1})+\lambda_{k-1}(B_{n-1})\end{aligned}$$

$$=\lambda_j(A)+\lambda_{k-1}(B_{n-1})$$

由定理5.3.3知　　$\lambda_{k-1}(B_{n-1}),\leqslant\lambda_k(B)$

故　　$\lambda_{j+(k-1)-(n-1)}(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$

即　　$\lambda_{j+k-n}(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$

由数学归纳法即知式(5.3.16)成立.

因为 $\lambda_i(-A)=-\lambda_{n-i+1}(A)(1\leqslant i\leqslant n)$,用 $-A,-B$ 代替式(5.3.16)中的 A、B 可知式(5.3.17)成立. □

当 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$ 时,约定 $\{\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A)\}$ 与 $\{a_{11},\cdots,a_{nn}\}$ 为同一集合,且 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$,而 $\lambda(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 为 A 的特征值.

定理 5.3.9　设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A),k=1,\cdots,n \tag{5.3.18}$$

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_{n-s+1}(A),k=1,\cdots,n, \tag{5.3.19}$$

证法 1　由 $A\in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^* \tag{①}$$

设 $V\in U^{n\times n}$ 且 V 是使 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{st})=VAV^*$ 满足 $\tilde{a}_{ss}=\sigma_s(\tilde{A})=\sigma_s(A)$ 的置换阵,令 $\tilde{U}=(u_{ij})=UV$,则 $\tilde{U}\in U^{n\times n}$,且有

$$\tilde{A}=\tilde{U}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\tilde{U}^*$$

因　$$\sum_{s=1}^{n}N(u_{st})=\sum_{t=1}^{n}N(u_{st})=1 \tag{②}$$

令　$$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}N(u_{st})$$

则由式②有

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{s=1}^{k} N(u_{st})$$
$$\leqslant \sum_{t=1}^{l} \sum_{s=1}^{n} N(u_{st}) = l, 1 \leqslant k \leqslant n,$$
$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{t=1}^{k} N(u_{st})$$
$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{l} N(u_{st})$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} N(u_{st}) = k, 1 \leqslant k \leqslant n$$

故
$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \min\{l, k\}. \qquad ③$$

于是由式①,(1.1.10),③及定理5.1.6,有

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} u_{st}\lambda_t(A)\bar{u}_{st}$$
$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A) N(u_{st})$$
$$= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A) C_t^{(k)}$$
$$\leqslant \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A), k = 1, \cdots, n.$$

故式(5.3.18)成立.

又因为
$$\mathrm{tr}A = \sum_{s=1}^{n} \sigma_s(A) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$$

于是由上式及式(5.3.18),有

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_{n-s+1}(A) = \mathrm{tr}A - \sum_{s=1}^{n-k} \sigma_s(A)$$
$$\geqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) - \sum_{s=1}^{1-k} \lambda_s(A)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)$$

故式(5.3.19)成立. □

证法 2 显然存在置换矩阵 $T \in U^{n \times n}$,使

$$TAT^* = \begin{pmatrix} \sigma_1(A) & & & * \\ & \sigma_2(A) & & \\ & * & \ddots & \\ & & & \sigma_n(A) \end{pmatrix}$$

因为 $A \in SC_n(Q)$,则由定理 4.1.17,知

$$\lambda_s(A) = \lambda_s(TAT^*), s = 1, \cdots, n \qquad ①$$

因 $\sum_{s=1}^{n} a_{ss} = \mathrm{tr}A$,对任一正整数 $k(<n)$,设 TAT^* 的 k 阶顺序主子阵为 B_k,由定理 5.3.3 及式①知

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A) = \mathrm{tr}(B_k) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B_k)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(TAT^*)$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A), k = 1, \cdots, n$$

故式(5.3.18)成立.

而式(5.3.19)的证明同证法一. □

关于半正定自共轭阵的乘积的特征值,我们有以下的不等式:

定理 5.3.10 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\max\left\{ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B), \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B) \right\}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B), k = 1, \cdots, n. \qquad (5.3.20)$$

证 由定理 4.1.14 知,存在 $U \in U^{n \times n}$,使

$$UAU^* = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))$$

于是 $$UA^{\frac{1}{2}}U^{*}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A),\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}}(A))$$

记 $\tilde{B}=UBU^{*}=\begin{pmatrix}B_1 & B_3^{*}\\ B_3 & B_2\end{pmatrix}=(\widetilde{b_{ij}})$，其中 $B_1\in Q^{k\times k}$，$1\leqslant k\leqslant n$，由定理 4.3.4 及定理 4.3.8 知，$\tilde{B}\in SC_n(Q)$，$B_1\in SC_k(Q)$，则由定理 5.3.3 与定理 4.1.17，知

$$\lambda_s(B_1)\geqslant\lambda_{n-s+1}(\tilde{B})=\lambda_{n-s+1}(B),s=1,\cdots,k$$

于是由定理 4.3.6 及上式，有

$$\mathrm{tr}B_1=\sum_{s=1}^{k}\widetilde{b_{ss}}=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B_1)\geqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B) \qquad ①$$

又由定理 4.3.15 知

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n \qquad ②$$

注意到 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n(Q)$，于是由式②，(5.3.17)，阿贝尔变换，及式①，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\\&\geqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\\&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\widetilde{b_{ss}}\\&=\sum_{s=1}^{k-1}[\lambda_s(A)-\lambda_{s+1}(A)]\sum_{t=1}^{s}\widetilde{b_{tt}}+\lambda_k(A)\sum_{t=1}^{k}\widetilde{b_{tt}}\\&\geqslant\sum_{s=1}^{k-1}[\lambda_s(A)-\lambda_{s+1}(A)]\sum_{t=1}^{s}\lambda_{n-t+1}(B)\\&\quad+\lambda_k(A)\sum_{t=1}^{k}\lambda_{n-t+1}(B)\\&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\end{aligned}$$

又由式②，$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)(s=1,\cdots,n)$，有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\geqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B)$$

故式(5.3.19)的左端不等式成立.

再证式(5.3.20)的右端不等式.

因为 $B,A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，故分别存在 $W,V\in U^{n\times n}$，使

$$WA^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}W^*=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),\cdots,\lambda_n(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))$$

$$V^*BV=\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))$$

故有

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(\lambda_1(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),\cdots,\lambda_n(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))\\&\quad=P\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))P^*\end{aligned}\qquad③$$

其中 $$P^*=(p_{st})=WA^{\frac{1}{2}}V\in Q^{n\times n},$$

令 $$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})$$

由定理 5.3.9，即式(5.3.18)知，当 $1\leqslant l\leqslant k$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{l}C_t^{(k)}&=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})\leqslant\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{n}N(p_{st})\\&=\sum_{t=1}^{l}(P^*P)_{tt}=\sum_{t=1}^{l}(V^*A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}V)_{tt}\\&=\sum_{t=1}^{l}\delta_t(A)\leqslant\sum_{t=1}^{l}\lambda_t(A)\end{aligned}$$

当 $k\leqslant l\leqslant n$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{l}C_t^{(k)}&=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})=\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{l}N(p_{st})\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}N(p_{st})=\sum_{s=1}^{k}(PP^*)_{ss}\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} (WA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}W^*)_{ss}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \delta_s(A) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)$$

即 $$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \begin{cases} \sum_{t=1}^{l} \lambda_t(A), \text{当 } 1 \leqslant l \leqslant k \text{ 时} \\ \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A), \text{当 } k \leqslant l \leqslant n \text{ 时} \end{cases} \qquad ④$$

于是由式③,④及定理 5.1.7,有

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} p_{st}\lambda_t(B)\bar{p}_{st}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} N(p_{st})\lambda_t(B)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(B) \sum_{s=1}^{k} N(p_{st})$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(B)C_t^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A)\lambda_t(B) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B)$$

故式(5.3.20)的右边不等式成立. □

关于半正定自共轭阵的乘积的特征值之积也有类似的不等式.为此,我们先引入复 Hermite 半正定矩阵的乘积的特征值之积的不等式,即如下的

命题 5.3.3[3] 设 $A,B \in SC_n^{\geqslant}(C)$,则

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B), s = 1, \cdots, n$$

定理 5.3.11 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B),k=1,\cdots,n \quad (5.3.21)$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.3.15 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$PABP^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))$$

在上式两端取导出阵,由式(2.3.15),(2.3.16),得

$$\begin{aligned}&p^{\sigma}(AB)^{\sigma}(p^{\sigma})^{-1}\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB),\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))\end{aligned}$$

于是由定理 4.3.17,式(2.3.15)及命题 5.3.3,有

$$\begin{aligned}\left(\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\right)^2&=\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s((AB)^{\sigma})=\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s(A^{\sigma}B^{\sigma})\\&\leqslant\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s(A^{\sigma})\lambda_s(B^{\sigma})=\left(\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right)^2\end{aligned}$$

由此即知式(5.3.21)成立. □

注意 由不等式(5.3.21)及定理 5.1.12 也可直接推得式(5.3.20)的右边不等式.

命题 5.3.4[3] 设 $A,B\in C^{n\times n}$,则

$$\prod_{s=1}^{k}|\lambda_s(AB)|\leqslant\prod_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\sigma_s(B),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.3.22)$$

命题 5.3.5 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$m$ 为正整数,则

$$\prod_{s=1}^{k}\lambda_s^{m}(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A^mB^m),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.3.23)$$

证 先证 $A,B\in SC_n^{>}(C)$的情形.

对 m 采用第二数学归纳法.设 k:$1\leqslant k\leqslant n$.

当 $m=1$ 时,显然不等式(5.3.23)取等号成立.假定当 $1\leqslant m\leqslant p$ 时,不等式(5.2.23)都成立,即

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^m(AB) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m) \quad (1 \leqslant m \leqslant p) \qquad ①$$

下面证明:当 $m = p + 1$ 时,不等式(5.3.23)也成立,分两种情况来讨论:

(i)若 $p+1=2r$ 时,有 $1 \leqslant r \leqslant p$,从而由式①即归纳假设及命题5.3.4,并注意到 $A^r, B^r \in SC_n^{\geqslant}(C)$,于是有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{p+1}(AB) &= \left[\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^k(AB)\right]^2 \\
&\leqslant \left[\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^r B^r)\right]^2 = \left[\prod_{s=1}^{k} |\lambda_s(A^r B^r)|\right]^2 \\
&\leqslant \left[\prod_{s=1}^{k} \sigma_s(A^r B^r)\right]^2 = \prod_{s=1}^{k} \sigma_s^2(A^r B^r) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s((A^r B^r)^* A^r B^r) = \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(B^r A^{2r} B^r) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{2r} B^{2r}) = \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{p+1} B^{p+1})
\end{aligned}$$

(ii)若 $p+1=2r+1$,当 $1 < r+1 \leqslant p$ 时,由归纳假设即式①和命题5.3.3,有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{r+1}(AB) &\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{r+1} B^{r+1}) \\
&\leqslant \prod_{s=1}^{k} \sigma_s(B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}) \sigma_s(A^{r+\frac{1}{2}} B^{r+\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{p+1}(AB) &= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{2(r+1)}(AB) \lambda_n^{-1}(AB) \\
&\leqslant \prod_{s=1}^{k} \sigma_s^2(B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}) \sigma_s^2(A^{r+\frac{1}{2}} B^{r+\frac{1}{2}}) \lambda_s^{-1}(AB) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{2r+1} B^{2r+1})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{p-1}B^{p+1}) \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

综上，当 $A,B\in SC_n^{>}(C)$时，不等式(5.3.23)获证.

当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(C)$时，任意 $\varepsilon>0$，则 $A_\varepsilon=A+\varepsilon I_n$，$B_\varepsilon=B+\varepsilon I_n\in SC_n^{>}(C)$. 于是由刚才证明的事实，有

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^m(A_\varepsilon B_\varepsilon)\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A_\varepsilon^m B_\varepsilon^m) \qquad ②$$

注意到 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon=A$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} B_\varepsilon=B$，于是在②式中，令 $\varepsilon\to 0^+$，即得式(5.3.23). □

命题 5.3.6 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(C)$，$m$ 为正整数而 $1\leqslant k<n$，则

$$1^\circ \prod_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m)\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^mB^m)\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m) \tag{5.3.24}$$

$$2^\circ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m)\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^mB^m)\leqslant \sum_{s=1}^{s} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m) \tag{5.3.25}$$

证 1° 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(C)$及定理 4.3.15 知，有可逆阵 $P\in C^{n\times n}$，使

$$PABP^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots\lambda_n(AB)),\lambda_s(AB)\geqslant 0,\ 1\leqslant s\leqslant n$$

于是由上式及式(5.3.23)，有

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m)=\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^m(AB)\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^mB^m),1\leqslant k\leqslant n \qquad ①$$

又由 $A^m,B^m\in SC_n^{\geqslant}(C)$及文献[4]62 页定理 5，知

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^mB^m)\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m),k=1,\cdots,n \qquad ②$$

故由式①,②即知式(5.3.24)成立.

2° 由式(5.3.24)及定理5.1.12即知式(5.3.25)成立. □

定理 5.3.12 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, m 为正整数,则 $(AB)^m$, A^mB^m 都是中心封闭阵,且都相似于非负实对角阵,并有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^mB^m)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^m(A)\lambda_s^m(B),1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.26}$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 及命题5.3.1知, $A^m,B^m\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,且

$$\lambda_s(A^m)=\lambda_s^m(A),\lambda_s(B^m)=\lambda_s^m(B),1\leqslant s\leqslant n$$

由定理4.3.15知, AB 也是中心封闭阵,即存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1ABP_1^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))$$

于是有

$$P_1(AB)^mP_1^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1^m(AB),\cdots,\lambda_n^m(AB)). \quad ①$$

可见 $(AB)^m$ 也是中心封闭阵,且

$$\lambda_s((AB)^m)=\lambda_s^m(AB)\geqslant 0,1\leqslant s\leqslant n$$

又 A^mB^m 也是中心封闭阵,则存在可逆阵 $P_2\in Q^{n\times n}$,使

$$P_2A^mB^mP_2^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m)) \quad ②$$

对式①,②两端取导出阵,得

$$P_1^\sigma((AB)^m)^\sigma(P_1^\sigma)^{-1}$$
$$=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB)^m),\cdots,\lambda_n((AB)^m),\lambda_1((AB)^m),\cdots,\lambda_n((AB)^m)) \quad ③$$

$$P_2^\sigma(A^mB^m)^\sigma(P_2^\sigma)^{-1}$$
$$=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m),\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m)) \quad ④$$

这样,由式③,④,(2.3.14),(2.3.15)及(5.3.25),有

$$
\begin{aligned}
2\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m) &= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s(((AB)^m)^\sigma)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s(((AB)^\sigma)^m)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma B^\sigma)^m)\\
&\leqslant \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m(B^\sigma)^m)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma(B^m)^\sigma)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^mB^m)^\sigma)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma(B^m)^\sigma)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m(B^\sigma)^m)\\
&\leqslant \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m)\lambda_s((B^\sigma)^m)\\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma)\lambda_s((B^m)^\sigma)\\
&= 2\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m)
\end{aligned}
$$

由此即知，式(5.3.26)成立. □

定理 5.3.13 设 $A\in SC_n(Q)$，$P\in Q^{k\times n}(k\leqslant n)$，则

$$
\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)\leqslant \operatorname{tr}(PAP^*)\leqslant \sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*) \tag{5.3.27}
$$

证 因为 $A\in SC_n(Q)$，则由定理 4.1.14 知，A 可分解为

$$A=UDU^*,U\in U^{n\times n},D=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))$$

记 $\quad M=PU=(m_{ij})\in Q^{k\times n},B=(b_{ij})=MM^*\in Q^{k\times k},$

则

$$B=PUU^*P^*=PP^*,$$

从而 $\lambda_s(B)=\lambda_s(PP^*),s=1,\cdots,k$，且当 $s>k$ 时，取 $\lambda_s(B)=0$，记 $\{\delta_1(B),\cdots,\delta_n(B)\}=\{b_{11},\cdots,b_{nn}\}$ 且 $\delta_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\delta_n(B)$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(PAP^*)=\mathrm{tr}(MDM^*)&=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n}m_{ts}\lambda_s(A)\overline{m}_{ts}\\&=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\sum_{t=1}^{k}m_{ts}\overline{m}_{ts}\\&=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\sum_{t=1}^{k}\overline{m}_{ts}m_{ts}\\&=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)b_{ss}\end{aligned}\tag{①}$$

由命题 5.1.4，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s+1}(A)\delta_s(B)&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)b_{ss}\\&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\delta_s(B)\end{aligned}\tag{②}$$

由定理 5.3.9 知

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_s(B)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)\tag{③}$$

从而由式③及定理 5.1.5，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\delta_s(B)&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\\&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(PP^*) \qquad ④$$

由式①,②,④即知式(5.3.27)的右边不等式成立.

又

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*) &= \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B) \\ &= \sum_{s=1}^{n} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B) \\ &= \sum_{s=1}^{n} \lambda_{k-s+1}(A)\delta_s(B) \qquad ⑤\end{aligned}$$

由式⑤及②即知式(5.3.2)的左边不等式成立. □

定理 5.3.14 设 $A\in SC_n(Q)$, $P\in Q^{n\times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(PAP^*) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(PP^*),\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.28}$$

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(PAP^*),\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.29}$$

证 首先由定理4.2.7知,存在 $U,V\in U^{n\times n}$,使

$$P = U\mathrm{diag}(\sigma_1(P),\cdots,\sigma_n(P))V$$

其中 $\sigma_1(P)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(P)$为 P 的 n 个奇异值.

令 $$B=(b_{ij}) = VAV^*,\text{则 } B\in SC_n(Q)$$

再令 $$X=U^*(PAP^*)U\in SC_n(Q) \qquad ①$$

则 $$\begin{aligned}X &= \mathrm{diag}(\sigma_1(P),\cdots,\sigma_n(P))B\mathrm{diag}(\sigma_1(P),\cdots,\sigma_n(P)) \\ &= (\sigma_s(P)b_{st}\sigma_t(P)) = (x_{st})\end{aligned}$$

于是 $$\tilde{\delta}_s(X) = \tilde{\delta}_s(B)\sigma_s^2(P),\ s=1,\cdots,n \qquad ②$$

(其中符号 $\tilde{\delta}_1(A),\cdots,\tilde{\delta}_n(A)$表示 $\delta_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\delta_n(A)$的乱序排列).

又因为对任意的 $V\in U^{n\times n}$和任意的$A\in SC_n(Q)$，有

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{s=1}^{n}\bar{\sigma}_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)$$

$$\lambda_s(A)=\lambda_s(VAV^*),s=1,\cdots,n \tag{③}$$

于是由式①，③，(5.3.19)，(5.1.9)，②，(5.1.13)，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(PAP^*)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(X)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_{k-s+1}(X)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\tilde{\delta}_s(X)\\&=\sum_{s=1}^{k}\tilde{\delta}_s(B)\sigma_s^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_s(B)\sigma_s^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)\sigma_s^2(P)\\&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*),1\leqslant k\leqslant n\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B)\sigma_s^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_{n-s+1}(B)\sigma_s^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_s(B)\sigma_s^2(P)\\&=\sum_{s=1}^{k}\delta_s(X)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(X)$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(PAP^*), 1 \leqslant k \leqslant n \qquad \square$$

定理 5.3.15 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° 当 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right], k=1,\cdots,n \tag{5.3.30}$$

2° 当 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r<1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant k^{1-r}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B^q)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leqslant k^{1-r}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right], k=1,\cdots,n \tag{5.3.31}$$

证 由不等式(5.3.20)，(5.2.22)及命题 5.3.1 之 3°，得

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B)$$

$$\leqslant \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^p(A)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^q(A)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^q)\right)^{\frac{1}{q}}$$

又由 $p>1$ 及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$ 有 $q>1$，故由琴生不等式(5.2.9)，有

$$\left(\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^p(A)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^q(A)\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\right]$$

由此即得式(5.3.30).同理由式(5.2.23)即可得式(5.3.31). □

定理 5.3.16 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\left[\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\leqslant\lambda_k(AB)$$

$$\leqslant\left[\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{k}},1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.32}$$

证 由不等式(5.3.21),有

$$[\lambda_k(AB)]^k\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_k(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)$$

由此即知(5.3.32)的右边不等式成立.

由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.3.6 之 5°知,当 $1\leqslant s\leqslant n$ 时,有

$$\lambda_{n-s+1}(A^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(A)}$$

$$\lambda_{n-s+1}(B^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(B)}$$

$$\lambda_{n-s+1}((AB)^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(AB)}$$

于是由上诸式及式(5.3.21),知

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\lambda_k(AB)}\right]^{n-k+1}&=[\lambda_{n-k+1}((AB)^{-1})]^{n-k+1}\\&\leqslant\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s((AB)^{-1})=\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(B^{-1}A^{-1})\\&\leqslant\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(B^{-1})\lambda_s(A^{-1})\\&=\prod_{s=1}^{n-k+1}\frac{1}{\lambda_s(A)\lambda_s(B)}\end{aligned}$$

故 $$\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\leqslant[\lambda_k(AB)]^{n-k+1}$$

即 $$\sqrt[n-k+1]{\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(A)\lambda_s(B)}\leqslant\lambda_k(AB),1\leqslant k\leqslant n$$

这就证明了不等式(5.3.32)的左边部分. □

推论 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则仍有式(5.3.32)成立

证 这只需用 $A+\varepsilon I$ 与 $B+\varepsilon I(\forall\varepsilon>0)$分别代替 A 与 B,然后令 $\varepsilon\to0^+$ 即得. □

注 1 上述方法常被称为**连续性方法**,它是由正定矩阵中的不等式或等式过渡到半正定矩阵常用的一种方法.

注 2 定理5.3.16及其推论给出了两个半正定自共轭矩阵之积的特征值的较精确的一种估计.所得结论当然对实和复(半)正定矩阵也是对的.

定理 5.3.17 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{-1}(AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^{-1})\leqslant\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1}\tag{5.3.33}$$

$$n^2\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1}\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\tag{5.3.34}$$

证 由 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$及定理 4.3.14 知诸 $\lambda_s(AB)>0$,又 $A^{-1}>0,B^{-1}>0,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,它们的特征值分别为

$$\lambda_s^{-1}(A),\lambda_s^{-1}(B),\lambda_s^{-1}(AB),s=1,\cdots,n$$

在定理 5.3.10 中令 $k=n$,并利用式(4.3.12),则得

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_s(B) \qquad ①$$

于是由定理 4.3.6,式(4.2.25)及①,有

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^{-1}) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(B^{-1}A^{-1}))$$

$$= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{-1}B^{-1})) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A^{-1})\lambda_s(B^{-1})$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1}$$

故式(5.3.33)成立. □

注意到诸 $\lambda_s^{-1}(AB)>0$,由 Cauchy 不等式(5.2.27),可得

$$n^2 = \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{\frac{1}{2}}(AB)\lambda_s^{-\frac{1}{2}}(AB)\right]^2$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB)\right]\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]$$

故 $$n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]^{-1} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \qquad ②$$

于是由式(5.3.33)及式②,有

$$n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1} \leqslant n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]^{-1}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \qquad ③$$

从而由式③及(5.3.20)即得式(5.3.34). □

定理 5.3.18 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$n^2\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B,\lambda_1(B)\mathrm{tr}A\} \tag{5.3.35}$$

$$\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

$$<\lambda_s(AB)\leqslant\min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B,\lambda_1(B)\mathrm{tr}A\},s=1,\cdots,n \tag{5.3.36}$$

证 (5.3.35)和(5.3.36)两式的后半部分可由式(5.3.34)直接得到，又由 A^{-1},B^{-1}的特征值分别为

$$\lambda_n^{-1}(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}(A)(>0)$$

$$\lambda_n^{-1}(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}(B)(>0)$$

及式(5.3.35)的后半部分，得

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)=\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A^{-1})\lambda_s(B^{-1})$$

$$\leqslant\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

于是有

$$\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1}$$

$$\geqslant1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

$$=\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

将上式代入式(5.3.34)便得式(5.3.35)的前半部分. 又由式(5.3.35)的后半部分可得

$$\lambda_s^{-1}(AB)=\lambda_s(B^{-1}A^{-1})$$

$$<\min\{\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}B^{-1}\},s=1,\cdots,n$$

于是有

$$\lambda_s(AB)>1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

$$=\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n^{-1}(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\},s=1,\cdots,n \quad \square$$

定理 5.3.19 设 $A,B\in SC_n^{\geq}(Q)$，则

$$\frac{2}{n}[\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)]^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)$$

$$<\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)\leqslant\frac{n}{2}[\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B)] \quad (5.3.37)$$

$$\frac{2}{n}[\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)]^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)$$

$$<\lambda_s(AB)<\frac{n}{2}[\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B)],s=1,\cdots,n \quad (5.3.38)$$

证 由几何—算术平均值不等式，有

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\leqslant\frac{n}{2}[2\lambda_1(A)\lambda_1(B)]$$

$$\leqslant\frac{n}{2}[\lambda_n^2(A)+\lambda_1^2(B)] \quad ①$$

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\lambda_s(A)\lambda_s(B)}$$

$$\leqslant\frac{n}{2}\frac{1}{\lambda_n(A)\lambda_n(B)}\leqslant\frac{n}{2}\frac{\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)}{\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)} \quad ②$$

将式①，②代入式(5.3.34)即得式(5.3.37)，而式(5.3.38)由式(5.3.31)知显然成立． $\square$

关于一般四元数矩阵 A 的特征值(左、右特征值，并假设 A

的特征值存在),则有以下定理

定理 5.3.20 设 $A\in Q^{n\times n}$, $B=R(A)=\dfrac{A+A^*}{2}$, $p_1 p_n$ 分别为 B 的最大与最小特征值,若 λ 为 A 的左(或右)特征值,则

$$p_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda)\leqslant p_1 \tag{5.3.39}$$

证 不妨设 λ 为 A 的右特征值(为左特征值同样可证),即存在 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,使

$$Ax=x\lambda$$

则
$$x^*A^*=\bar{\lambda}x^*$$

于是有
$$x^*Ax=x^*x\lambda$$

$$xA^*x=\bar{\lambda}x^*x=x^*x\bar{\lambda}$$

上两式相加有 $x^*(A+A^*)x=x^*x(\lambda+\bar{\lambda})$

由 $x\neq 0$,则由上式有

$$\lambda+\bar{\lambda}=\frac{x^*(A+A^*)x}{x^*x}$$

即
$$\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}=\frac{x^*[(A+A^*)/2]x}{x^*x}=\frac{x^*Bx}{x^*x}=\varphi_B(x) \tag{5.3.40}$$

故由定理 5.3.1 即知有

$$p_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda)\leqslant p_1$$ □

定理 5.3.21 设 $A\in Q^{n\times n}$, p_1 与 p_n 分别是 A^*A 的最大与最小特征值,λ 是 A 的左(或右)特征值,则

$$p_n\leqslant N(\lambda)\leqslant p_1 \tag{5.3.41}$$

证 不妨设 λ 是 A 的左特征值(为右特征值同样可证),即存在 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,使

$$Ax=\lambda x$$

则
$$x^*A^*=x^*\bar{\lambda}$$

用后式的两端左乘前式的两端,得

$$x^* A^* Ax = x^* \bar{\lambda}\lambda x$$

从而
$$N(x) = \bar{\lambda}\lambda = \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} \tag{5.3.42}$$

故由定理 5.3.1 即知

$$p_n \leqslant N(\lambda) \leqslant p_1$$ □

推论 设 $A \in Q^{n\times n}$，若 A 存在左(或右)特征值，$x \in Q^{n\times 1}$为相应的特征向量，则

$$\left(\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^* x}\right)^2 \leqslant \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} \tag{5.3.43}$$

证 λ 为 A 的左(或右)特征值，显然有：$[\mathrm{Re}(\lambda)]^2 \leqslant N(\lambda)$，于是由式(5.3.40)及(5.3.42)即知式(5.3.43)成立. □

定义 5.3.3 设 $A \in Q^{n\times n}$，若 $R(A) = \dfrac{A+A^*}{2}$ 为正定阵，则称 A 为**亚正定阵**.

定理 5.3.22 设 $A \in Q^{n\times n}$，A 为亚正定阵，p_1, p_n 为 $A^* A$ 的最大与最小特征值，μ_1, μ_n 为 $R(A)$的最大与最小特征值，则

$$p_n - {\mu_1}^2 \leqslant N(\mathrm{Im}(\lambda)) \leqslant p_1 - {\mu_n}^2 \tag{5.3.44}$$

证 由于 A 为亚正定，则 $R(A)$为正定. 从而 μ_1, μ_2 必为正实数，再注意到

$$\begin{aligned} N(\mathrm{Im}(\lambda)) &= N(\lambda) - (\mathrm{Re}(\lambda))^2 \\ &= \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} - \left[\frac{x^*((A+A^*)/2)x}{x^* x}\right]^2 \end{aligned}$$

此处 $x \in Q^{n\times 1}$为 A 的属于λ 的特征向量，从而结合定理 5.3.1，有

$$p_n - {\mu_1}^2 \leqslant N[\mathrm{Im}(\lambda)] \leqslant p_1 - {\mu_n}^2$$ □

定理 5.3.23 设 $A, B \in Q^{n\times n}$，p_1, p_n 为 $R(A)$的最大与最小特征值，μ_1, μ_n 为$R(B)$的最大与最小特征值，$\lambda(A+B)$为 $A+B$ 的左(或右)特征值，则

1° $p_n+\mu_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda(A+B))\leqslant p_1+\mu_1$ (5.3.45)

2° $N(\lambda(A+B))\geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$ (5.3.46)

证 1° 设 $x\in Q^{n\times 1}$ 为 $A+B$ 的对应于 λ 的特征向量,则由式(5.3.40),有

$$\mathrm{Re}(\lambda(A+B))=\frac{x^*\left[\dfrac{(A+B)^*+(A+B)}{2}\right]x}{x^*x}$$

$$=\frac{x^*((A^*+A)/2)x+x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

$$=\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x}+\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

于是由定理 5.3.20 即得

$$p_n+\mu_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda(A+B))\leqslant p_1+\mu_1$$

2° 设 $x\in Q^{n\times 1}$ 为 $A+B$ 的对应于 λ 的特征向量,由式(5.3.42)及(5.3.43),有

$$N(\lambda(A+B))=\frac{x^*(A+B)^*(A+B)x}{x^*x}$$

$$\geqslant\left[x^*\frac{(A+B)^*+(A+B)}{2}x\right]^2$$

$$=\left[\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x}+\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}\right]^2$$

令 $$u=\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x},\quad v=\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

则由定理 5.3.19,得

$$p_n+\mu_n\leqslant u+v\leqslant p_1+\mu_1$$

从而 $$(u+v)^2\geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$$

故 $$N(\lambda(A+B))\geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$$

即式(5.3.46)成立. □

对于四元数矩阵的谱值(见定义 4.1.4),有如下不等式:

定理 5.3.23（Schur 不等式） 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$ 的一组谱值，则

$$\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s|^2\leqslant\sum_{s,t=1}^{n}|a_{st}|^2 \tag{5.3.47}$$

其中等号成立当且仅当 A 酉相似于对角阵.

证 由定理 4.1.4 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\mu_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ & \mu_2 & \cdots & q_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mu_n\end{pmatrix}=B \qquad ①$$

其中 $\mu_s=\mu_s^{(1)}+\mu_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\mu_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$

则 $B^*=U^*A^*U$，而且

$$BB^*=U^*AA^*U=\begin{pmatrix}|\mu_1|^2+\sum\limits_{t=1}^{n}|q_{1t}|^2 & & & & \\ & |\mu_2|^2+\sum\limits_{t=2}^{n}|q_{2t}|^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & |\mu_{n-1}|^2+|q_{n-1,n}|^2 & \\ & & & & |\mu_n|^2\end{pmatrix}$$

再由定理 4.3.9 知

$$\mathrm{tr}(AA^*)=\mathrm{tr}(BB^*)$$

由此即得

$$\sum_{s,t=1}^{n}|a_{st}|^2=\sum_{s=1}^{n}|\mu_s|^2+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant n}|q_{st}|^2 \tag{5.3.48}$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一组谱值，由定义 4.1.4 知 A 与上三角矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad ②$$

相似，又已知 A 与 B 相似，故矩阵 B 与 C 相似，于是由式①，②及 $B \sim C$，推出 $\mu_s \sim \lambda_s(s=1,\cdots,n)$，即存在 $0 \neq b_s \in Q(s=1,\cdots,n)$ 使

$$\mu_s = b_s^{-1}\lambda_s b_s \Rightarrow |\mu_s| = |\lambda_s|, \quad s=1,\cdots,n \qquad ③$$

从而由式②，式(5.3.48)及式③，有

$$\sum_{s,t=1}^{n} |a_{st}|^2 = \sum_{s=1}^{n} |\lambda_s|^2 + \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant n} |q_{st}|^2 \qquad ④$$

由式④即知结论成立. □

定理 5.3.23 显然简单，但很有用，而且引出这样的问题：当且仅当矩阵 $A=(a_{ij}) \in Q^{n \times n}$ 酉相似于一对角阵，那么就有式(5.3.47)取等式成立，那么我们自然会问，什么样的矩阵是酉相似于对角阵的呢？我们早已知道，自共轭矩阵酉相似于一对角阵且是一实对角阵(定理 4.1.14)，除此之外，还有哪些矩阵满足这一事实呢？即如何刻画酉相似于对角阵的矩阵，这就是下述定义的起源.

定义 5.3.4 设 $A \in Q^{n \times n}$ 如果 $AA^* = A^*A$，则称 A 为**规范(norma)矩阵**.

定理 5.3.24 设 $A \in Q^{n \times n}$，则 A 酉相似于对角阵$\Leftrightarrow A$ 是规范阵.

证 设 A 酉相似于对角阵，即存在 $U \in U^{n \times n}$，使 $U^*AU = B$，而 B 是对角阵，则 $BB^* = B^*B$，于是有

$$\begin{aligned} AA^* &= (UBU^*)(UBU^*)^* = UBU^*UB^*U^* \\ &= UBB^*U^* = UB^*BU^* = A^*A \end{aligned}$$

故 A 是规范阵.

设 A 是规范阵，由定理 4.1.4 知，存在 $U \in U^{n \times n}$，使 $U^*AU = T$，T 为上三角阵，则

$$A = UTU^*, A^* = UT^*U^*$$

由 $AA^* = A^*A$，有

$$UTT^* U^* = UT^* TU^*$$

于是有 $$TT^* = T^* T$$

注意到 T 是上三角阵,从而由上式即得,T 必为对角阵. □

§5.4 四元数矩阵奇异值的不等式

在第四章第二节我们已经引入了四元数矩阵的奇异值的概念(见定义 4.2.5).本节是在前面所述内容的基础上给出有关四元数矩阵的奇异值的一系列不等式.

为方便计,对 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,我们恒约定$\{\delta_1(A),\cdots,\delta_n(A)\}$与$\{a_{11},\cdots,a_{nn}\}$为同一集合,且$|\delta_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\delta_n(A)|$,$\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$.

定理 5.4.1 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,则

$$\left|\sum_{s=1}^{k} a_{ss}\right|\leqslant \sum_{s=1}^{k} |a_{ss}|\leqslant \sum_{s=1}^{k} |\delta_s(A)|\leqslant \sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A),1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.1}$$

证 前面两个不等号是显然的,现证最后一个不等号.因为置换阵为广义酉阵,故不失一般性,可设 $\delta_s(A)=a_{ss}(1\leqslant s\leqslant n)$.由矩阵的奇异值分解定理即定理 4.2.7 知,存在 $U=(u_{ij})$,$V=(v_{ij})\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))V \tag{①}$$

令 $$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}|u_{st}v_{ts}|\geqslant 0,t,k=1,\cdots,n$$

于是由 $\sum\limits_{\substack{s=1\\t\neq 1}}^{n}|u_{st}|^2=\sum\limits_{\substack{s=1\\t\neq 1}}^{n}|v_{st}|^2=1$ 及式(1.1.24),有

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)}=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}|u_{st}v_{ts}|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}(|u_{st}|^2+|v_{ts}|^2)\leqslant \min\{k,l\},1\leqslant l,k\leqslant n. \quad ②$$

由式①知,

$$\delta_s(A)=a_{ss}=\sum_{t=1}^{n} u_{st}\sigma_t(A)v_{ts}$$

故 $|\delta_s(A)|=|a_{ss}|\leqslant \sum_{t=1}^{n}|u_{st}\sigma_t(A)v_{ts}|$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sigma_t(A)|u_{st}v_{ts}|,s=1,\cdots,n \quad ③$$

于是由式③,②及定理 5.1.6,有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(A)| &\leqslant \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}\sigma_t(A)|u_{st}v_{ts}|\\ &=\sum_{t=1}^{n}\sigma_t(A)\sum_{s=1}^{k}|u_{st}v_{ts}|\\ &=\sum_{t=1}^{n}\sigma_t(A)C_t^{(k)}\\ &\leqslant \sum_{t=1}^{k}\sigma_t(A),k=1,\cdots,n.\end{aligned} \quad \square$$

推论 1 设 $A\in Q^{n\times n}$ 的对角元素为 $a_1,\cdots,a_n$,则有

$$(\mathrm{Re}(a_1),\cdots,\mathrm{Re}(a_n))\prec_w(|a_1|,\cdots,|a_n|)$$
$$\prec_w(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A)), \quad (5.4.2)$$

其中 $|a_1|\geqslant\cdots\geqslant|a_n|,\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$.

推论 2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A) \quad (5.4.3)$$

证 在(3.3.7)式中令 $k=n$,即有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|=|\sum_{s=1}^{n}a_{ss}|$$

$$=\left|\sum_{s=1}^{n}\delta_s(A)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{n}|\delta_s(A)|\leqslant\sum_{s=1}^{h}\sigma_s(A)\qquad\square$$

定理 5.4.2 设 $A\in Q^{m\times n}$，U，V 为广义酉阵，则

$$\sigma_s(U^*AV)=\sigma_s(A),\ s=1,2,\cdots,\min\{m,n\}\tag{5.4.4}$$

证 由奇异值定义及定理 4.3.9，有

$$\begin{aligned}\sigma_s(U^*AV)&=\sqrt{\lambda_s((U^*AV)^*(U^*AV))}\\&=\sqrt{\lambda_s(UA^*AV)}\\&=\sqrt{\lambda_s(A^*A)}\\&=\sigma_s(A),\ s=1,2,\cdots,\min\{m,n\}\end{aligned}\qquad\square$$

定理 5.4.3 设 $M\in Q^{m\times n}$，$A\in Q^{s\times t}$，$m\geqslant s$，$n\geqslant t$，$\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{\min(m,n)}$，$\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_{\min(s,t)}$，分别是 M 和 A 的奇异值，则

$$\sigma_r\geqslant\tau_r,\ r=1,\cdots,\min(s,t)\tag{5.4.5}$$

$$\tau_r\geqslant\sigma_{r+(m-s)+(n-t)},\ r\leqslant\min(s+t-m,s+t-n)\tag{5.4.6}$$

特别地，当 $m=n$，$s=t=n-1$ 时，有

$$\sigma_1\geqslant\tau_1\geqslant\sigma_2\geqslant\tau_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{n-1}\geqslant\tau_{n-1}\geqslant\sigma_n\tag{5.4.7}$$

证 由定理 5.4.2 知，M 与 U^*MV（其中 U，V 均为广义酉阵）有相同的奇异值，故可不妨设 A 是 M 的子矩阵. 令

$$N=\begin{pmatrix}0&M\\M^*&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&A\\A^*&0\end{pmatrix}$$

由奇异值分解定理 4.2.7 知，有广义酉矩阵 V_1，V_2，使得 $M=V_1DV_2^*$，其中 D 的对角元为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,n)}$，其余处为 0，于是

$$\begin{aligned}N&=\begin{pmatrix}0&V_1DV_2^*\\V_2D^{\mathrm T}V_1^*&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}V_1&0\\0&V_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&D\\D^{\mathrm T}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1^*&0\\0&V_2^*\end{pmatrix}\end{aligned}$$

又对于实矩阵$\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$,易见其特征值为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,n)},0,\cdots,0,-\sigma_{\min(m,n)},\cdots,-\sigma_1$,而$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$是 $m+n$ 阶广义酉矩阵,则由定理 4.3.9 知它们也是 N 的特征值.

类似地可证 $\tau_1,\cdots,\tau_{\min(s,t)},0,\cdots,0,-\tau_{min(s,t)},\cdots,-\tau_1$ 为 B 的特征值,又 B 是 N 的 $s\times t$ 阶主子阵,从而由定理 5.3.3 知,本定理结论成立. □

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,$U_0\in Q^{n\times k}$,$1\leqslant k\leqslant h$,则

$$\sigma_s(AU_0)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,k \tag{5.4.8}$$

证 因为 $AU_0\in Q^{n\times k}$ 是 $A\in Q^{n\times n}$ 的子矩阵,故由定理 5.4.3 即式(5.4.5),即得式(5.4.8). □

定理 5.4.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,$U_0\in U^{n\times k}$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\det(U_0{}^*A^*AU_0)\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t{}^2(A) \tag{5.4.9}$$

证 由命题 4.2.3 知,存在 $U_1\in U^{n\times(n-k)}$,使

$$U=(U_0,U_1)\in U^{n\times n}$$

因 $A^*A\in SC_n(Q)$,由定理 4.1.17 知,$\lambda_t(U^*A^*AU)=\lambda_t(A^*A)$ $(1\leqslant t\leqslant n)$.又 $U_0{}^*A^*AU_0$ 为 U^*A^*AU 的 k 阶顺序主子阵,由定理 4.3.8 知,$U_0{}^*A^*AU_0\in SC_k(Q)$,于是由定理 4.3.6 之 1°及定理 5.3.3,知

$$\begin{aligned}\det(U_0{}^*A^*AU_0)&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(U_0{}^*A^*AU_0)\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(U^*A^*AU)\\&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(A^*A)=\prod_{t=1}^{k}\sigma_t{}^2(A)\end{aligned}$$

故式(5.4.9)成立. □

定理 5.4.5 设 $A\in Q^{n\times n}$, $U(A)=\{B=(b_{ij})=UAV \mid \forall U,V\in U^{n\times n}\}$,则

$$\max_{B\in U(A)}\{\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k} b_{ss})\}=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n \qquad (5.4.10)$$

证 对 $\forall B\in U(A)$,由定理 5.4.2 知

$$\sigma_s(B)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n$$

于是由定理 5.4.1,有

$$\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k} b_{ss})\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(B)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n \qquad ①$$

又由奇异值分解定理 4.2.7 知,存在 $U,V\in U^{n\times n}$,使

$$B=UAV=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))$$

便得

$$\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k} b_{ss})=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A) \qquad ②$$

由式①,②即知式(5.4.10)成立. □

定理 5.4.6 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,则

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_{n-s+1}(B)\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(AB)\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_t(B),1\leqslant k\leqslant n. \qquad (5.4.11)$$

证 因为 $(AB)^*AB\in SC_n(Q)$,故由定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*B^*A^*ABU=\mathrm{diag}(\sigma_1{}^2(AB),\cdots,\sigma_n^2(AB))$$

记 $U=(u_1,\cdots,u_n),U_k=(u_1,\cdots,u_k),(1\leqslant k\leqslant n)$

则由定理 4.2.7(奇异值分解定理)知,存在 $V_1\in U^{k\times k}$, $V_2\in U^{n\times k}$,使得

$$BU_k=V_2D_1V_1,D_1=\mathrm{diag}(\sigma_1(BU_k),\cdots,\sigma_k(BU_k)). \qquad ①$$

于是由定理 4.3.6,式①及定理 3.3.11 之推论与定理 5.4.4,有

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(AB) = \prod_{t=1}^{k} \lambda_t(B^* A^* AB)$$
$$= \det(U_k^* B^* A^* ABU_k)$$
$$= \det(V_1^* D_1 V_2^* A^* AV_2 D_1 V_1)$$
$$= \det((D_1 V_1)^* (V_2^* A^* AV_2)(D_1 V_1))$$
$$= \det((D_1 V_1)^* (D_1 V_1)) \cdot \det(V_2^* A^* AV_2)$$
$$= \det((V_1^* B^* BV_1)) \cdot \det(V_2^* A^* AV_2)$$
$$\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(B) \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(A)$$
$$= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(A)\sigma_t^2(B)$$

由此即得式(5.4.11)的右边不等式.而由

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A) = \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(ABB^{-1}) \leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB)\sigma_t(B^{-1})$$
$$= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB)\sigma_{n-t+1}^{-1}(B)$$

即得式(5.4.11)左边的不等式. □

推论 设 $A_s \in Q^{n\times n}$, $s = 1, \cdots, n$, 则

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t\left(\prod_{s=1}^{m} A_s\right) \leqslant \prod_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{m} \sigma_t(A_s), 1 \leqslant k \leqslant n \qquad (5.4.12)$$

证 用数学归纳法证之.

由定理 5.4.6 即式(5.4.11)的右边不等式即知当 $m = 2$ 时式(5.4.12)成立. 现假设式(5.4.12)对 $2 \leqslant m \leqslant r-1$ 成立. 于是由归纳假设,对 $m = r$,有

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t\left(\prod_{s=1}^{r} A_s\right) = \prod_{t=1}^{k} \sigma_t((A_1 A_2) A_3 \cdots A_r)$$
$$\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A_1 A_2)\sigma_t(A_3)\cdots\sigma_t(A_r)$$

$$\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A_1)\sigma_t(A_2)\sigma_t(A_3)\cdots\sigma_t(A_r)$$

$$= \prod_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{r} \sigma_t(A_s), 1\leqslant k\leqslant n$$

这就用数学归纳法证明了不等式(5.4.12)成立. □

定理 5.4.7 设 $A, B\in Q^{n\times n}$,则

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t(A)\sigma_{n-t+1}(B)\leqslant \sum_{t=1}^{k} \sigma_t(AB) \leqslant \sum_{t=1}^{k} \sigma_t(A)\sigma_t(B), 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.13}$$

证 由定理 5.4.6 及定理 5.1.12 即得. □

定理 5.4.8 设 $A_s\in Q^{n\times n}, s=1,\cdots,m$,则

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t(\prod_{s=1}^{m} A_s)\leqslant \sum_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{m} \sigma_t(A_s), 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.14}$$

证 由定理 5.4.6 的推论及定理 5.1.12 即得. □

定理 5.4.9 设 $A, B\in Q^{n\times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A+B)\leqslant \sum_{s=1}^{k} (\sigma_s(A)+\sigma_s(B)), k=1,\cdots,n \tag{5.4.15}$$

证 由定理 4.2.7 知,分别存在 $U_1, U_2, V_1, V_2\in U^{n\times n}$,使

$$A = U_1{}^* \mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(B)) V_1$$

$$B = U_2{}^* \mathrm{diag}(\sigma_1(B),\cdots,\sigma_n(B)) V_2$$

对 $\forall\, U, V\in U^{n\times n}$,记

$$\begin{aligned} W &= (w_{ij}) = U^*(A+B)V^* \\ &= (V_1V)^* \mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))(U_1V) \\ &\quad + (U_2U)^* \mathrm{diag}(\sigma_1(B),\cdots,\sigma_n(B))(V_2V) \\ &= P+Q \end{aligned}$$

其中 $P=(p_{ij})=(U_1U)^*\operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_1(A))(V_1V)$

$Q=(q_{ij})=(U_2U)^*\operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(B))(V_2V)$

注意 $U_1U,U_2U,V_1V,V_2V\in U^{n\times n}$,则由定理 5.4.1 及定理 4.2.9,有

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(P)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(P)=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n$$

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(Q)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(Q)=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(B),k=1,\cdots,n$$

于是由上两式,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})&\leqslant|\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\operatorname{Re}(p_{ss})|\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}|p_{ss}|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(P)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\end{aligned}\qquad ①$$

$$\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}q_{ss})\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(B)\qquad ②$$

从而由式①,②,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}w_{ss})&=\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})+\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}q_{ss})\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}(\sigma_s(A)+\sigma_s(B))\end{aligned}$$

再由上式及定理 5.4.5,即得

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A+B)&=\max_{W\in U(A+B)}\{\operatorname{Re}\sum_{s=1}^{k}w_{ss}\}\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}(\sigma_s(A)+\sigma_s(B))\end{aligned}\qquad \square$$

推论 设 $A_s\in Q^{n\times n}$,$1\leqslant s\leqslant m$,则

$$\sum_{s=1}^{k}\sigma_s\left(\sum_{s=1}^{m}A_s\right)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}\sigma_t(A_s),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.4.16)$$

证 利用定理 5.4.9 采用数学归纳法即可证得. □

定理 5.4.10 设 $A_t\in Q^{n\times n}$, $p_t>0$, $t=1,\cdots,m$, $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$\sum_{s=1}^{k}\left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{p_t}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\left((A_tA_t^*)^{\frac{p_t}{2}}\right),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.4.17)$$

证 由式(5.4.1),(5.4.14)及杨格不等式(5.2.7),有

$$\sum_{s=1}^{k}\left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_s(A_t)$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{p_t}\sum_{s=1}^{k}\sigma_s^{p_t}(A_t),1\leqslant k\leqslant n$$

又 $\sigma_s^{p_t}(A_t)=(\sigma_s^2(A_t))^{\frac{p_t}{2}}=\lambda_s^{\frac{p_t}{2}}(A_tA_t^*)=\lambda_s((A_tA_t^*)^{\frac{p_t}{2}})$

于是由上两式即知(5.4.17)成立. □

在定理 5.4.10 中取 $A_t\in SC_n(Q)$,则得

推论 1 设 $A_t\in SC_n(Q)$, $p_t>0$, $t=1,\cdots,m$, $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$\sum_{s=1}^{k}\left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{p_t}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^{p_t}(A_t),1\leqslant k\leqslant n. \quad (5.4.18)$$

在定理 5.4.10 中，取 $m=2$，可得

推论 2 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(AB)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AA^*)^{\frac{p}{2}})+\frac{1}{q}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((BB^*)^{\frac{q}{2}}),1\leqslant k\leqslant n\tag{5.4.19}$$

定理 5.4.11 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$，$\alpha_t>0$，$s=1,\cdots,l$，$t=1,\cdots,m$，则对任意正整数 $k\leqslant n$，

1° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{l}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st})\tag{5.4.20}$$

2° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t/\alpha}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha}}\tag{5.4.21}$$

3° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \prod_{t=1}^{m} \sigma_r(A_{st})$$

$$\leqslant (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \min \left\{ (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_{st}), \right.$$

$$\left. (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\alpha \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \tag{5.4.22}$$

证 由定理 5.4.1,定理 5.4.8,Hölder 不等式(5.2.17)′及杨格不等式(5.2.5),可得式(5.4.20). 由定理 5.4.1,定理 5.4.8, Hölder 不等式(5.2.17)′及杨格不等式(5.2.6)可得式(5.4.21). 由定理 5.4.1,定理 5.4.8,Hölder 不等式(5.2.14),琴生不等式(5.2.10)及杨格不等式(5.2.6),即得(5.4.22). □

在定理 5.4.11 中令 $l=1$,可得

推论 1 设 $A_t \in Q^{n\times n}$,$\alpha_t >$,$t=1,\cdots,m$,则对任意正整数 $k \leqslant n$,

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\geqslant 1$时,有

$$\sum_{r=1}^{k} \left| \delta_r\left(\prod_{t=1}^{m} A_t \right) \right| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r\left(\prod_{t=1}^{m} A_t \right)$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{k} \prod_{t=1}^{m} \sigma_r(A_t)$$

$$\leqslant \prod_{t=1}^{m} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_t) \right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$

$$\leqslant \left[\alpha \prod_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{r=1}^{k} \sigma_1^{\alpha_t}(A_t) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.4.23}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right|\leqslant\sum_{r=1}^{k}\sigma_r\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{l}\sigma_r(A_t)$$

$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$

$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_t) \qquad (5.4.24)$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$且$\frac{1}{\alpha_t}\leqslant 1(1\leqslant t\leqslant m)$时，有

$$\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right|\leqslant\sum_{r=1}^{k}\sigma_r\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_t)$$

$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$

$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1(A_t) \qquad (5.4.25)$$

在定理 5.4.11 中令 $m=2$，可得

推论 2 设 $A_s,B_s\in Q^{n\times n}$，$s=1,\cdots,l$，$p,q>0$，则对任意正整数 $k\leqslant n$，

1° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}>1$时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}|\delta_r(A_sB_s)|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_sB_s)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1{}^{p}(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^{q}(B_s)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left[\frac{\alpha}{p} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,p}(A_s) + \frac{\alpha}{q} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,q}(B_s) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (5.4.26)$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} |\delta_r(A_sB_s)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_sB_s)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$

$$\leqslant (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,p}(A_s) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,q}(B_s) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_s) \right] \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(B_s) \right] \qquad (5.4.27)$$

3° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1, \frac{1}{p}\leqslant 1, \frac{1}{q}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} |\delta_r(A_sB_s)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_sB_s)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,p}(A_s) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\,q}(B_s) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_s) \right] \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(B_s) \right] \qquad (5.4.28)$$

在定理 5.4.11 中,令 $m=k, l=1$,可得

推论 3 设 $A, B \in Q^{n\times n}$, $p, q>0$,则对任意正整数 $k\leqslant n$,

1° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\geqslant 1$时,有

$$\sum_{r=1}^{k} |\delta_r(AB)| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(AB)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B) \\
&\leqslant \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{k}(A) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left[\frac{\alpha}{p} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{p}(A) + \frac{\alpha}{q} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{5.4.29}
$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k} |\delta_r(AB)| &\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(AB) \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B) \\
&\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{p}(A) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A) \right] \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]
\end{aligned}
\tag{5.4.30}
$$

3° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,\frac{1}{p}\leqslant 1,\frac{1}{q}\leqslant 1$时，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k} |\delta_r(AB)| &\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(AB) \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B) \\
&\leqslant \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{p}(A) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{p}(A) \right] \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{q}(B) \right]
\end{aligned}
\tag{5.4.31}
$$

定理 5.4.12 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$，$1\leqslant s\leqslant l$，$1\leqslant t\leqslant m$，$p\geqslant 1$，则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_{st})\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n$$

(5.4.32)

证 由定理 5.4.9 之推论，即式(5.4.16)和闵可夫斯基不等式(5.2.37)，即得

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1{}^p\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_{st})\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n \qquad \square$$

在定理 5.4.12 中，令 $m=2$，可得

推论 1 设 $A_s,B_s\in Q^{n\times n}$，$1\leqslant s\leqslant l$，$p\geqslant 1$，则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s+B_s)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(B_s)\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n$$

(5.4.33)

在定理 5.4.12 中，令 $l=1$，$m=2$，可得

推论 2 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，$p\geqslant 1$，则

$$\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A+B)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A)\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(B)\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n \quad (5.4.34)$$

定理 5.4.13 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，且 A,B 均可逆，则

$$\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s{}^2(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_{n-s+1}^2(B)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sigma_1(A)\sigma_{n-s+1}(B)}{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\cdot\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\sigma_{n-s+1}(B)\right]^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\cdot\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)\right]^2 \tag{5.4.35}$$

证 由定理 5.4.7 与 Po′lya-Szego 不等式(5.2.40)即得. □

§5.5 四元数矩阵迹的不等式(Ⅰ)

矩阵的迹作为矩阵的一个数值特征,我们已在第四章中讨论过四元数矩阵的迹的定义及有关性质,本章将在此基础上给出四元数矩阵的乘积与和的迹的一系列不等式.

定理 5.5.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A) \tag{5.5.1}$$

特别当 A 为自共轭半正定阵时,有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{tr}A=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{5.5.2}$$

证 设 $A=(a_{ij})$,在式(5.4.1)中令 $k=n$,则有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|=\left|\sum_{s=1}^{n}a_{ss}\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(A)|\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)$$

故式(5.5.1)成立. □

定理 5.5.2 设 $A\in SC_n(Q)$, $P\in Q^{m\times n}$,则

1° $(\mathrm{tr}PAP^*)^2\leqslant\mathrm{tr}A^2(\mathrm{tr}PP^*)^2$ (5.5.3)

2° 当 $A\geqslant0$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^2 \leqslant (\mathrm{tr}A)^2 \tag{5.5.4}$$

$$\mathrm{tr}PAP^* \leqslant \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}PP^* \tag{5.5.4$'$}$$

证 1° 由 $A \in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^*$$

其中 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

令 $$PU = B = (b_{ij}) \in Q^{n\times m}$$

则 $$PAP^* = B\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)B^* \in Q^{m\times m}$$

于是由柯西—施瓦兹不等式(5.2.27)及琴生不等式(5.2.9)，有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tr}PAP^*)^2 &= \Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} b_{st}\lambda_t\bar{b}_{st}\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} \lambda_t N(b_{st})\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^2 \sum_{t=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^2 \Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&= \mathrm{tr}A_t^2(\mathrm{tr}BB^*)^2 = \mathrm{tr}A^2(\mathrm{tr}PP^*)^2
\end{aligned}$$

故式(5.5.3)成立. □

2° 当 $A \geqslant 0$ 时，有 $\lambda_s \geqslant 0, s = 1, \cdots, n$，且

$$\mathrm{tr}A^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \leqslant (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 = (\mathrm{tr}A)^2$$

故式(5.5.4)成立，再由式(5.5.3)及(5.5.4)即得式(5.5.4)$'$成立. □

定理 5.5.2$'$ 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，且 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3^* \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$，则

$$(\mathrm{tr}A_3A_3^*)^2 \leqslant \mathrm{tr}A_1^2(\mathrm{tr}A_2)^2 \tag{5.5.5}$$

$$\operatorname{tr}A_3A_3^* \leqslant \operatorname{tr}A_1\operatorname{tr}A_2 \qquad (5.5.6)$$

证 由定理 4.3.3,可设 $A = SS^*$, $S = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \in Q^{n\times n}$,则

$$A = \begin{pmatrix} CC^* & CD^* \\ DC^* & DD^* \end{pmatrix}, \text{又 } A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3^* \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix},$$

于是有 $A_1 = CC^*$, $A_2 = DD^*$, $A_3 = DC^*$,从而由式(5.5.3)及定理 4.3.19,定理 4.2.12,得

$$\begin{aligned}(\operatorname{tr}A_3A_3^*)^2 &= (\operatorname{tr}DC^*CD^*)^2 \\ &\leqslant \operatorname{tr}(C^*C)^2(\operatorname{tr}DD^*)^2 \\ &= \operatorname{tr}(CC^*)^2(\operatorname{tr}DD^*)^2 \\ &= \operatorname{tr}A_1^2(\operatorname{tr}A_2)^2\end{aligned}$$

故式(5.5.5)成立.

由 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,及定理 4.3.8 知 A_1 也是半正定自共轭阵,则由式(5.5.4),有

$$\operatorname{tr}A_1^2 \leqslant (\operatorname{tr}A_1)^2$$

从而由上式及式(5.5.5)即得式(5.5.6). □

定理 5.5.3 设 $A, B, C \in SC_n(Q)$, $A > 0$, $B \geqslant C \geqslant 0$,则

$$\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A+B)^{-1}B] \geqslant \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A+C)^{-1}C] \qquad (5.5.7)$$

证 由 $\operatorname{tr}[(A+B)^{-1}B] = \operatorname{tr}[(A+B)^{-1}(A+B-A)]$

$$= \operatorname{tr}I_n - \operatorname{tr}[(A+B)^{-1}A]$$

且由 $B \geqslant C \geqslant 0$, $A > 0$,可得

$$(A+B)^{-1} \leqslant (A+C)^{-1}$$

故有

$$\operatorname{tr}[A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{-1}A^{\frac{1}{2}}] \leqslant \operatorname{tr}[A^{\frac{1}{2}}(A+C)A^{\frac{1}{2}}]$$

从而由定理 4.2.10,得

$$\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A+B)^{-1}A] \leqslant \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A+C)^{-1}A]$$

由上可得

$$\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A+B)^{-1}B] = \operatorname{Re}[\operatorname{tr}I_n - \operatorname{tr}((A+B)^{-1}A)]$$

$$=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}I_n)-\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A+B)^{-1}A)]$$
$$\geqslant\mathrm{Re}(\mathrm{tr}I_n)-\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+C)^{-1}A]$$
$$=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}I_n-\mathrm{tr}((A+C)^{-1}A)]$$
$$=\mathrm{Re}[(\mathrm{tr}((A+C)^{-1}C)]. \qquad \square$$

定理 5.5.4 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$m$ 为正整数，则

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)^m]\leqslant\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^mB^m)] \tag{5.5.8}$$

证 由式(4.3.22)，有

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)^m]=\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m \qquad ①$$

因$(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，故由定理 4.3.6 即式(4.3.5)及式(4.3.21)，(5.3.26)，(4.2.27)，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m &= \sum_{s=1}^{n}\lambda_s((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m)\\
&= \sum_{s=1}^{n}\lambda_s((AB)^m)\\
&\leqslant \sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A^mB^m)\\
&= \sum_{s=1}^{n}\lambda_s((A^m)^{\frac{1}{2}}B^m(A^m)^{\frac{1}{2}})\\
&=\mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}}B^m(A^m)^{\frac{1}{2}})\\
&=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}}B^m(A^m)^{\frac{1}{2}})]\\
&=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}}(A^m)^{\frac{1}{2}}B^m)]\\
&=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^mB^m)] \qquad ②
\end{aligned}$$

由式①，②即得式(5.5.8). $\square$

注 不等式(5.5.8)是 Bellman 在 1980 年世界第二届不等式会议上对正定对称矩阵所提出的猜想之一，即

$$\mathrm{tr}(AB)^m\leqslant\mathrm{tr}(A^mB^m),\ m\in N$$

在四元数矩阵上的表现形式.

定理 5.5.5 设 $P\in Q^{n\times n}$，$A\in SC_n(Q)$，$p,q\in R^+$，则

1° $$\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s-1}(A)\lambda_s(PP^*)\leqslant \mathrm{tr}PAP^*\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*)\tag{5.5.9}$$

2° 当 $p>1$，$q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$ 时，有
$$|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}[\mathrm{tr}(PP^*)^q]^{\frac{1}{q}}\tag{5.5.10}$$

3° 当 $p>1$，$q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$ 时，有
$$|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant n^{1-r}[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}[\mathrm{tr}(PP^*)^q]^{\frac{1}{q}}\tag{5.5.11}$$

证 1°在定理 5.3.13 中令 $k=n$ 即得(5.5.9)式.

2° 由 $A\in SC_n(Q)$，则 $A^2\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，且由命题 5.3.1 知
$$\lambda_s((A^2)^{p/2})=\lambda_s^{p/2}(A^2),\ s=1,\cdots,n$$
于是
$$\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{p/2}(A^2)$$
$$=\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|^p=\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|^p \qquad ①$$
$$\mathrm{tr}(PP^*)^q=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*) \qquad ②$$
从而由 Hölder 不等式(5.2.22)及式①，②，有
$$\left|\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)\right|$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|\lambda_s(PP^*)$$
$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left[\operatorname{tr}(A^2)^{p/2}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\operatorname{tr}(PP^*)^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad ③$$

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|\lambda_s(PP^*)$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s(A)^p)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left[\operatorname{tr}(A^2)^{p/2}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}} \quad ④$$

从而由式③,④及(5.5.9),即知式(5.5.10)成立. □

3° 由 Hölder 不等式(5.2.23)仿上 2° 证明即可证得式(5.5.11). □

定理 5.5.6 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B) \tag{5.5.12}$$

证 由 $A\in SC_n(Q)$及定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\operatorname{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^*$$

现取实数 x 满足:$\lambda_s(A)+x=\lambda_s(A+xI)>0,1\leqslant s\leqslant n$,则有

$$A+xI=U\Lambda U^*,\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1(A)+x,\cdots,\lambda_n(A)+x)$$

于是由定理 4.2.10,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)+x\operatorname{tr}B&=\operatorname{Re}[\operatorname{tr}((A+xI)B)]\\&=\operatorname{Re}[\operatorname{tr}((A+xI)^{\frac{1}{2}}(A+xI)^{\frac{1}{2}}B)]\\&=\operatorname{Re}[\operatorname{tr}((A+xI)^{\frac{1}{2}}B(A+xI)^{\frac{1}{2}})]\\&=\operatorname{tr}[(A+xI)^{\frac{1}{2}}B(A+xI)^{\frac{1}{2}}]\end{aligned}$$

又由定理 5.3.10,有

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B) + x\operatorname{tr}B$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B) + x \sum_{s=1}^{n} \lambda_{n-s+1}(B)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A + xI)\lambda_{n-s+1}(B)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s((A + xI)B) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}((A + xI)B))$$

$$= \operatorname{tr}((A + xI)^{\frac{1}{2}}B(A + xI)^{\frac{1}{2}})$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A + xI)\lambda_s(B) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_s(B) + x\operatorname{tr}B \qquad ②$$

由式①,②即知式(5.5.12)成立. □

定理 5.5.7 设 $A, B, C \in SC_n(Q)$,且 $B = C - A$,则

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(B) = \operatorname{tr}B^2 \geqslant \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s(C) - \lambda_s(A)]^2 \qquad (5.5.13)$$

证 由 $CA = (AC)^*$ 知

$$\operatorname{tr}(AC + CA) = 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AC)$$

于是由上式及式(5.5.12),有

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}B^2 &= \operatorname{tr}(C^2 + A^2 - CA - AC) \\
&= \operatorname{tr}C^2 + \operatorname{tr}A^2 - \operatorname{tr}(AC + CA) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(C) + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(A) - 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AC) \\
&\geqslant \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s^2(C) + \lambda_s^2(A) - 2\lambda_s(C)\lambda_s(A)] \\
&= \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s(C) - \lambda_s(A)]^2
\end{aligned}$$

□

定理 5.5.8 设 $A_t \in Q^{n\times n}$, $p_t > 0$, $t = 1, \cdots, m$, $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$,则

$$|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t| \leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t}\operatorname{tr}(AA^*)^{\frac{p_t}{2}} \tag{5.5.14}$$

证 在定理 5.4.10 中令 $k=n$，即得. □

在定理 5.5.8 中，取 $A_t \in SC_n(Q)$，即得

推论 1 设 $A_t \in SC_n(Q)$，$p_t > 0$，$t=1,\cdots,m$，$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$，则

$$|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t| \leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t}\operatorname{tr}A^{p_t} \tag{5.5.15}$$

在定理 5.5.8 中，令 $m=2$，可得

推论 2 设 $A,B \in Q^{n\times n}$，$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$|\operatorname{tr}AB| \leqslant \frac{1}{p}\operatorname{tr}(AA^*)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q}\operatorname{tr}(AA^*)^{\frac{q}{2}} \tag{5.5.16}$$

特别当 $A,B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则由式(5.5.16)，可得

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB) \leqslant |\operatorname{tr}AB| \leqslant \frac{1}{p}\operatorname{tr}A^p + \frac{1}{q}\operatorname{tr}A^q \tag{5.5.17}$$

若在(5.4.17)中令 $p=q=\frac{1}{2}$，可知，当 $A,B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$时，有

$$2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB) \leqslant \operatorname{tr}A^2 + \operatorname{tr}B^2 \tag{5.5.18}$$

或

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A-B)^2) \geqslant 0, \tag{5.5.19}$$

定理 5.5.9 设 $A,B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B>2$，则

$$\sqrt{\operatorname{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\operatorname{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\operatorname{Retr}AB}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{s=1}^{N}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2} < \frac{1}{2}(\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B) \tag{5.5.20}$$

证 由式(4.3.20)及在式(5.3.14)中取 $k=2$，在式(5.5.11)中取 $p=q=2$，得

$$\operatorname{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left[\operatorname{tr}A^2+\operatorname{tr}B^2+2\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2$$

由 $A^2(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$及定理4.3.6之2°易知

$$\operatorname{tr}A^2=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A)\leqslant\left(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\right)^2$$

且等号成立当且仅当 $\operatorname{rank}A\leqslant 1$,这样当 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B>2$ 时,有

$$\operatorname{tr}A^2+\operatorname{tr}B^2<(\operatorname{tr}A)^2+(\operatorname{tr}B)^2$$

又

$$0\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\leqslant\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\right]\cdot\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)\right]=\operatorname{tr}A\operatorname{tr}B$$

即知

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2<(\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B)^2$$

故式(5.5.20)得证. □

定理 5.5.10 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$, $\alpha_t>0$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^*)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^*)^{\frac{\alpha_t}{2}} \tag{5.5.21}$$

2° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.5.22}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\min\left\{(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}\cdot A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{5.5.23}$$

证 在定理 5.4.11 中,令 $k=n$,即得. □

在定理 5.5.10 中,若取诸 $A_{st}\in SC_n(Q)$,则有 $A_{st}A_{st}^{*}=A_{st}^{2}$,于是可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t>0$, $s=1,\cdots,l$; $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t} \tag{5.5.24}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$时，有

$$\sum_{s=1}^{l} \mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right] \leqslant \left|\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \left|\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.25}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$时，有

$$\sum_{s=1}^{l} \mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right] \leqslant \left|\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \left|\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_{st}\right| \leqslant (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \min\left\{(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}, (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \tag{5.5.26}$$

在推论 1 中令 $l=1$，可得

推论 2 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_t>0$，$t=1,\cdots,m$，则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$时，有

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_{st}\right) \leqslant \left|\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\mathrm{tr} A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \mathrm{tr} A_t^{\alpha_t} \tag{5.5.27}$$

2° 当$\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_m}=\dfrac{1}{\alpha}>1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\tag{5.5.28}$$

3° 当$\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_m}=\dfrac{1}{\alpha}<1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|\leqslant n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\min\left\{n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t,\ n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t})\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\tag{5.5.29}$$

由推论 2,可得

推论 3 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t>0$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m\geqslant1$时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t\right)^{\alpha_t}\tag{5.5.30}$$

2° 当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r<1$时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{1-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t\right)^{\alpha_t}\tag{5.5.31}$$

证 由命题 5.4.1 知,$A_t^{\alpha_t}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,令 $\beta_t=\dfrac{1}{\alpha_t}(t=1,\cdots,m)$,则$\dfrac{1}{\beta_1}+\cdots+\dfrac{1}{\beta_m}\geqslant1$,于是由推论 2 之 1°,2°,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A^{\alpha_t})^{\beta_t}\right]^{\frac{1}{\beta_t}}=\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A\right)^{\alpha_t}$$

故 1°成立.同理可证 2°. □

在推论 3 中,令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$,可得

推论 4 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $\alpha>0$,则

1° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{m}$时，有

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\alpha}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\alpha} \tag{5.5.32}$$

2° 当$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{m}$时，有

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\alpha}\right| \leqslant n^{1-m\alpha}\left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\alpha} \tag{5.5.33}$$

在推论 4 中，分别令 $\alpha = \frac{1}{m}, m, 1$，可得

推论 5 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$t = 1, \cdots, m$，则

1° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.34}$$

2° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{m}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{m} \tag*{(5.5.34)$'$}$$

3° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t \tag{5.5.35}$$

推论 6 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$t = 1, \cdots, m$，则

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant n^{m-1} \sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{m} \lambda_s(A_t) \tag{5.5.36}$$

证 由式(5.5.35)及切比雪夫不等式(5.2.42)，有

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t = \prod_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A_t)$$

$$\leqslant n^{m-1} \sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{m} \lambda_s(A_t)$$

故式(5.5.36)成立. □

在推论 2 中，令 $m = 2$，可得

推论 7 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° 当$p, q > 0$且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$时，有

$$|\operatorname{tr}AB| \leqslant (\operatorname{tr}A^p)^{\frac{1}{p}}(\operatorname{tr}B^q)^{\frac{1}{q}} \tag{5.5.37}$$

2° 当 $p,q>0$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}AB| \leqslant n^{1-r}(\operatorname{tr}A^p)^{\frac{1}{p}}(\operatorname{tr}B^q)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.38}$$

在推论 7 中,分别令 $p=q=2$,与 $p=q=1$,可得

推论 8 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB) \leqslant |\operatorname{tr}AB| \leqslant (\operatorname{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tr}B^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.5.39}$$

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB) \leqslant |\operatorname{tr}AB| \leqslant \operatorname{tr}A \ \operatorname{tr}B \tag{5.5.39$'$}$$

注 Richurd Bellman 在 1980 年世界第二届不等式会议上对正定实对称阵提出不等式(常称为 Bellman 不等式)

$$\operatorname{tr}AB \leqslant (\operatorname{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tr}B^2)^{\frac{1}{2}}$$

式(5.5.39)是上述不等式在四元数半正定自共轭阵上的推广,而定理 5.5.10 及其推论是 Bellman 不等式更普遍的推广.

定理 5.5.11 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha_t\in R^-$,$t=1,\cdots,m$,$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$,则

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\alpha_t}\right| \leqslant \operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} \alpha_t A_t \tag{5.5.40}$$

证 由式(5.5.30)及杨格不等式(5.2.4)即得式(5.5.40). □

注 不等式(5.5.40)是杨格不等式在四元数矩阵迹中的推广.

在定理 5.5.11 中,令 $m=1$,可得

定理 5.5.12 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$t=1,\cdots,m$,则

1° $$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right| \leqslant \operatorname{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t \tag{5.5.41}$$

2° $$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \operatorname{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^m \tag{5.5.42}$$

3° $$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|^{\frac{1}{m}} \leqslant \operatorname{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t \tag{5.5.43}$$

$$4^\circ \quad \left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \min\left\{\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}, \left(\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^{m}\right\} \tag{5.5.44}$$

证 1° 在定理 5.5.11 中令 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=\frac{1}{m}$ 即得式(5.5.41).

2° 在 1° 中把 A_t 换成 $A_t^{\frac{1}{m}}$ 即得式(5.5.42).

3° 由式(5.5.35)及几何—算术平均值不等式即得式(5.5.43).

4° 由式(5.5.42)及(5.5.43)即得式(5.5.44). □

注 1 式(5.5.41),(5.5.43)均可视为几何—算术平均值不等式在四元数矩阵迹上的推广.

注 2 可以举出例子说明 $\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}$, $(\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t)^{m}$ 之间没有必然的大小关系.

例如:设 $A_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\cdots=A_8=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $m=8$,则

$$\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}=\frac{1}{8}\left[3^8+6\left(\frac{2}{3}\right)^8+1\right]$$

$$>1=\left[\frac{1}{8}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^8=\left[\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t\right]^m$$

又设 $A_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $m=2$,则有

$$\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}=\frac{1}{2}\left[3^2+(1+2^2)\right]=7$$

$$<9=\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\right]^2=\left[\frac{1}{m}\mathrm{tr}\sum_{t=1}^{m}A_t\right]^m$$

定理 5.5.13 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$t=1,\cdots,m$，则

$$\max\left\{\begin{array}{l}\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A^m\right|^{\frac{1}{m}},\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|,\\ \left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m\end{array}\right\}\leqslant\prod_{t=1}^{m}\mathrm{tr}A_t \tag{5.5.45}$$

证 由定理 5.5.10 的推论 5 即得.

注 可以举例子证明，$\left|\mathrm{tr}\prod\limits_{t=1}^{m}A^m\right|^{\frac{1}{m}}$，$\left|\mathrm{tr}\prod\limits_{t=1}^{m}A^t\right|$，$\left|\mathrm{tr}\prod\limits_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$ 三者之间没有必然的大小关系.

例 1 取 $A_t=I$，$t=1,\cdots,m(\geqslant2)$，且 $n\geqslant2$，则有

$$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=n^{\frac{1}{m}}<n=\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A^t\right|$$

若取 $m=2$，$A_1=\begin{bmatrix}2 & -2\\2 & 2\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则有

$$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\frac{3}{2}=\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|$$

例 2 取 $A_t=I$，$t=1,\cdots,m(\geqslant2)$，且 $n\geqslant2$，则有

$$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=n^{\frac{1}{m}}<n^m=\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$$

若取 $m=2$，$A_1=\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{m}\right|^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^{m}$$

例 3 取 $A_t=I,t=1,\cdots,m(\geqslant 2)$，且 $n\geqslant 2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|=n<n^n=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^{m}$$

取 $A_1=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},m=2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|=\frac{3}{2}>\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^{m}$$

上述三例表明，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{m}\right|^{\frac{1}{m}}$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{m}\right|^{\frac{1}{m}}$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^{m}$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^{m}$ 之间没有必然的大小关系.

定理 5.5.14 设 $A\in SC_n(Q),\alpha\in R$，则

1° 当 $A\geqslant 0,\alpha\geqslant 1$ 时，有

$$n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha\leqslant \operatorname{tr}A^\alpha\leqslant(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.46}$$

2° 当 $A\geqslant 0,0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$(\operatorname{tr}A)^\alpha\leqslant \operatorname{tr}A^\alpha\leqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.47}$$

3° 当 $A>0,\alpha\leqslant 0$ 时，有

$$\operatorname{tr}A^\alpha\geqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.48}$$

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，由命题 5.3.1 之 3° 知 $\lambda_1^\alpha,\cdots,\lambda_n^\alpha$ 是 A^α 的特征值，于是由定理 4.3.6 之 2°，再分别利用不等式(5.2.28)，(5.2.29)，(5.2.30)即可得式(5.5.46)，(5.5.47)，(5.5.48).

□

在定理 5.5.14 中令 α 分别为 $m,\frac{1}{m},-\frac{1}{m},-m,-1$,可得

推论 设 $A\in SC_n(Q)$, $m\in N$,则

1° 当 $A\geqslant 0$ 时,有

$$n^{1-m}(\mathrm{tr}A)^m\leqslant \mathrm{tr}A^m\leqslant(\mathrm{tr}A)^m \tag{5.5.49}$$

$$(\mathrm{tr}A)^{\frac{1}{m}}\leqslant \mathrm{tr}A^{\frac{1}{m}}\leqslant n^{1-\frac{1}{m}}(\mathrm{tr}A)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.50}$$

2° 当 $A>0$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^{-\frac{1}{m}}\geqslant n^{1+\frac{1}{m}}(\mathrm{tr}A)^{-\frac{1}{m}} \tag{5.5.51}$$

$$\mathrm{tr}A^{-m}\geqslant n^{m+1}(\mathrm{tr}A)^{-m} \tag{5.5.52}$$

$$(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}A^{-1})\geqslant n^2 \tag{5.5.53}$$

定理 5.5.15 设 $A_s\in SC_n(Q)$, $s=1,\cdots,l$,则

1° 当 $A_t\geqslant 0$, $t=1,\cdots,l$, $\alpha\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\leqslant\left(\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.54}$$

2° 当 $A_t\geqslant 0$, $s=1,\cdots,l$, $0<\alpha\leqslant 1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\leqslant(nl)^{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.55}$$

3° 当 $A_t>0$, $s=1,\cdots,l$, $\alpha\leqslant 0$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\geqslant(nl)^{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.56}$$

4° 当 $A_s>0$, $s=1,\cdots,l$ 时,有

$$\frac{nl}{\mathrm{tr}A_1^{-1}+\cdots+\mathrm{tr}A_l^{-1}}\leqslant\frac{\mathrm{tr}A_1+\cdots+\mathrm{tr}A_l}{nl} \tag{5.5.57}$$

证 在定理 5.5.10 的推论 1 中,令 $m=1$,由其中的式(5.5.24)及(5.5.25),可得

$$\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s\leqslant\left(\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad ①$$

在式①中把 A_s 换成 $A_s^{\frac{1}{\alpha}}$，再把 $\frac{1}{\alpha}$ 换成 α 即得式(5.5.54)，同理由式(5.5.26)可得式(5.5.55)．由式(5.5.48)及(5.2.30)可得式(5.5.56)．在式(5.5.56)中令 $\alpha=-1$，即得式(5.5.57)． □

注 式(5.5.55)是调和—算术平均值不等式在四元数矩阵迹上的推广．但须注意，经典的调和—几何平均值不等式不能直接推广到四元数矩阵迹上来，即下述不等式

$$\frac{l}{\operatorname{tr}A_1^{-1}+\cdots+\operatorname{tr}A_l^{-1}}\leqslant\sqrt[l]{|\operatorname{tr}A_1\cdots A_l|} \qquad (*)$$

在四元数矩阵迹上一般不再成立．比如，令

$$A_1=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&4&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad (5.5.58)$$

则不难验证 A_1,A_2,A_3 均为正定实对称阵(当然更是四元数自共轭正定阵)．容易算得：

$$A_1A_2A_3=\begin{pmatrix}-15&25&0\\-9&14&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $\operatorname{tr}A_1A_2A_3=-15+14+1=0$，但 $\operatorname{tr}A_1^{-1}+\operatorname{tr}A_2^{-1}+\operatorname{tr}A_3^{-1}>0$，故此时，不等式($*$)不成立，此反例也说明调和—几何平均值不等式即使在实对称正定阵中一般也是不成立的．

定理 5.5.16 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_t>0$，$s=1,\cdots,l$，$t=1,\cdots,m$，则

1° 当 $\alpha_t\geqslant1$，$t=1,\cdots,m$，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right|\leqslant(nl)^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t} \qquad (5.5.59)$$

2° 当 $\alpha_t\leqslant1$，$t=1,\cdots,m$，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha t} \tag{5.5.60}$$

证 1° 由式(5.5.35),(5.5.46),(5.5.28),(5.5.46)可得

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right| &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m} l^{\alpha_t-1}\sum_{s=1}^{l}(\operatorname{tr}A_{st})^{\alpha_t}\\ &= l^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}(\operatorname{tr}A_{st})^{\alpha_t}\\ &\leqslant l^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}n^{\alpha_t-1}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\\ &= l^{r-m}\cdot n^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\\ &= (nl)^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\end{aligned}$$

故式(5.5.57)成立.

2° 由式(5.5.35),(5.5.47),(5.2.29),(5.5.47),可得

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right| &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m} n^{1-\alpha_t}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &= n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &= n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}\right)^{\alpha_t}\end{aligned}$$

$$\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}(\operatorname{tr}A_{st})^{\alpha_t}$$

$$\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}$$

故式(5.5.58)成立. □

在定理 5.5.16 中,令 $m=1$,可得

推论 1 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha>0$,$s=1,\cdots,l$,

1° 当$\alpha\geqslant1$ 时,有

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_s\right)^{\alpha}\leqslant(nl)^{\alpha-1}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_s^{\alpha} \tag{5.5.61}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant1$ 时,有

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_s\right)^{\alpha}\leqslant n^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_s^{\alpha} \tag{5.5.62}$$

在定理 5.5.16 中,令 $l=1$,可得

推论 2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha_t>0$,$t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\alpha_t\geqslant1$,$t=1,\cdots,m$,$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t} \tag{5.5.63}$$

2° 当 $\alpha_t\leqslant1$,$t=1,\cdots,m$,$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t} \tag{5.5.64}$$

在推论 1 中令 $l=2$,可得

推论 3 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha>0$,则

1° 当$\alpha\geqslant1$ 时,有

$$\operatorname{tr}(A+B)^{\alpha}\leqslant(2n)^{\alpha-1}(\operatorname{tr}A^{\alpha}+\operatorname{tr}B^{\alpha}) \tag{5.5.65}$$

特别当 $\alpha=2$ 时,有

$$\operatorname{tr}(A+B)^2\leqslant2n(\operatorname{tr}A^2+\operatorname{tr}B^2) \tag{5.5.66}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant1$ 时,有

$$\operatorname{tr}(A+B)^{\alpha}\leqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A^{\alpha}+\operatorname{tr}B^{\alpha})\tag{5.5.67}$$

特别当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,有

$$\operatorname{tr}\sqrt{A+B}\leqslant\sqrt{n}(\operatorname{tr}\sqrt{A}+\operatorname{tr}\sqrt{B})\tag{5.5.68}$$

在推论 2 中,令 $m=2$,可得

推论 4 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha>0$,则

1° 当 $p,q\geqslant 1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{p}B^{q}|\leqslant n^{p+q-2}\operatorname{tr}A^{p}\operatorname{tr}B^{q}\tag{5.5.69}$$

特别当 $p=q=2$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{2}B^{2}|\leqslant n^{2}\operatorname{tr}A^{2}\operatorname{tr}B^{2}\tag{5.5.70}$$

2° 当 $p,q\leqslant 1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{p}B^{q}|\leqslant n^{2-p-q}\operatorname{tr}A^{p}\cdot\operatorname{tr}B^{q}\tag{5.5.71}$$

特别当 $p=q=\frac{1}{2}<1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}\sqrt{A}\sqrt{B}|\leqslant n\operatorname{tr}\sqrt{A}\cdot\operatorname{tr}\sqrt{B}\tag{5.5.72}$$

定理 5.5.17 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$s=1,\cdots,m$,$r>0$,则

1° 当 $r\geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s\right)^{r}\geqslant\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{r}+[(mn)^{r}-mn]\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{mn}}\tag{5.5.73}$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{r}\geqslant\left\{\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s+[(mn)^{\frac{1}{r}}-mn]\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right\}^{r}\tag{5.5.74}$$

证 1° 由琴生不等式的加强不等式(5.2.12),有

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s)\right]^{r}\geqslant\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}[\lambda_t(A_s)]^{r}$$

$$+[(mn)^r-mn]\Big[\prod_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s)\Big]^{\frac{r}{mn}} \quad ①$$

由命题 5.3.1 知

$$\lambda_t(A_s^r)=[\lambda_t(A_s)]^r, 1\leqslant s<m, 1\leqslant t\leqslant n. \quad ②$$

又由定理 4.3.6，有

$$\mathrm{tr}A_s=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s), \quad \mathrm{tr}A_s^r=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s^r) \quad ③$$

$$|A_s|=\prod_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s), 1\leqslant s\leqslant m \quad ④$$

从而由式①，②，③，④即得式(5.5.73)．同理可证式(5.5.74)． □

在定理 5.5.17 中令 $m=1$，可得

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$r\in R^+$，则

1° 当 $r\geqslant 2$ 时，有

$$(\mathrm{tr}A)^r\geqslant \mathrm{tr}A^r+(n^r-n)|A|^{\frac{r}{n}} \quad (5.5.75)$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$\mathrm{tr}A^r\geqslant[\mathrm{tr}A+(n^{\frac{1}{r}}-n)|A|^{\frac{1}{n}}]^r \quad (5.5.76)$$

定理 5.5.18 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_s>0$，$s=1,\cdots,m$，则

1° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m\geqslant 1$ 时，有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}\leqslant n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s} \quad (5.5.77)$$

2° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha<1$ 时，有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}\leqslant n^{m-\alpha}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s} \quad (5.5.78)$$

证 设 $\lambda_{1s}\geqslant\lambda_{2s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}\geqslant 0$ 是 $A_s(1\leqslant s\leqslant m)$ 的 n 个特征值，则由命题 5.3.1 知，$\lambda_{1s}^{\alpha_s}\geqslant\lambda_{2s}^{\alpha_s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}^{\alpha_s}$ 是 $A_s^{\alpha_s}$ 的 n 个特征值．于是由切比雪夫不等式(5.2.42)及赫尔德不等式(5.2.17)，有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}=\prod_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\alpha_s}$$

$$\leqslant n^{m-1}\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{m}\lambda_{ts}^{\alpha_s}$$

$$\leqslant n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}\left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_{ts}\right)^{\alpha_s}$$

$$= n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s}$$

故式(5.5.77)成立.

同理,由切比雪夫不等式(5.2.42)及赫尔德不等式(5.2.18),即可得式(5.5.78). □

在定理 5.5.18 中,令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$,可得

推论 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $\alpha\geqslant\frac{1}{m}$,则

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\leqslant n^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.79}$$

特别在式(5.5.79)中令 $\alpha=\frac{1}{m}$,可得

$$\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_1}\cdot\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_2}\cdots\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_m}\leqslant n^{m-1}\sqrt[m]{\mathrm{tr}A_1\cdots\mathrm{tr}A_m} \tag{5.5.80}$$

定理 5.5.19 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $1<\alpha<\beta$,则

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_n(A_s)\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}$$
$$\leqslant\frac{1}{n^{\beta}}\left(\mathrm{tr}\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}A_s^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_1(A_s)\} \tag{5.5.81}$$

证 设 A_s 的 n 个特征值 $\lambda_{1s}\geqslant\lambda_{2s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}$, $1\leqslant s\leqslant m$,则由几何—算术平均值不等式及命题 5.2.2,有

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_{ns}\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{n}\lambda_{ts}\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}}{mn}\right)$$
$$\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\alpha}}{mn}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\beta}}{mn}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_{1s}\}$$

由此即得不等式(5.5.81). □

在定理 5.5.19 中,令 $m=1$,可得

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1<\alpha<\beta$,则

$$\lambda_n(A)\leqslant|A|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{tr}A\leqslant n^{-\frac{1}{\alpha}}(\operatorname{tr}A^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqslant n^{-\frac{1}{\beta}}(\operatorname{tr}A^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\lambda_1(A) \qquad (5.5.82)$$

定理 5.5.20 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$s=1,\cdots,m$,则

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_n(A_s)\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{1}{n^k}\operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt[k]{A_1}+\cdots+\sqrt[k]{A_m}}{m}\right)^k\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}\operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{A_1}+\cdots+\sqrt{A_m}}{m}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(\frac{A_1+\cdots+A_m}{m}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{tr}\sqrt{\frac{A_1{}^2+\cdots+A_m{}^2}{m}}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\operatorname{tr}\sqrt[k]{\frac{A_1{}^k+\cdots+A_m{}^k}{m}}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_1(A_s)\} \qquad (5.5.83)$$

证 由幂平均不等式(5.2.45)即得. □

定理 5.5.21 设 $A_t\in Q^{n\times n}$,$\alpha_t>0$,$t=1,\cdots,m$,记 $B=A_1\cdot\cdots\cdot A_m$,则

1° 当 $\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$ 时,有

$$\operatorname{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)\leqslant\operatorname{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A_t{}^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}} \qquad (5.5.84)$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$ 时，有

$$\operatorname{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)\leqslant \operatorname{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\leqslant n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A_t{}^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}} \tag{5.5.85}$$

证 由式(4.2.29)，(5.4.1)，有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}B)=\operatorname{Re}\sum_{s=1}^{n}\delta_s(B)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(B)=\operatorname{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由式(5.4.14)及 Hölder 不等式(5.2.17)′，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(B)=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\prod_{t=1}^{m}\sigma_s(A_t)\\&\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{n}\sigma_s^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}\\&=\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A_t{}^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}\end{aligned}$$

故式(5.5.84)成立．同理由式(5.4.14)及 Hölder 不等式(5.2.18)即知式(5.5.85)成立． □

推论 设 $A_t\in Q^{n\times n}$，$t=1,\cdots,m$，$r\in N$，$r\leqslant m$，记 $B=A_1\cdot\cdots\cdot A_m$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)&\leqslant\operatorname{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A_t{}^*A_t)^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant\left[\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m}(A_t{}^*A_t)^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{m}{r}}\end{aligned} \tag{5.5.86}$$

证 令 $\alpha_t=\frac{1}{r}(t=1,\cdots,m)$，由 $r\leqslant m$，则有 $\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{r}=\frac{m}{r}\geqslant 1$，

故由式(5.5.84)知,式(5.5.86)的前两个不等号成立.再由几何—算术平均值不等式即知最后一个不等号亦成立. □

定理 5.5.22 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t > 0$, $s = 1, \cdots, l$, $t = 1, \cdots, m$,则

1° 当 $\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_m} \geqslant 1$ 时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right) \leqslant \left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}} \tag{5.5.87}$$

2° 当 $\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_m} = r \leqslant 1$ 时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right) \leqslant \left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right| \leqslant (nl)^{1-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}} \tag{5.5.88}$$

证 1° 由式(5.5.27),(5.5.28)及 Hölder 不等式(5.2.17)′,有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right| &\leqslant \sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right| \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}} \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}\end{aligned}$$

故式(5.5.87)成立.

2° 由式(5.5.29)及 Hölder 不等式(5.2.18)′,有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} n^{1-r} \prod_{t=1}^{m} (\mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t})^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$= n^{1-r} \sum_{s=1}^{l} \prod_{t=1}^{m} (\mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t})^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant n^{1-r} \cdot l^{1-r} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t} \right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$= (nl)^{1-r} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t} \right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

故式(5.5.88)成立. □

在定理 5.5.22 中令 $m=1$,可得

推论 1 设 $A_s \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha \in R^+$,则

1° 当 $\frac{1}{\alpha} \geqslant 1$ 时,有

$$\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s \leqslant \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_s^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.89}$$

2° 当 $0 < \frac{1}{\alpha} \leqslant 1$ 时,有

$$\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s \leqslant (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_s^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.90}$$

在定理 5.5.22 中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = m$,可得

推论 2 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$,则

$$\left| \mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} \prod_{t=1}^{m} A_{st} \right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{m} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.91}$$

特别在式(5.5.91)中取 $m=2$,可得

$$\left| \mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s B_s \right|^2 \leqslant \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s^2 \right) \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} B_s^2 \right) \tag{5.5.92}$$

$$\left(\mathrm{Re} \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s B_s \right) \right)^2 \leqslant \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s^2 \right) \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} B_s^2 \right) \tag{5.5.92$'$}$$

注 不等式(5.5.92)与(5.5.92)′可视为柯西不等式在四元数矩阵迹中的推广.

定理 5.5.23 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left\{\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left[\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{*}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}{}^{*}A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}\qquad(5.5.93)$$

证 因为

$$\sigma_r{}^{p}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)=\left[\sigma_r{}^{2}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}}$$
$$=\left[\lambda_r\left(\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{*}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right)\right]^{\frac{p}{2}}$$

其中, $r=1,\cdots,n$, $s=1,\cdots,l$, 于是在定理 5.4.12 中令 $k=n$, 并利用上式即得式(5.5.93). □

在定理 5.5.23 中若诸 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, 可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}{}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(5.5.94)$$

注 在式(5.5.94)中取 $n=1$, 可得闵可夫斯基不等式(5.2.37), 故式(5.5.94)是闵可夫斯基不等式在四元数矩阵迹上的推广.

在推论 1 中, 取 $l=1$, 即得:

推论 2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t{}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(5.5.95)$$

特别在式(5.5.95)中分别取 $m=2$, $p=2$, 可得

$$[\operatorname{tr}(A+B)^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant (\operatorname{tr}A^p)^{\frac{1}{p}} + (\operatorname{tr}B^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.96}$$

$$\sqrt{\operatorname{tr}(A_1+\cdots+A_m)^2} \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}A_1^2} + \cdots + \sqrt{\operatorname{tr}A_m^2} \tag{5.5.97}$$

定理 5.5.24 设 $A_{st} \in Q^{n\times n}, s=1,\cdots,m, t=1,\cdots,l, p\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}\left[\left(\sum_{t=1}^{l} A_{st}\right)^*\left(\sum_{t=1}^{l} A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \min\left\{\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}[\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}},\right. \\
&\qquad \left.\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned} \tag{5.5.98}$$

证 由式(5.5.93)即知式(5.5.98)的左边不等式成立.

当 $p\geqslant 1$ 时，有 $0<\frac{1}{p}\leqslant 1$，于是由式(5.2.10)，有

$$\left[\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{s=1}^{m}[\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}}, t=1,\cdots,l \quad ①$$

于是由式①，有

$$\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}[\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} \quad ②$$

又由 $p\geqslant 1$ 及式(5.5.46)，有

$$\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}} = \operatorname{tr}((A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p \leqslant (\operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p$$

于是有

$$\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \operatorname{tr}((A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad ③$$

从而由式②，③，即知式(5.5.98)的右边不等式成立. □

在定理 5.5.24 中取 $S_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,l$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{l}A_{st}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_{st}^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\min\left\{\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_{st}^{\,p})^{\frac{1}{p}},\ \sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_{st})^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\qquad(5.5.99)$$

在推论 1 中令 $l=2$,可得

推论 2 设 $A_s,B_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_s+B_s)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}B_s^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\min\left\{\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_s^{\,p})^{\frac{1}{p}}+\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}B_s^{\,p})^{\frac{1}{p}},\right.$$

$$\left.\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_s)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}B_s)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$(5.5.100)$$

定理 5.5.25 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $p,r>0$,则

1° 当 $p\geqslant 1$, $r\geqslant 1$ 时,有

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\,r}\right)\right]^{p}\leqslant\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}\qquad(5.5.101)$$

2° 当 $p\leqslant 1$, $r\leqslant 1$ 时,有

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\,r}\right)\right]^{p}\geqslant\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}\qquad(5.5.102)$$

证 1° 由式(5.5.46)与(5.2.9),有

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\,r}\right)^{p}\leqslant\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\,r}\right)\right]^{p}$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t^{\,r}\right)^{p}\leqslant\left[\sum_{t=1}^{m}(\operatorname{tr}A_t)^{r}\right]^{p}$$

$$\leqslant\left[\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^r\right]^p=\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}$$

故式(5.5.101)成立.

2° 由式(5.5.47)与(5.2.10),有

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^r\right)^p\geqslant\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^r\right)\right]^p$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t^r\right)^p\geqslant\left[\sum_{t=1}^{m}(\operatorname{tr}A_t)\right]^p$$

$$\geqslant\left[\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^r\right]^p=\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}$$

故式(5.5.102)成立. □

定理 5.5.26 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则

$$(\operatorname{tr}A^2)(\operatorname{tr}B^2)\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda_1(A)\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)\lambda_n(B)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\lambda_n(A)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_1(B)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot(\operatorname{Retr}AB)^2 \tag{5.5.103}$$

证 因为当 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$ 时 $\sigma_s(A)=\lambda_s(A)$, $\sigma_s(B)=\lambda_s(B)$, $s=1,\cdots,n$,则在定理 5.4.13 中令 $k=n$,即得本定理. □

定理 5.5.27 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$,则

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}A_t\right)^2\leqslant\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}A_t^2\right) \tag{5.5.104}$$

证 由式(5.5.39)及几何—算术平均值不等式,有

$$2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)\leqslant2(\operatorname{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tr}B^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\operatorname{tr}A^2+\operatorname{tr}B^2$$

于是有

$$2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A_sA_t)\leqslant\operatorname{tr}A_s^2+\operatorname{tr}A_t^2,\ s,t=1,\cdots,m$$

从而有

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A_s^2+A_t^2-2A_sA_t))\geqslant0,\ s,t=1,\cdots,m$$

进而有

$$\sum_{1\leqslant s<t\leqslant m} \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_s^2 + A_t^2 - 2A_sA_t)) \geqslant 0 \qquad ①$$

而
$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{1\leqslant s<t\leqslant m} \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_s^2 + A_t^2 - 2A_sA_t)) \qquad ②$$

由式①,②即知,有

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2\right)\right) \geqslant 0 \qquad ③$$

注意到$\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^2$, $\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2 \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则由式③即知式(5.5.104)成立. □

注 式(5.5.104)是平方平均不等式在四元数矩阵迹中的推广.

§5.6 四元数矩阵迹的不等式(Ⅱ)

本节主要讨论四元数自共轭矩阵圈积和亚正定矩阵迹的一些不等式.

一、四元数半正定矩阵圈积迹的若干不等式

先回忆一下矩阵圈积的定义:

设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in Q^{n\times n}$,则 A 与 B 的圈积 $A\circ B$ 定义为

$$A\circ B = C,\quad C=(c_{ij})\in Q^{n\times n}.$$

其中 $c_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij},\ i,j=1,\cdots,n$.

为了方便,我们把 m 个矩阵的圈积 $A_1\circ A_2\circ\cdots\circ A_m$ 简单地

记为$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j$，即：

$$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j \stackrel{\triangle}{=\!=} A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_m \tag{5.6.1}$$

定理 5.6.1 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), \alpha_j \in R^+, j=1,\cdots,m$ 且 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r$，则：

$$\left|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} A_j^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r} \tag{5.6.2}$$

或
$$\left|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{1/r}\right|^r \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \tag{5.6.2$'$}$$

证 因 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), j=1,\cdots,m$，则由命题 5.3.1 知，$A_j^{r/\alpha_j} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$(1 \leqslant j \leqslant m, m \in N)$ 且 $[\lambda_i(A_j)]^{r/\alpha_j}, i=1,\cdots,n$ 就是 A_j^{r/α_j} 的 n 个特征值，于是由定理 4.3.6 之 2°有，

$$\mathrm{tr} A_j^{r/\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(A_j)]^{r/\alpha_j}, j=1,\cdots,m \tag{①}$$

设 $A_j = (a_{it}^{(j)})_{n\times n}, j=1,\cdots,m$，则由式(1.1.29)，有

$$\left|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ii}^{(j)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left|a_{ii}^{(j)}\right| \tag{②}$$

注意到 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r$，则 $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{r} = 1$，于是由式②及 Hölder 不等式(5.2.17)′，有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left|a_{ij}^{(j)}\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}^{(j)}\right|^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r} \tag{③}$$

由定理 5.4.1，有

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ii}^{(j)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{④}$$

因 $r/\alpha_j > 1 (1 \leqslant j \leqslant m)$，则由式④与定理 5.1.13，定理 4.2.8 及式

①,知有

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}^{(j)}|^{r/\alpha_j}\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i(A_j))^{r/\alpha_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A_j))^{r/\alpha_j}=\operatorname{tr}A_j^{r/\alpha_j},j=1,\cdots,m \tag{⑤}$$

于是,由式②,③,⑤即知式(5.6.2)成立.在式(5.6.2)中把 A_j 换成 $A_j^{1/r}$,即得式(5.6.2)′. □

定理 5.6.2 设 $A_j\in SC_n^{\geqslant}(Q),j=1,\cdots,m$,则

1° 当 $0<\alpha_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\geqslant 1$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\operatorname{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \tag{5.6.3}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j^{\alpha_j}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\operatorname{tr}A_j)^{\alpha_j} \tag{5.6.3$'$}$$

2° 当 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=r\leqslant 1$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}(\operatorname{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \tag{5.6.4}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j^{\alpha_j}\right|\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}(\operatorname{tr}A_j)^{\alpha_j} \tag{5.6.4$'$}$$

证 1° 因 $A_j\in SC_n^{\geqslant}(Q),j=1,\cdots,m$,则由命题 5.3.1 知,$A_j^{1/\alpha_j}\in SC_n^{\geqslant}(Q),(1\leqslant j\leqslant m)$,且$[\lambda_i(A_j)]^{1/\alpha_j}(i=1,\cdots,n)$就是 A_j^{1/α_j}的 n 个特征值,于是由定理 4.3.2 之 2°有

$$\operatorname{tr}A_j^{1/\alpha_j}=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A_j))^{1/\alpha_j},j=1,\cdots,m \tag{①}$$

设 $A_j=(a_{ik}^{(j)})_{n\times n}(1\leqslant j\leqslant m)$,则由式(1.1.29)与(1.1.19),有

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ii}^{(j)}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}|a_{ii}^{(j)}| \tag{②}$$

注意到 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \geqslant 1$，于是由 Hölder 不等式(5.2.17)′，有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |a_{ij}^{(j)}| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(j)}|^{1/\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \tag{③}$$

由定理 5.4.1(即式(5.4.1))，有

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{ii}^{(j)}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A_j), 1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

由 $0<\alpha_j \leqslant 1$ 有 $1/\alpha_j \geqslant 1 (1 \leqslant j \leqslant m)$，则由上式，定理 5.1.13，定理 4.2.8 及式①，知

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(j)}|^{1/\alpha_j} \leqslant \sum_{i=1}^{n} [\sigma_i(A_j)]^{1/\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(A_j)]^{1/\alpha_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A_j^{1/\alpha_j}) = \mathrm{tr} A_j^{1/\alpha_j} \tag{④}$$

从而由式②，③，④，即得

$$|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \qquad \square$$

即式(5.6.3)成立. 在(5.6.5)式中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$ 即得式(5.5.3)′.

2° 当 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r \leqslant 1$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.18)′，有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (a_{ii}^{(j)}) \leqslant n^{1-r} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}^{(j)})^{1/\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \tag{⑤}$$

且这时显然有 $0<\alpha_j \leqslant 1$，从而 $1/\alpha_j \geqslant 1 (1 \leqslant j \leqslant m)$，故式④仍成立. 于是由式②，⑤，④，即得式(5.6.4). 在式(5.6.4)中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$，即得式(5.6.4)′. $\square$

在定理 5.6.2 中，令 $\alpha_j = \alpha (j=1,\cdots,m)$，可得

推论 1 设 $A_j \in SC_n(Q)$，$A_j \geqslant 0$，$j=1,\cdots,m$，则

1° 当$\frac{1}{m}\leqslant\alpha\leqslant 1$时，有

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha}\tag{5.6.5}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{\alpha}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j\right)^{\alpha}\tag{5.6.5$'$}$$

2° 当$\alpha<\frac{1}{m}$时，有

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant n^{1-m\alpha}\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha}\tag{5.6.6}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{\alpha}\right|\leqslant n^{1-m\alpha}\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j\right)^{\alpha}\tag{5.6.6$'$}$$

3°

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j\right)\tag{5.6.7}$$

4°

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\tag{5.6.8}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{m}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_j\right)^{m}\tag{5.6.8$'$}$$

在定理 5.6.2 中令 $m=2$，可得

推论 2 设 $A,B\in SC_n(Q)$，$A,B\geqslant 0$，$p,q>0$，则

1° 当$\frac{1}{p},\frac{1}{q}\leqslant 1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$时，有

$$\left|\operatorname{tr}A\circ B\right|\leqslant\left(\operatorname{tr}A^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\operatorname{tr}B^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\tag{5.6.9}$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r<1$时，有

$$\left|\operatorname{tr}(A\circ B)\right|\leqslant n^{1-r}\left(\operatorname{tr}A^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\operatorname{tr}B^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\tag{5.6.10}$$

特别在式(5.6.9)中令 $p=q=2$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}(A\circ B)\right|\leqslant\left(\operatorname{tr}A^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tr}B^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{5.6.11}$$

注 不等式(5.6.11)是贝尔迈(Bellman)不等式在四元数矩阵中的又一推广形式.

定理 5.6.3 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_j > 0, j = 1, \cdots, m, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = r$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^r \tag{5.6.12}$$

证 由式(5.6.2)及杨格不等式(5.2.5)有

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\operatorname{tr} A^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^{r/\alpha_j}$$

在上式中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$,并利用命题 5.3.1,即得

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^r \qquad \square$$

在定理 5.6.3 中令 $r = 1$,则得

推论 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), \alpha_j > 0, j = 1, \cdots, m$,且 $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{tr} A_j \tag{5.6.13}$$

注 在式(5.6.13)中,令 $m = 1$,即得杨格不等式. 故式(5.6.13)是杨格不等式在四元数矩阵中的又一推广形式.

定理 5.6.4 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), j = 1, \cdots, m$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \tag{5.6.14}$$

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right|^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr} A_j \tag{5.6.15}$$

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \geqslant \min\left\{\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}}\right|, \left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right|^{\frac{1}{m}}\right\} \tag{5.6.16}$$

证 在(5.6.13)式中令 $\alpha_i=\dfrac{1}{m}$ 即得式(5.6.14). 由式(5.6.7)及几何—算术平均值不等式,有

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|^{\frac{1}{m}}\leqslant\left(\prod_{j=1}^{m}\operatorname{tr}A_j\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}A_j$$

故(5.6.15)成立. 由式(5.6.14)与(5.6.15)即得式(5.6.16). □

注 式(5.6.14),(5.6.15)均为几何—算术平均值不等式在四元数矩阵迹中的又两种推广形式.

定理 5.6.5 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_j\in R^+$, $j=1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,l$, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=r$,则

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}{}^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r}\qquad(5.6.17)$$

证 由式(1.1.29),定理 5.6.1 及 Hölder 不等式(5.2.17),有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|&=\left|\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\\&\leqslant\sum_{t=1}^{l}\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{jt}{}^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r}\\&\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}{}^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r}\end{aligned}$$

故式(5.6.17)成立. □

在定理 5.6.5 中把 A_j 换成 $A_j{}^{1/r}$,由命题 5.3.1,可得

推论 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_j\in R^+$, $j=1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,l$, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=r$,则:

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}{}^{1/r}\right|^{r}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\qquad(5.6.18)$$

定理 5.6.6 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_j\in R^+$, $j=1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,l$，则

1° 当 $0<\alpha_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_j\geqslant 1$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\tag{5.6.19}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}{}^{\alpha_j}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}\right)^{\alpha_j}\tag{5.6.19$'$}$$

2° 当 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=r<1$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant(n-l)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\tag{5.6.20}$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}{}^{\alpha_j}\right|\leqslant(n-l)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}\right)^{\alpha_j}\tag{5.6.20$'$}$$

证 由式(1.1.29)，定理 5.6.2 之 1° 及 Höhder 不等式(5.2.17)′即得式(5.6.19).

由式(1.1.29)，定理 5.6.2 之 2° 及 Hölder 不等式(5.2.18)′，有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|&\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\\&\leqslant n^{1-r}\sum_{t=1}^{l}\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{jt}{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\\&\leqslant n^{1-r}\cdot l^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\\&=(nl)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\end{aligned}$$

故式(5.6.20)成立. □

在定理 5.6.6 中，令 $a_j=\frac{1}{m}(j=1,\cdots,m)$，可得

推论 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$j=1,\cdots,m$，$t=1,\cdots,l$，则

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}^{1/m}\right)^{m} \qquad (5.6.21)$$

特别地，在式(5.6.21)中取 $m=2$，即得

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right|\leqslant\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}A_t^2\right)\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}B_t^2\right) \qquad (5.6.22)$$

或

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right|$$

$$\leqslant\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}A_t^2\right)\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}B_t^2\right) \qquad (5.6.22)'$$

注 不等式(5.6.22)和(5.6.22)′是柯西不等式在四元数矩阵迹的又一推广形式.

二、四元数亚正定矩阵迹的几个不等式

先给出四元数亚正定矩阵的定义：

设 $A\in Q^{n\times n}$，记 $R(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)$　$S(A)=\frac{1}{2}(A-A^*)$，则

$$A=R(A)+S(A) \qquad (5.6.23)$$

且 $R(A)\in SC_n(Q)$，$S(A)\in SC_n^-(Q)$，其中 $SC_n^-(Q)=\{A\in Q^{n\times n}\mid A^*=-A\}$ 为斜自共轭矩阵的全体.

定义 5.6.1 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 $\forall\,0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in Q^{n\times 1}$，有 $\operatorname{Re}(x^*Ax)>0(\geqslant 0)$，则称 A 为四元数亚(半)正定矩阵，n 阶四元数亚(半)正定矩阵的全体记为 $P_n^{>}(Q)(P_n^{\geqslant}(Q))$.

命题 5.6.1

1° 若 $A\in P_n^{>}(Q)$，$B\in Q^{n\times n}$ 且可逆，则 $B^*AB\in P_n^{>}(Q)$；

2° 若 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$，$B\in Q^{n\times n}$ 且可逆，则 $B^*AB\in P_n^{\geqslant}(Q)$.

证　1° 由 $A\in P_n^{>}(Q)$，则对 $\forall\, 0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，令 $y=Bx$，则因 B 可逆知 $y\neq 0$，且 $\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$，故

$$\mathrm{Re}(x^*(B^*AB)x)=\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$$

因此 $B^*AB\in P_n^{>}(Q)$.

2° 同理可证. □

命题 5.6.2　设 $A\in SC_n^{-}(Q)$，则对 $\forall\, x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，有

$$\mathrm{Re}(x^*Ax)=0 \tag{5.6.24}$$

且有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=0 \tag{5.6.25}$$

证　由 $A\in SC_n^{-}(Q)$，则 $A^*=-A$，于是对 $\forall\, x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，有 $\overline{x^*Ax}=x^*A^*x=-x^*Ax$，故 $\mathrm{Re}(x^*Ax)=0$. 即式(5.6.24)成立.

设 $A=(a_{ij})$，由 $A^*=-A$ 有 $a_{ii}=-\overline{a_{ii}}(1\leqslant i\leqslant n)$，从而 $\overline{a_{ii}}+a_{ii}=0$，故 $\mathrm{Re}(a_{ii})=0$，因此

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(a_{ii})=0$$

故式(5.6.25)成立. □

命题 5.6.3

1° $A\in P_n^{>}(Q)\Leftrightarrow R(A)\in SC_n^{>}(Q)$

2° $A\in P_n^{\geqslant}(Q)\Leftrightarrow R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$

证　由式(5.6.23)，(5.6.24)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x^*Ax)&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x+x^*S(A)x)\\&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)+\mathrm{Re}(x^*S(A)x)\\&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)+0=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)\\&=x^*R(A)x\end{aligned} \tag{5.6.26}$$

于是，由定义 5.6.1 及式(5.6.26)，即知命题成立. □

命题 5.6.4 设 $A\in P_n^{>}(Q)$，则存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix},a_t,b_t\in R,a_t>0,b_t\geqslant 0,1\leqslant t\leqslant n,\tag{5.6.27}$$

证 首先由定理 4.1.4 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix},a_t,b_t\in R,\ b_t\geqslant 0,1\leqslant t\leqslant n$$

令 $e_t=(0,\cdots 0,1,0,\cdots 0)^{\mathrm{T}}$，1 处在第 t 个位置($t=1,\cdots,n$)，并记 $x_t=Ue_t\neq 0$，则由 $A\in P_n^{>}(Q)$，就有

$$\begin{aligned}0&<\mathrm{Re}(x_t{}^*Ax_t)=\mathrm{Re}(e_t{}^*(U^*AU)e_t)\\&=\mathrm{Re}(a_t+b_t\mathrm{i})=a_t,1\leqslant t\leqslant n\end{aligned}$$

由此知本命题成立. □

命题 5.6.5 设 $A\in Q^{n\times n}$，则

1° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$ (5.6.28)

2° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{tr}R(A)$ (5.6.29)

证 1° 设 $A=(a_{ij})$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}\overline{a_{tt}})=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}a_{tt})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A).$$

2° 由式(5.6.23)及命题(5.6.2)之 2°，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}R(A))+\mathrm{Re}(\mathrm{tr}S(A))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}R(A))+0\\&=\mathrm{tr}R(A)\end{aligned}$$ □

命题 5.6.6 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)\Leftrightarrow$ 对 $\forall\,\varepsilon>0$，有 $\varepsilon I_n+A_t\in P_n^{>}(Q)$

证 "$\Rightarrow$" 显然成立.

"$\Leftarrow$" 设对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\varepsilon I_n+A\in P_n^{>}(Q)$，则对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，有

$$\varepsilon(\bar{x}_1x_1+\cdots+\bar{x}_nx_n)+\mathrm{Re}(x^*Ax)>0$$

在上式中，令 $\varepsilon\to0^+$，即得

$$\mathrm{Re}(x^*Ax)\geqslant0$$

故 $$A\in P_n^{\geqslant}(Q)$$ □

命题 5.6.7 设 $S\in SC_n^-(Q)$，λ 是 S 的右特征值，则

$$\mathrm{Re}(\lambda)=0.$$

证 设 $0\neq x\in Q^{n\times1}$ 是 S 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$$Sx=x\lambda$$

于是有

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}x^*x&=(\overline{x\lambda})^{\mathrm{T}}x=(\overline{Sx})^{\mathrm{T}}x=(Sx)^*x\\&=x^*S^*x=-x^*Sx=-x^*x\lambda\end{aligned}$$

又 $0\neq x^*x\in R$，故由上式即得 $\bar{\lambda}=-\lambda$，所以 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$. □

推论 设 $S\in SC_n^-(Q)$，则 S 必有零实部、非负虚部的(复)右特征值.

证 由定理 4.1.2 与命题 5.6.7 即得. □

命题 5.6.8 设 $S\in SC_n^-(Q)$，$x,y\in Q^{n\times1}$，$b_1,b_2\in R^+$，$Sx=b_1x\mathrm{i}$，$Sy=b_2y\mathrm{i}$，若 $b_1\neq b_2$，则 $x^*y=0$.

证 因为

$$\begin{aligned}b_1\mathrm{i}x^*y&=-\overline{(xb_1\mathrm{i})}^{\mathrm{T}}y=-(Sx)^*y\\&=-x^*S^*y=x^*Sy=x^*yb_2\mathrm{i}\end{aligned}\qquad ①$$

设 $$x^*y=a_1+\mathrm{j}a_2\ (a_1,a_2\in C)$$

式②代入式①得 $$b_1a_1\mathrm{i}+b_1\mathrm{ij}a_2=b_2a_1\mathrm{i}+\mathrm{j}(b_2a_2\mathrm{i})\qquad ②$$

由式③得 $$(b_1-b_2)a_1\mathrm{i}=\mathrm{k}(a_1+b_2)a_2=0\qquad ③$$

故得 $$a_1=a_2=0$$

因此 $$x^*y=0$$ □

命题 5.6.9 设 $S\in SC_n^-(Q)$，则必存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*SU=\mathrm{diag}(b_1\mathrm{i},\cdots,b_n\mathrm{i}),0\leqslant b_t\in R,1\leqslant t\leqslant n\qquad(5.6.30)$$

证 对 S 的阶数 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,设 $S=(q)$, $q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\in Q$,由 $\bar{q}=-q$,则知 $a_1=0$, $q=a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}$,于是由命题 1.3.7 知,存在 $0\neq x\in Q$,使

$$x^{-1}qx=a_1+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}$$

其中 $b=\sqrt{a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2}\geqslant 0$,而 $x^{-1}x=1$. 这表明 $n=1$ 时,命题成立.

假定 $n=p\geqslant 1$ 时,命题成立. 当 $n=p+1$ 时,由命题 5.6.7 的推论知,可取 S 的一个右特征值 $\lambda_1=b_1\mathrm{i}(b\geqslant 0)$,再取 S 的属于 λ_1 的一个单位特征向量 x,令

$$x^{\perp}=\{y\in Q^{p\times 1}\mid y^*x=0\}$$

显然 $x^{\perp}$ 构成 Q 上的右向量空间,维数是 p,现取 $x^{\perp}$ 的一个正交单位 Q 右基 $y_1,\cdots,y_p$,并作方阵

$$U_1=(x,y_1,\cdots,y_p)$$

则 $U_1\in Q^{(p+1)\times(p+1)}$,且可设

$$U_1{}^*SU_1=\begin{pmatrix} b_1\mathrm{i} & \\ & S_1 \end{pmatrix}$$

显见 S_1 是 p 阶斜自共轭阵,由归纳假设,有 $U_2\in U^{p\times p}$,使

$$U_2{}^*S_1U_2=\mathrm{diag}(b_2\mathrm{i},\cdots,b_{p+1}\mathrm{i}),\ b_t\geqslant 0,\ 2\leqslant t\leqslant p+1$$

令

$$U=U_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & U_2 \end{pmatrix}$$

则 $U\in U^{(p+1)\times(p+1)}$,使

$$U^*SU=\mathrm{diag}(b_1\mathrm{i},b_2\mathrm{i},\cdots,b_{p+1}\mathrm{i}),\ b_t\geqslant 0,\ 1\leqslant t\leqslant p+1$$

归纳法完成. □

命题 5.6.10 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 $A\in P_n^{>}(Q)$ 的充要条件是存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$R(A)=P^*P,\quad S(A)=P^*\mathrm{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n)P,$$

$$A=P^*\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)P,\quad \lambda_t\in R,t=1,\cdots,n$$

证 充分性是显然的. 下证必要性.

设 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则由命题 5.6.3 知 $R(A)\in SC_n^{>}(Q)$, 于是由定理 4.3.2, 存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$, 使 $R(A)=P_1{}^*P_1$, 令 $Q=P_1{}^{-1}$, 则有 $Q^*R(A)Q=I_n$, 因 $S(A)\in SC_n^{-}(Q)$, 则 $Q^*S(A)Q\in SC_n^{-}(Q)$. 由命题 5.6.9 知, 存在 $U\in U^{n\times n}$, 使

$$U^*Q^*S(A)QU=\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n),\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n \qquad ①$$

且仍有
$$U^*Q^*R(A)QU=I_n, \qquad ②$$

令 $P_2=QU$, 则 P_2 仍可逆, 且

$$\begin{aligned}P_2{}^*AP_2&=P_2{}^*R(A)P_2+P_2{}^*S(A)P_2\\&=\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)\end{aligned} \qquad ③$$

令 $P=P_2{}^{-1}$, 则 P 可逆, 且有 $P=U^*Q^{-1}$, 于是由式①, ②, ③, 有

$$R(A)=(Q^*)^{-1}UI_nU^*Q^{-1}=(P_2{}^{-1})^*P_2{}^{-1}=P^*P,$$

$$S'(A)=P^*\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n)P$$

$$A=P^*\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)P$$

故命题 5.6.10 成立. □

命题 5.6.11 设 $A\in P_n^{>}(Q)$, $T\in Q^{n\times n}$, 且 T 可逆, 则

$$T^*AT\in P_n^{>}(Q).$$

证 对 $\forall\, 0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$, 令 $y=Tx$, 由 T 可逆, 则 $y\neq 0$, 因 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则 $\operatorname{Re}(y^*Ay)>0$, 于是有

$$\operatorname{Re}(x^*(T^*AT)x)=\operatorname{Re}(y^*Ay)>0,$$

因此
$$T^*AT\in P_n^{>}(Q)$$ □

定理 5.6.7 设 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A^k)\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A))^k,k=1,2,3 \qquad (5.6.31)$$

证 由 $A\in P_n^{>}(Q)$ 及命题 5.6.4, 存在 $U\in U^{n\times n}$, 使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix},a_t,b_t\in R,a_t>0,1\leqslant t\leqslant n \quad ①$$

当 $k=1$ 时,式(5.6.31)显然成立. 当 $k=2$ 时,由式(4.2.27)及式①,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^2)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}UU^*A^2)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*A^2U)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AUU^*AU)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^2)\\&=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}(a_t+b_t\mathrm{i})^2\Big)=\sum_{t=1}^{n}(a_t^2-b_t^2)\\&\leqslant\sum_{t=1}^{n}a_t^2\end{aligned} \quad ②$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式①,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^2=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^2=\Big(\sum_{t=1}^{n}a_t\Big)^2>\sum_{t=1}^{n}a_t^2 \quad ③$$

于是由式②,③,即知当 $n=2$ 时,式(5.6.31)成立.

当 $k=3$ 时,由式(4.2.27)及式①有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^3)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^3)=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}(a_t+b_t\mathrm{i})^3\Big)\\&=\sum_{t=1}^{n}(a_t^3-3a_tb_t^2)\leqslant\sum_{t=1}^{n}a_t^3\end{aligned} \quad ④$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式④,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^3=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^3=\Big(\sum_{t=1}^{n}a_t\Big)^3>\sum_{t=1}^{n}a_t^3 \quad ⑤$$

于是由式④,⑤即知当 $k=3$ 时,式(5.6.31)成立. □

注 当 $k\geqslant4$ 时,式(5.6.31)不一定成立. 例如:令 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}$,则 A 是亚正定阵,且 $A^4=\begin{pmatrix}28 & 96\\-96 & 28\end{pmatrix}$,于是有

$$\mathrm{tr}A^4=28+28=56>16=2^4=(\mathrm{tr}A)^4$$

定理 5.6.8 设 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,k=1,2,3 \qquad (5.6.32)$$

证 对任意实数 $\varepsilon>0$,因 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则由命题 5.6.6 知,$\varepsilon \mathrm{I}_n+A\in P_n^{>}(Q)$,由定理 5.6.7,有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(\varepsilon \mathrm{I}_n+A)^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(\varepsilon \mathrm{I}_n+A)))^k,k=1,2,3$$

在上式中,令 $\varepsilon\to0^+$,即得式(5.6.32). □

定理 5.6.9 设 $A\in P_n^{>}(Q)$,且 A 的谱值都是实数,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,k=1,2,\cdots \qquad (5.6.33)$$

证 因 $A\in P_n^{>}(Q)$,且 A 的谱值都是实数,则由命题 5.6.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t>0,1\leqslant t\leqslant n \qquad ①$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式①有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AUU^*A\cdots UU^*AUU^*)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)(U^*AU)\cdots(U^*AU))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^k)=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^k\Big)\end{aligned} \qquad ②$$

又由定理 4.2.10 之推论 1 及式①,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^k=\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t\Big)^k \qquad ③$$

由琴生不等式(5.2.9)知,当 $k\geqslant1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^k\leqslant\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t\Big)^k \qquad ④$$

于是,由式②,③,④,即知式(5.6.33)成立. □

用 $\varepsilon I+A$ 代替 A,并采用连续性的方法,由定理 5.6.8 可得

推论 设 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,且 A 的谱值为实数,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,k=1,2,\cdots \qquad (5.6.34)$$

定理 5.6.10 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0$； (5.6.35)

2° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)$. (5.6.36)

证 1° 由式(5.6.23)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A(R(B)+S(B)))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B)+\mathrm{tr}AS(B))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))+\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A\frac{B-B^*}{2})\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB-AB^*))\end{aligned}\qquad ①$$

因 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则 $A^*=A$，于是由定理 4.2.10 之推论 1 及式(5.6.28)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB^*)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*B^*)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B^*A^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\end{aligned}$$

由上式知

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB-AB^*))=0 \qquad ②$$

于是由式①，②，得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B)) \qquad ③$$

由命题 5.6.3 之 2° 及 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$ 知，$R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，又 $B\in P_n^{\geqslant}(Q)$，则 $R(B)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 从而由定理 4.3.22 知

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0 \qquad ④$$

于是由式③，④得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0,$$

故式(5.6.35)成立.

2° 由式(5.5.39)′及式(5.6.29)，有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\leqslant \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}R(B)=\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B) \qquad ⑤$$

于是，由式(5.6.35)及式⑤即知式(5.6.36)成立. □

定理 5.6.11 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant(\mathrm{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\frac{B^2+BB^*}{2})\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.6.37)$$

证 由式(5.6.36)与(5.5.39),有

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)=\operatorname{tr}AR(B)\leqslant(\operatorname{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}[\operatorname{tr}(R(B))^2]^{\frac{1}{2}} \qquad ①$$

又由式(5.6.29),有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(R(B))^2&=\operatorname{tr}(\frac{B+B^*}{2})^2=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(B+B^*)(B+B^*)\\&=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(B^2+B^*B+BB^*+(B^*)^2)\\&=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(B^2+(B^2)^*)+\frac{1}{4}\operatorname{tr}(B^*B+(B^*B)^*)\\&=\frac{1}{2}\operatorname{tr}R(B^2)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}(BB^*)=\operatorname{tr}R(\frac{B^2+BB^*}{2})\\&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\frac{B^2+BB^*}{2})) \qquad ②\end{aligned}$$

于是由式①,②即知式(5.6.37)成立. □

定理 5.6.12 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^{\frac{1}{2}}\leqslant\operatorname{Re}(\operatorname{tr}\frac{A+B}{2}) \qquad (5.6.38)$$

证 由定理5.6.9,有

$$0\leqslant\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB)\leqslant\operatorname{tr}A\cdot\operatorname{Re}(\operatorname{tr}B)$$

由上式及几何—算术平均值不等式,有

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^{\frac{1}{2}}&\leqslant(\operatorname{tr}A\cdot\operatorname{Re}(\operatorname{tr}B))^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(\operatorname{tr}A+\operatorname{Re}(\operatorname{tr}B))\\&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}\frac{A+B}{2})\end{aligned}$$

故式(5.6.38)成立. □

定理 5.6.13 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,$B\in P_n^{>}(Q)$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^k)\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^k,k=1,2,3 \qquad (5.6.39)$$

证 由 $A\in SC_n^{>}(Q)$,由定理 4.3.2 之 3°,存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$A=P_1P_1^* \qquad ①$$

因 $B\in P_n^{>}(Q)$,由命题 5.6.1 之 1°知,$P_1^*BP_1\in P_n^{>}(Q)$,于是由命题 5.6.8 知,存在可逆阵 $Q\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1{}^* BP_1 = Q^* \operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)Q,\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n \tag{②}$$

记 $P=P_1{}^{-1},D=\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)$,则由式②,得

$$B=P^*Q^*DQP \tag{③}$$

于是由式①,③,有

$$AB=P_1P_1{}^*P^*Q^*DQP=P^{-1}Q^*DQP \tag{④}$$

从而

$$\begin{aligned}(AB)^2&=P^{-1}Q^*DQPP^{-1}Q^*DQP\\&=P^{-1}(Q^*DQ)(Q^*DQ)P\\&=P^{-1}(Q^*DQ)^2P\end{aligned} \tag{⑤}$$

同理

$$(AB)^3=P^{-1}(Q^*DQ)^3P \tag{⑥}$$

由式③有

$$Q^*DQ=(P^{-1})^*BP^{-1} \tag{⑦}$$

由 $B\in P_n^{>}(Q)$及命题 5.6.9 知,$(P^{-1})^*BP^{-1}\in P_n^{>}(Q)$,从而由式⑦知,$Q^*DQ\in P_n^{>}(Q)$,由式⑤知,$(AB)^2$ 相似于$(Q^*DQ)^2$,于是由定理 4.2.10 之推论 1,定理 5.6.7 及式④,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^2)&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(Q^*DQ)^2)\\&\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}Q^*DQ))^2\\&=(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}P^{-1}Q^*DP))^2\\&=(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^2\end{aligned}$$

同理,由式⑥知,$(AB)^3$ 相似于$(Q^*DQ)^3$,于是由定理 4.2.10 之推论 1,定理 5.6.7 及式④,仿上即可得

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^3)\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^3$$

因此,式(5.6.39)成立. □

定理 5.6.14 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q),B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^k)\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}AB))^k,k=1,2,3 \tag{5.6.40}$$

证 仿定理 5.6.8 之证明,利用定理 5.6.13 和连续性的方法即可证得. □

§5.7 四元数矩阵行列式的不等式

本节论述四元数自共轭矩阵的行列式与重行列式的一系列不等式.

定理 5.7.1 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha\in R$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$|A+B|^{\alpha}\geqslant|A|^{\alpha}+|B|^{\alpha} \tag{5.7.1}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$|A+B|^{\alpha}\geqslant 2^{n\alpha-1}(|A|^{\alpha}+|B|^{\alpha}) \tag{5.7.2}$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 及定理 4.3.6 之 7° 知 $|A|\geqslant 0$，$|B|\geqslant 0$，且由定理 4.3.11 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad r\leqslant n \tag{①}$$

$$P^*BP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},\quad \lambda_t\geqslant 0,1\leqslant t\leqslant n \tag{②}$$

于是，由定理 3.3.11 之推论及式①，②，有

$$\begin{aligned}|P^*P||A+B| &= |P^*(A+B)P| \\ &= |P^*AP+P^*BP| \\ &= \prod_{t=1}^{n}(\delta_t+\lambda_t)\end{aligned} \tag{③}$$

其中 $\delta_1=\cdots=\delta_r=1$，$\delta_{r+1}=\cdots=\delta_n=0$，$\lambda_t\geqslant 0$，$1\leqslant t\leqslant n$.

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.28)′，有

$$\left[\prod_{t=1}^{n}(\delta_t+\lambda_t)\right]^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{t=1}^{n}\delta_t\right)^{\alpha}+\left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_t\right)^{\alpha} \tag{④}$$

于是由式①,②,③,④及定理 3.3.11 之推论,有

$$\begin{aligned}|P^*P|^\alpha|A+B|^\alpha &\geqslant\left(\prod_{t=1}^n \delta_t\right)^\alpha+\left(\prod_{t=1}^n \lambda_t\right)^\alpha\\ &=|P^*AP|^\alpha+|P^*BP|^\alpha\\ &=|P^*P|^\alpha(|A|^\alpha+|B|^\alpha)\end{aligned}$$

由于 P 可逆,则 $|P^*P|>0$,故在上式中消去 $|P^*P|$,即得式(5.7.1).

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{m}$ 时,由 Hölder 不等式(5.2.29)′,有

$$\left[\prod_{t=1}^n(\delta_t+\lambda_t)\right]^\alpha\geqslant 2^{n\alpha-1}\left[\left(\prod_{t=1}^n \delta_t\right)^\alpha+\left(\prod_{t=1}^n \lambda_t\right)^\alpha\right] \qquad ⑤$$

于是由式①,②,③,⑤,及定理 3.3.11 之推论,仿 1° 之推导即得式(5.7.2). □

推论 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$A\geqslant B$,(即 $A-B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$),$\alpha\in R^+$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$|A-B|^\alpha\leqslant|A|^\alpha-|B|^\alpha \qquad (5.7.3)$$

特别有

$$|A|^\alpha\geqslant|B|^\alpha,\ |A|\geqslant|B| \qquad (5.7.3)'$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$|A-B|^\alpha\leqslant 2^{1-n\alpha}|A|^\alpha-|B|^\alpha \qquad (5.7.4)$$

证 1° 由式(5.7.1),有

$$|A|^\alpha=|A-B+B|^\alpha\geqslant|A-B|^\alpha+|B|^\alpha$$

由此即得式(5.7.3).

2° 由式(5.7.2),有

$$|A|^\alpha=|A-B+B|^\alpha\geqslant 2^{n\alpha-1}(|A-B|)^\alpha+|B|^\alpha)$$

由此得式(5.7.4). □

定理 5.7.2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1\leqslant t\leqslant m$,$\alpha\geqslant\frac{1}{n}$,则

$$\left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right|^{\alpha} \geqslant \sum_{t=1}^{m} |A_t|^{\alpha} = \sum_{t=1}^{m} |A_t^{\alpha}| \tag{5.7.5}$$

证 用数学归纳法证之. 当 $m=2$ 时,由定理 5.7.1 之 1°即可得式(5.7.5)成立. 现设 $2 \leqslant m \leqslant k-1$ 时,式(5.7.5)成立. 则当 $m=k$ 时,由于 $A_1+\cdots+A_{k-1} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,于是由定理 5.7.1 之 1°及归纳假设,有

$$\begin{aligned}|A_1+\cdots+A_{k-1}+A_k|^{\alpha} &\geqslant |A_1+\cdots+A_{k-1}|^{\alpha}+|A_k|^{\alpha}\\ &\geqslant |A_1|^{\alpha}+\cdots+|A_{k-1}|^{\alpha}+|A_k|^{\alpha}\end{aligned}$$

于是便证明式(5.7.5)成立. □

在定理 5.7.2 中分别令 $\alpha=\frac{1}{n}, 1$,可得

推论 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $1 \leqslant t \leqslant m$,则

$$\sum_{t=1}^{m} |A_t^{\frac{1}{n}}| = \sum_{t=1}^{m} |A_t|^{\frac{1}{n}} \leqslant \left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.6}$$

$$\sum_{t=1}^{m} |A_t| \leqslant \left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right| \tag{5.7.7}$$

定理 5.7.3 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t \in R$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$,则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0$, $\alpha_t > 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k \geqslant \frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |A_{st}^{\alpha_t}| \leqslant \prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha_t} \tag{5.7.8}$$

2° 当 $A_{st} \geqslant 0$, $\alpha_t > 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = r \leqslant \frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |A_{st}^{\alpha_t}| \leqslant m^{1-nr} \prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha_t} \tag{5.7.9}$$

3° 当 $A_{st} > 0$, $\alpha_t \leqslant 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = r$ 时,

有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}|\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t}\tag{5.7.10}$$

证 1° 因 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则由命题 5.3.1 知，$A_{st}^{\alpha_t}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant t\leqslant k$；又 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k\geqslant\frac{1}{n}$，则 $n\alpha_1+\cdots+n\alpha_n\geqslant 1$，于是由 Hölder 不等式(5.2.17)及式(5.7.6)，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}|&=\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}(|A_{st}|^{\frac{1}{n}})^{n\alpha_t}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t}\end{aligned}$$

故式(5.7.8)成立.

2° 利用 Hölder 不等式(5.2.18)及式(5.7.6)即可得式(5.7.9).

3° 由 $A_{st}>0$，有 $|A_{st}|>0$，于是由式(5.7.6)，有

$$0<\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\leqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\frac{1}{n}},1\leqslant t\leqslant k$$

因 $\alpha_t<0(1\leqslant t\leqslant k)$，则由上式有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\geqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t},1\leqslant t\leqslant k\tag{①}$$

于是由 Hölder 不等式(5.2.21)及式①有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}|&=\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}(|A_{st}|^{\frac{1}{n}})^{n\alpha_t}\\&\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\end{aligned}$$

$$\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t}$$

故式(5.7.10)成立.

注 在定理5.7.3中令 $n=1$,则得 Hölder 不等式(5.2.17),(5.2.18),(5.2.21).故定理5.7.3是 Hölder 不等式在四元数矩阵行列式中的一种推广形式.

在定理5.7.3中令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=\alpha$,可得

推论1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1\leqslant s\leqslant m$,$1\leqslant t\leqslant k$,$\alpha\in R$,则

1° 当 $A_{st}\geqslant 0$,$\alpha\geqslant\frac{1}{nk}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}{}^{\alpha}|\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\qquad(5.7.11)$$

2° 当 $A_{st}\geqslant 0$,$0<\alpha\leqslant\frac{1}{nk}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}{}^{\alpha}|\leqslant m^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\qquad(5.7.12)$$

3° 当 $A_{st}>0$,$\alpha\leqslant 0$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}{}^{\alpha}|\geqslant m^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\qquad(5.7.13)$$

在推论1中,令 $k=1$,可得

推论2 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1\leqslant s\leqslant m$,$\alpha\in R$,则

1° 当 $A_s\geqslant 0$,$\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\leqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}\qquad(5.7.14)$$

2° 当 $A_s\geqslant 0$,$0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\leqslant m^{1-n\alpha}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha} \tag{5.7.15}$$

3° 当$A_s>0,\alpha\leqslant 0$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\geqslant m^{1-n\alpha}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha} \tag{5.7.16}$$

特别当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|\cdot\sum_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|\geqslant m^{n+1} \tag{5.7.17}$$

在推论 1 中令 $m=2$，可得

推论 3 设 $A_t,B_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$1\leqslant t\leqslant k$，$\alpha\in R$，则

1° 当$A_t,B_t\geqslant 0,\alpha\geqslant 1/nk$ 时，有

$$\prod_{t=1}^{k}|A_t|^{\alpha}+\prod_{t=1}^{k}|B_t|^{\alpha}\leqslant\prod_{t=1}^{k}|A_t+B_t|^{\alpha} \tag{5.7.18}$$

2° 当$A_t,B_t\geqslant 0,0<\alpha\leqslant 1/nk$ 时，有

$$\prod_{t=1}^{k}|A_t|^{\alpha}+\prod_{t=1}^{k}|B_t|^{\alpha}\leqslant 2^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}|A_t+B_t|^{\alpha} \tag{5.7.19}$$

3° 当$A_t,B_t>0,\alpha\leqslant 0$时，有

$$\prod_{t=1}^{k}|A_t|^{\alpha}+\prod_{t=1}^{k}|B_t|^{\alpha}\geqslant 2^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}|A_t+B_t|^{\alpha} \tag{5.7.20}$$

定理 5.7.4 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$1\leqslant s\leqslant m$，则

1° 当$A_s\geqslant 0,\alpha\geqslant 1/n$ 时，有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\left|\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha} \tag{5.7.21}$$

特别当 $\alpha=1/n$ 或 1 时，分别有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\frac{1}{n}}\tag{5.7.22}$$

$$\begin{aligned}\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}}&\leqslant\frac{1}{m^n}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|\\&\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|\end{aligned}\tag{5.7.23}$$

2° 当$A_s\geqslant0,0<\alpha\leqslant1/n$ 时,有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}\tag{5.7.24}$$

3° 当$A_s>0,\alpha\geqslant1/n$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\tag{5.7.25}$$

特别当$\alpha=1/n,1$时,分别有

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\tag{5.7.26}$$

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}}\tag{5.7.27}$$

4° 当$A_s>0,0<\alpha\leqslant1/n$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\tag{5.7.28}$$

证 1° 由几何—算术平均值不等式(5.1.4)及式(5.7.14),有

$$\begin{aligned}\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}&=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}\\&\leqslant\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}|A_s|^{\alpha}\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.21)成立.

2° 由几何—算术平均值不等式(5.1.4)及式(5.7.15),有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}|A_s|^{\alpha}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\cdot m^{1-n\alpha}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}=\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}$$

故(5.7.24)成立.

3° 因$A_s>0$,则 $A_s^{-1}>0$ 于是由式(5.7.21),有

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_t^{-1}|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

所以 $$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{m}}$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.25)成立.

4° 因$A_s>0$,则 $A_s^{-1}>0$,于是由式(5.7.23),有

$$\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

所以 $$\left(\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{m}}$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.28)成立. □

注 在式(5.7.23)中令 $n=1$,则得几何—算术平均值不等式(5.1.4),故式(5.7.23)是几何—算术平均值不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

定理 5.7.5 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha_s\in R^+$,$1\leqslant s\leqslant m$,则

1° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|\geqslant\prod_{s=1}^{m}\left|A_s^{\alpha_s}\right| \tag{5.7.29}$$

2° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r<1$ 时，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}\geqslant r-1+\prod_{s=1}^{m}\left|A_s^{\frac{\alpha_s}{n}}\right| \tag{5.7.30}$$

3° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|\geqslant r^n\prod_{s=1}^{m}\left|A_s^{\alpha_s}\right| \tag{5.7.31}$$

证 1° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.5)，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|&=\left(\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqslant\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n\\&=\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\left|A_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}\left|A_s\right|^{\frac{\alpha_s}{n}}\right)^n\\&=\prod_{s=1}^{m}\left|A_s\right|^{\alpha_s}=\prod_{s=1}^{m}\left|A_s^{\alpha_s}\right|\end{aligned}$$

故式(5.7.29)成立.

2° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.5)′，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}&\geqslant\sum_{s=1}^{m}\left|\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\left|A_s\right|^{\frac{1}{n}}\\&\geqslant r-1+\prod_{s=1}^{m}\left(\left|A_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha_s}\\&=r-1+\prod_{s=1}^{m}\left|A_s^{\alpha_s/n}\right|\end{aligned}$$

故式(5.7.30)成立.

3° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.6)，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|=\left(\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\geqslant \left(\sum_{s=1}^{m} | \alpha_s A_s^r |^{\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s | A_s^{\frac{r}{n}} | \right)^n$$

$$\geqslant \left[r \left(\prod_{s=1}^{m} | A_s^{\frac{r}{n}} |^{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{r}} \right]^n$$

$$= r^n \prod_{s=1}^{m} | A_s^{\alpha_s} |$$

故式(5.7.31)成立. □

注 式(5.7.28),(5.7.30),(5.7.31)是杨格不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

在式(5.7.29)中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \dfrac{1}{m}$,可得

推论 设 $A_s \in SC_n(Q)$,$1 \leqslant s \leqslant m$,则

1° 当$A_s \geqslant 0$,$1 \leqslant s \leqslant m$ 时,有

$$\left(\prod_{s=1}^{m} | A_s | \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m^n} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right| = \left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s \right| \quad (5.7.32)$$

2° 当$A_s > 0$,$1 \leqslant s \leqslant m$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m^n} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s^{-1} \right| \right)^{-1} \leqslant \left(\prod_{s=1}^{m} | A_s | \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7.33)$$

把式(5.7.32)与(5.7.33)合起来即得:当 $A_s \in SC_n^{>}(Q)$,$1 \leqslant s \leqslant m$时,则有

$$\left(\left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s^{-1} \right| \right)^{-1} \leqslant \left(\prod_{s=1}^{m} | A_s | \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s \right|$$

$$(5.7.34)$$

证 1° 在式(5.7.29)中,令$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \dfrac{1}{m}$, 即得式(5.7.32)

2° 因 $A_s \in SC_n^{>}(Q)$,则 $A_s^{-1} \in SC_n^{>}(Q)$,由式(5.7.32),有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m^n}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|$$

由此即得

$$\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|\right)^{-1}\leqslant\left[\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{-1}=\left(\sum_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.33)成立.

注 在式(5.7.34)中令 $m=1$,即得调和一几何一算术平均值不等式,故式(5.7.34)是调和一几何一算术平均值不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

定理 5.7.6 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1\leqslant s\leqslant m$,$r\in R^+$,则

1° 当 $r\geqslant\frac{2}{n}$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^r\geqslant\sum_{s=1}^{m}|A_s|^r+(m^{nr}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{m}}\quad(5.7.35)$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{2}{n}$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^r\right|\leqslant\left[\sum_{s=1}^{m}|A_s|+(m^{\frac{n}{r}}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right]^r$$

(5.7.36)

证 1° 因 $r\geqslant\frac{2}{n}$,则 $nr\geqslant 2$,于是由式(5.7.6)及不等式(5.2.12),有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^r=\left(\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{nr}\geqslant\left(\sum_{s=1}^{m}|A_s|^{\frac{1}{n}}\right)^{nr}$$

$$\geqslant\sum_{s=1}^{m}|A_s|^r+(m^{nr}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{m}}$$

故式(5.7.35)成立.

2° 由 $0<r\leqslant\frac{n}{2}$,则 $0<\frac{r}{n}\leqslant\frac{1}{2}$,于是由式(5.7.6)及不等式

(5.2.13),有

$$\left|\sum_{s=1}^{m} A_s^r\right| = \left(\left|\sum_{s=1}^{m} A_s^r\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(\sum_{s=1}^{m} |A_s^r|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m} |A_s|^{\frac{r}{n}}\right)^n$$

$$\geqslant \left\{\left[\sum_{s=1}^{m} |A_s| + (m^{\frac{n}{r}} - m)\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{r}{n}}\right\}^n$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{m} |A_s| + (m^{\frac{n}{r}} - m)\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right]^r$$

故式(5.7.36)成立. □

定理 5.7.7 设 $A_{st} \in SC_n(Q)$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, 且

$$0 \leqslant A_{s1} \leqslant A_{s2} \leqslant \cdots \leqslant A_{sn}, 1 \leqslant s \leqslant m \qquad (5.7.37)$$

又$\widetilde{A_{s1}}, \widetilde{A_{s2}} \cdots \widetilde{A_{sk}}$是$A_{s1}, A_{s2}, \cdots, A_{sk}$的任一排列, $\alpha \in R^+$, 则

1° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{n}$时, 有

$$\prod_{t=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha} \leqslant \left(\prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} \widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha} \qquad (5.7.38)$$

2° 当$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$时, 有

$$\prod_{t=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha} \leqslant m^{k(1-n\alpha)} \left(\prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} \widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha} \qquad (5.7.39)$$

3° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{k}$时, 有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |\widetilde{A_{st}}|^{\alpha} \leqslant \sum_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha} \qquad (5.7.40)$$

4° 当$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{k}$时, 有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |\widetilde{A_{st}}|^{\alpha} \leqslant m^{1-k\alpha} \prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha} \qquad (5.7.41)$$

证 1° 由式(5.7.37)及(5.7.3)′,有

$$0\leqslant|A_{s1}|\leqslant|A_{s2}|\leqslant\cdots\leqslant|A_{sn}|,1\leqslant s\leqslant m \qquad ①$$

于是由式①,(5.2.48)′及(5.7.14),有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha}&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|^{\alpha}\\&=\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.38)成立.

2° 由式①,(5.2.48)′及(5.7.15),有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha}&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha}\\&\leqslant(m^{1-n\alpha})^{k}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|^{\alpha}\\&=m^{k(1-n\alpha)}\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.39)成立.

3° 由式①,(5.2.47)′,(5.2.17)及(5.7.7),有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha}&\leqslant\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|\right)^{\alpha}\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.40)成立.

4° 由式②,(5.2.47)′,(5.2.18)及(5.2.7),有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{s1}}|^{\alpha}\leqslant\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}$$

$$\leqslant m^{1-k\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|\right)^{\alpha}$$

$$\leqslant m^{1-k\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}$$

故式(5.7.41)成立. □

定理 5.7.8 设 $A_{st}\in SC_n^{>}(Q),1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant t\leqslant k,\alpha,p\in R$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n},0\neq p\leqslant 1$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.7.42}$$

特别当 $\alpha=\frac{1}{n}$,1 时,分别有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.7.43}$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.7.44}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n},0\neq p\leqslant 1$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant k^{n\alpha-1}\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.7.45}$$

3° 当 $\alpha\leqslant 0,p\geqslant 1$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant k^{n\alpha-1}\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.7.46}$$

证　$1°$由 $A_{st}\in SC_n^{\geq}(Q)$，$\alpha\geq\frac{1}{n}>0$，则 $|A_{st}|^{\alpha}>0$，$1\leq s\leq m$，$1\leq t\leq k$，于是由 $0\neq p\leq 1$ 及闵可夫斯基不等式(5.2.38)，有

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\geq\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad ①$$

又由 $\alpha\geq\frac{1}{n}$ 及式(5.7.5)，有

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha}\geq\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha},1\leq s\leq m \quad ②$$

当 $p>0$ 时，将上式两边 p 次方，得

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\geq\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p},1\leq s\leq m$$

故有

$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\geq\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

将上式两边同时$\frac{1}{p}$次方，得

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \quad ③$$

由式③与①即得式(5.7.42).

当 $p<0$ 时，由式②有

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\leq\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p},1\leq s\leq m$$

故有

$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\leq\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

将上式两边同时$\frac{1}{p}$次方，则证得式③仍成立. 从而由式③与①即得式(5.7.42)成立.

$2°$ 利用不等式(5.2.38)及式(5.7.15)仿 $1°$之证明即可得式(5.7.45)成立.

$3°$ 由 $\alpha\leq 0$ 及式(5.7.16)，有

$$\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha} \leqslant k^{n\alpha-1}\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}, 1 \leqslant s \leqslant m$$

因 $p \geqslant 1$,将上式两端同时 p 次方,得

$$\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p} \leqslant k^{(n\alpha-1)p}\left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}, 1 \leqslant s \leqslant m$$

故有
$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p} \leqslant k^{(n\alpha-1)p}\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

再将上式同时$\frac{1}{p}$次方,得

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k^{n\alpha-1}\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \quad ④$$

又因 $p \geqslant 1$,则由闵可夫斯基不等式(5.2.37),得

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad ⑤$$

于是由式④与⑤即得式(5.7.46). □

定理 5.7.9 设 $A_{st} \in SC_n^{>}(Q), 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha, r \in R$,则

1° 当 $\alpha \geqslant \frac{1}{n}, 0 \neq p \leqslant 1, r \geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} \geqslant \sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} + (k^{r}-k)\left(\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{pk}} \quad (5.7.47)$$

2° 当 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}, 0 \neq p \leqslant 1, r \geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} \geqslant k^{(n\alpha-1)r}\left[\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}}\right.$$

$$+(k^r-k)\Big(\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{r}{pk}}\Big]$$

(5.7.48)

3° 当$\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1, 0<r\leqslant\frac{1}{2}$时，有

$$\sum_{t=1}^{k}\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{r}{p}}\leqslant\Big[k^{1-n\alpha}\Big(\sum_{s=1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\Big|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+(k^{\frac{1}{r}}-k)m^{(1-n\alpha p)/p}\Big(\prod_{t=1}^{k}\Big|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\Big|^{\frac{\alpha}{k}}\Big)\Big]^r \qquad (5.7.49)$$

证 1° 由式(5.7.42)及式(5.2.12)，即得式(5.7.47).

2° 由式(5.7.45)及式(5.2.12)即得式(5.7.48).

3° 因$\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1$，则由式(5.7.46)，有

$$\sum_{t=1}^{k}\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}\geqslant k^{1-n\alpha}\Big(\sum_{s=1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\Big|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad ①$$

因 $\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1$，则 $\alpha p\leqslant 0$，则由式(5.7.16)，有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\geqslant m^{1-n\alpha p}\Big|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\Big|^{\alpha p}, 1\leqslant t\leqslant k \qquad ②$$

于是由式(5.2.13)及式①,②，有

$$\sum_{t=1}^{k}\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{r}{p}}=\sum_{t=1}^{k}\Big[\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^r$$

$$\geqslant\Big\{\sum_{t=1}^{k}\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}+(k^{\frac{1}{r}}-k)\Big[\prod_{t=1}^{k}\Big(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^{\frac{1}{k}}\Big\}^r$$

$$\geqslant\Big\{k^{1-n\alpha}\Big(\sum_{s=1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\Big|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+(k^{\frac{1}{r}}-k)\Big[\prod_{t=1}^{k}\Big(m^{1-n\alpha p}\Big|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\Big|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^{\frac{1}{k}}\Big\}^r$$

$$=\Big[k^{1-n\alpha}\Big(\sum_{s=1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\Big|^{\alpha p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(k^{\frac{1}{r}}-k\right)m^{(1-map)/p}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\frac{\alpha}{k}}\Bigg]^{r}$$

故式(5.7.49)成立. □

定义 5.7.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,且 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B\\ C & A_{n-k}\end{pmatrix}\tag{5.7.50}$$

其中 $A_k\in Q^{k\times k}$,$A_{n-k}\in Q^{(n-k)\times(n-k)}$,若 A_k 可逆,则称

$$A/A_k\xlongequal{\triangle}A_{n-k}-CA_k^{-1}B\in Q^{(n-k)\times(n-k)}\tag{5.7.51}$$

为 A 关于它的 k 阶序顺主子阵 A_k 的 **Schur** 补.

命题 5.7.1 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵,A/A_k 是 A 关于它的 k 阶顺序主子阵 A_k 的 Schur 补,则 A_k 与 A/A_k 都是正定的,$k=1,\cdots,n-1$.

证 设

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix},\text{其中 } A_k\in Q^{k\times k}$$

则由定理 4.3.8,知 A_k 是正定的,且由命题 4.3.2,知

$$\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^* & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix}A_k & 0\\ 0 & A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B\end{pmatrix}\in SC_n^{>}(Q)$$

于是由定理 4.3.8 即知 $A/A_k=A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B$ 也是正定的. □

关于正定阵的 Schur 补的行列式,我们有如下不等式:

定理 5.7.10 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,$\alpha\in R$,$\alpha\geqslant\dfrac{1}{n-k}$,则

$$|(A+B)/(A+B)_k|^{\alpha}\geqslant|A/A_k+B/B_k|^{\alpha}\tag{5.7.52}$$

$$\geqslant|A/A_k|^{\alpha}+|B/B_k|^{\alpha}\tag{5.7.53}$$

证 将 A,B 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}^* & \widetilde{A} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_k & B_{12} \\ B_{12}^* & \widetilde{B} \end{pmatrix}$$

因 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则由命题 5.3.1 及命题 5.7.1 知 A_k,B_k,$A_k^{-1},B_k^{-1},A/A_k,B/B_k,(A+B)/(A+B)_k$ 都是正定的.下面我们来证明

$$M=(A+B)/(A+B)_k-A/A_k-B/B_k\in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q) \qquad ①$$

事实上

$$\begin{aligned} M &=(\widetilde{A}+\widetilde{B})-(A_{12}^*+B_{12}^*)(A_k+B_k)^{-1}(A_{12}+B_{12}) \\ &\quad -(\widetilde{A}-A_{12}^*A_k^{-1}A_{12})-(\widetilde{B}-B_{12}^*B_k^{-1}B_{12}) \\ &=A_{12}^*[A_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}]A_{12} \\ &\quad +B_{12}^*[B_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}]B_{12} \\ &\quad -A_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}B_{12}-B_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}A_{12} \end{aligned}$$

又因为

$$A_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}=(A_kB_k^{-1}A_k+A_k)^{-1}$$

$$B_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}=B_k^{-1}A_k(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}A_kB_k^{-1}$$

于是

$$M=(A_{12}-A_kB_k^{-1}B_{12})^*(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}(A_{12}-A_kB_k^{-1}B_{12})$$

因 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,故 $(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}\in SC_n^{>}(Q)$

于是由命题 4.3.2 之 1°知 $M\in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q)$,从而由式①,(5.7.3)′知式(5.7.52)成立.再由式(5.7.1)即知式(5.7.53)成立. □

利用关于(半)正定自共轭阵的行列式与其重行列式之间的关系,即定理 3.3.10 之推论,我们可以把上述四元数矩阵行列式的一系列不等式定理推广或平移到四元数矩阵重行列式上来.

定理 5.7.1′ 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha\in R$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$ 时,有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant \| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.54}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant 2^{2n\alpha-1}(\| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.55}$$

证 由定理 3.3.10 之推论知，当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 时，有

$$|A|^2 = \| A \|, |B|^2 = \| B \|, |A+B|^2 = \| A+B \| \quad ①$$

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$ 时，有 $2\alpha\geqslant\frac{1}{n}$，则由式(5.7.1)，有

$$|A+B|^{2\alpha} \geqslant |A|^{2\alpha} + |B|^{2\alpha} \quad ②$$

于是由式①,②，即得式(5.7.54).

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有 $0<2\alpha\leqslant\frac{1}{n}$，则由式(5.7.2)，有

$$|A+B|^{2\alpha} \geqslant 2^{2n\alpha-1}(|A|^{2\alpha} + |B|^{2\alpha}). \quad ③$$

由式①,③，即可得式(5.7.55). □

推论 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$A\geqslant B$，$\alpha\in R$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A-B \|^{\alpha} \leqslant \| A \|^{\alpha} - \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.56}$$

$$\| A \|^{\alpha} \geqslant \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.57}$$

$$\| A \| \geqslant \| B \| \tag{5.7.58}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A-B \|^{\alpha} \leqslant 2^{1-2n\alpha}(\| A \|^{\alpha} - \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.59}$$

定理 5.7.2′ 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$1\leqslant t\leqslant m$，$\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$，则

$$\| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\alpha} \geqslant \sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\alpha} \tag{5.7.60}$$

证 由定理 5.7.2 及定理 3.3.10 之推论，仿定理 5.7.1′的证明即可证得. □

在定理 5.7.2′中分别令 $\alpha=\frac{1}{n},\frac{1}{2n},1$，则得

推论 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q), 1 \leqslant t \leqslant m$，则

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.61}$$

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\frac{1}{2n}} \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\frac{1}{2n}} \tag{5.7.62}$$

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \| \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \| \tag{5.7.63}$$

定理 5.7.3′ 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q), \alpha_t \in R, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k$，则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha_t > 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \geqslant \frac{1}{2n}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \leqslant \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.64}$$

2° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha_t > 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = r \leqslant \frac{1}{2n}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \leqslant m^{1-2nr} \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.65}$$

3° 当 $A_{st} > 0, \alpha_t \leqslant 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = r$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \geqslant m^{1-2nr} \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.66}$$

证 利用式(5.7.5)仿定理 5.7.2′的证明即可证得. □

在定理 5.7.3′中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha$，可得

推论 1 设 $A_{st} \in SC_n(Q), 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha \in R$，则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha \geqslant \frac{1}{2nk}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha} \leqslant \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha} \tag{5.7.67}$$

2° 当$A_{st}\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2nk}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}\|A_{st}\|^{\alpha}\leqslant m^{1-2nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\|^{\alpha} \quad (5.7.68)$$

3° 当$A_{st}>0, \alpha\leqslant 0$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}\|A_{st}\|^{\alpha}\geqslant m^{1-2nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\|^{\alpha} \quad (5.7.69)$$

在推论1中令$k=1$，可得

推论 2 设$A_{st}\in SC_n(Q), 1\leqslant s\leqslant m, \alpha\in R$，则

1° 当$A_s\geqslant 0, \alpha\geqslant\frac{1}{2n}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\leqslant\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.70)$$

2° 当$A_s\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\leqslant m^{1-2n}\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.71)$$

3° 当$A_s>0, \alpha\leqslant 0$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\geqslant m^{1-2n}\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.72)$$

当然，按上述方法，我们可把定理5.7.4～定理5.7.10及其推论均可类似地推广到四元数矩阵的重行列式上来，这里我们仅把定理5.7.10平移到四元数矩阵的重行列式上来，其他建议读者去完成.

定理 5.7.10′ 设$A, B\in SC_n^{>}(Q), \alpha\in R, \alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$，则

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|^{\alpha}\geqslant\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha} \quad (5.7.73)$$

证 因$A, B\in SC_n^{>}(Q)$，则$A+B\in SC_n^{>}(Q)$，故由命题5.7.1知，$A/A_k, B/A_k, (A+B)/(A+B)_k$均为正定自共轭矩

阵，于是由定理 3.3.10 之推论及定理 5.7.10 即知式(5.7.73)成立. □

推论 1 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，$\alpha\in R$，$\alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$，则

$$\frac{\|A+B\|^\alpha}{\|A_k+B_k\|^\alpha}\geqslant\frac{\|A\|^\alpha}{\|A_k\|^\alpha}+\frac{\|B\|^\alpha}{\|B_k\|}\tag{5.7.74}$$

证 由定理3.3.8，有

$$\|A\|=\|A_k\|\ \|A/A_k\|\text{，即}\|A/A_k\|=\frac{\|A\|}{\|A_k\|}$$

同理有 $\|B\|=\|B_k\|\ \|B/B_k\|$，即 $\|B/B_k\|=\frac{\|B\|}{\|B_k\|}$

$$\|A+B\|=\|(A+B)_k\|\ \|(A+B)/(A+B)_k\|$$

即

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|=\frac{\|A+B\|}{\|(A+B)_k\|}$$

于是由上式及式(5.7.73)即知式(5.7.74)成立. □

推论 2 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，$\alpha\in R$，$\alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$，则

$$\|A+B\|^\alpha\geqslant\|A\|^\alpha\left(1+\frac{\|B_k\|^\alpha}{\|A_k\|^\alpha}\right)$$

$$+\|B\|^\alpha\left(1+\frac{\|A_k\|^\alpha}{\|B_k\|^\alpha}\right)\tag{5.7.75}$$

证 由式(5.7.74)及式(5.7.60)，有

$$\|A+B\|^\alpha\geqslant\frac{\|A_k+B_k\|^\alpha\|A\|^\alpha}{\|A_k\|^\alpha}+\frac{\|A_k+B_k\|^\alpha\|B\|^\alpha}{\|B_k\|^\alpha}$$

$$\geqslant\frac{(\|A_k\|^\alpha+\|B_k\|^\alpha)\|A\|^\alpha}{\|A_k\|^\alpha}$$

$$+\frac{(\|A_k\|^\alpha+\|B_k\|^\alpha)\|B\|^\alpha}{\|B_k\|^\alpha}$$

$$= \| A \|^{\alpha}(1+\frac{\| B_k \|^{\alpha}}{\| A_k \|^{\alpha}})$$

$$+ \| B \|^{\alpha}(1+\frac{\| A_k \|^{\alpha}}{\| B_k \|^{\alpha}})$$

故式(5.7.75)成立. □

定理 5.7.11 设 $A=\begin{pmatrix} A_k & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \in SC_n^{>}(Q)$, $A_k \in Q^{k\times k}$,则

$$\| A \| \leqslant \| A_k \| \, \| D \| \qquad (5.7.76)$$

证 由定理 3.3.8 知

$$\| A \| = \| A_k \| \, \| D - B^* A_k^{-1} B \| \qquad ①$$

又 $D \in SC_{n-k}^{>}(Q)$, 且 $B^* A_k^{-1} B \in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q)$, 于是由式(5.7.56),知

$$\| D - B^* A_k^{-1} B \| \leqslant \| D \| - \| B^* A_k^{-1} B \| \leqslant \| D \| \qquad ②$$

从而由式①,②即知式(5.7.76)成立. □

推论 1 设 $A=(a_{ij}) \in SC_n^{>}(Q)$,且 A 可分块为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \qquad (5.7.77)$$

其中 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,r)$均为方阵,则

$$\| A \| \leqslant \| A_{11} \| \cdot \| A_{22} \| \cdots \| A_{rr} \| \qquad (5.7.78)$$

特别地有

$$\| A \| \leqslant \| a_{11} \| \cdot \| a_{22} \| \cdots \| a_{nn} \| \qquad (5.7.79)$$

推论 2 设 $A=(a_{ij}) \in SC_n^{>}(Q)$,且 A 可分块为(5.7.77),则

$$|A| \leqslant |A_{11}| \, |A_{22}| \cdots |A_{rr}| \qquad (5.7.80)$$

特别地有

$$|A| \leqslant a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}. \qquad (5.7.81)$$

关于四元数亚(半)正定阵的重行列式的不等式,我们有如下

定理 5.7.12 设 $A\in P_n^{>}(Q)$，$\alpha\in R^+$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$\|A\|^{\alpha}\geqslant\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha} \tag{5.7.82}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$\|A\|^{\alpha}\geqslant2^{n\alpha-1}(\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha}) \tag{5.7.83}$$

证 因 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$，则 $R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，由定理 4.3.3，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*R(A)P=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n) \quad ①$$

其中 $a_t=1$ 或 $0,1\leqslant t\leqslant n$，又 $S(A)\in SC_n^-(Q)$，则 $P^*S(A)P\in SC_n^-(Q)$. 于是由命题 5.6.9 知，存在 $V\in U^{n\times n}$，使

$$V^*PS(A)PV=\mathrm{diag}(b_1\mathrm{i},\cdots,b_n\mathrm{i}) \quad ②$$

其中 $b_t\in R,1\leqslant t\leqslant n$，于是有

$$V^*P^*APV=\mathrm{diag}(a_1+b_1\mathrm{i},\cdots,a_n+b_n\mathrm{i}) \quad ③$$

在式③两端取重行列式，由定理 3.3.3，并注意到 $\|V^*V\|=1$，则可得

$$\|P^*P\|^{\alpha}\|A\|^{\alpha}=\prod_{t=1}^{n}(a_t^2+b_t^2)^{\alpha} \quad ④$$

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.28)′及式①，②，得

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{n}(a_t^2+b_t^2)^{\alpha}&\geqslant\left(\prod_{t=1}^{n}a_t^2\right)^{\alpha}+\left(\prod_{t=1}^{n}b_t^2\right)^{\alpha}\\&=\|P^*R(A)P\|^{\alpha}+\|P^*S(A)P\|^{\alpha}\\&=\|P^*P\|^{\alpha}(\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha})\quad ⑤\end{aligned}$$

注意式 $\|P^*\|>0$，于是由式④，⑤即得式(5.7.82)成立.

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.23)及式①，②仿 1° 之证明，即可得式(5.7.83). □

定理 5.7.13 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha\in R^+$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha} \tag{5.7.84}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant 2^{n\alpha-1}(\|A\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha}) \tag{5.7.85}$$

3° $$\|A+B\|^{\frac{1}{n}}\geqslant\|A\|^{\frac{1}{n}}+\|B\|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.86}$$

4° $$\|A+B\|\geqslant\|A\|+\|B\| \tag{5.7.87}$$

证明 由 $A\in SC_n^{>}(Q)$ 及定理 4.3.2 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$A=PP^* \quad ①$$

又由 $B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,及命题 5.6 知,$P^{-1}B(P^*)^{-1}\in P_n^{\geqslant}(Q)$,于是由命题 5.6.4 知,存在 $V\in U^{n\times n}$,使

$$P^{-1}B(P^*)^{-1}=VGV^*, \quad ②$$

其中 $$G=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix}, a_t, b_t\in R, a_t\geqslant 0, 1\leqslant t\leqslant n$$

②

于是 $$B=PVGV^*P^*$$

从而 $$\begin{aligned} A+B &= PP^*+PVGV^*P^* \\ &= P(I+VGV^*)P^*=P(VV^*+VGV^*)P^* \\ &= PV(I+G)V^*P^* \end{aligned} \quad ④$$

由式①,②,③,④及定理 3.3.3,有

$$\begin{aligned} \|A+B\|^{\alpha} &= \|P\|^{\alpha}\|V\|^{\alpha}\|I+G\|^{\alpha}\|V^*\|^{\alpha}\|P^*\|^{\alpha} \\ &= \|PP^*\|^{\alpha}\|I+G\|^{\alpha} \\ &= \|PP^*\|^{\alpha}\prod_{t=1}^{n}[(1+a_t)^2+b_t^2]^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\geqslant \| PP^* \|^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} [1+(a_i^2+b_i^2)]^{\alpha} \qquad ⑤$$

1° 当$\alpha > \frac{1}{n}$时，由 Hölder 不等式(5.2.28)′，有

$$\| PP^* \|^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} [1+(a_i^2+b_i^2)]^{\alpha}$$

$$\geqslant \| PP^* \|^{\alpha} + \| PP^* \|^{\alpha} \left[\prod_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2) \right]^{\alpha}$$

$$= \| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha} \qquad ⑥$$

从而由式⑤,⑥即得式(5.7.84)成立.

2° 当$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$时，由 Hölder 不等式(5.2.29)′，有

$$\| PP^* \|^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} [1+(a_i^2+b_i^2)]^{\alpha}$$

$$\geqslant 2^{n\alpha-1} \| PP^* \|^{\alpha} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} 1 \right)^{\alpha} + \prod_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2)^{\alpha} \right]$$

$$= 2^{n\alpha-1} \left\{ \| PP^* \|^{\alpha} \| PP^* \|^{\alpha} \left[\prod_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2) \right]^{\alpha} \right\}$$

$$= 2^{n\alpha-1} (\| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha}) \qquad ⑦$$

于是由式⑤与⑦即知式(5.7.85)成立.

3° 在式(5.7.84)中令$\alpha = \frac{1}{n}$即得式(5.7.86)

4° 在式(5.7.84)中令$\alpha = 1$即得式(5.7.87) □

推论 1 设$A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B \in P_n^{\geqslant}(Q)$，则仍分别有式(5.7.84)，(5.7.85)，(5.7.86)，(5.7.87)成立.

推论 2 设$A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B \in P_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha \in R^+$，则

1° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{n}$时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant \| A \|^{\alpha} + \| R(B) \|^{\alpha} + \| S(B) \|^{\alpha} \qquad (5.7.88)$$

2° 当$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant 4^{n\alpha-1}(\| R(A) \|^{\alpha} + \| S(A) \|^{\alpha} + 2^{n\alpha-1} \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.89}$$

证 由定理 5.7.12 及定理 5.7.13 即得. □

第六章　四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性

在复数域上的线性代数理论中，二次型及其标准形的分类和正定的判定以及与此相联系的矩阵的正定性问题具有重要的意义.同样在四元数体上的类似问题当然也十分重要.在这一章里，我们将讨论四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性.

§6.1　四元数体上的二次型

定义 6.1.1　设 $A \in SC_n(Q)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n\times 1}$，则称

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax \tag{6.1.1}$$

为**四元数体上的二次型**.若记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i a_{ij} x_j \tag{6.1.2}$$

定义 6.1.2　若二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax>0$ 对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$ 都成立，则称二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是**正定二次型**；若 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax\geqslant 0$ 对任意 $x\in Q^{n\times 1}$ 都成立，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**半正定二次型**.

由(半)正定二次型的定义 6.1.2 及(半)正定矩阵的定义 2.2.2，即得如下

命题 6.1.1 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是式(6.1.1)定义的二次型，则

1° x^*Ax 为正定二次型 $\Leftrightarrow A$ 正定；

2° x^*Ax 为半正定二次型 $\Leftrightarrow A$ 半正定.

由 $A\in SC_n(Q)$及命题 2.2.1 知，对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$有 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax\in R$，且由命题 3.3.1 知，必存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$(此处 P 是一系列初等矩阵$P(i,j)$和 $P(i,j_\lambda)$ 的乘积而成的广义酉阵)，使

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n$$

因此，对二次型(6.1.1)，若令 $y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，$y=P^{-1}x$(即 $x=Py$)，则有

$$x^*Ax=y^*P^*APy=y^*\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}y$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{y}_iy_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|y_i|^2 \tag{6.1.3}$$

我们称式(6.1.3)为二次型(6.1.1)的**标准型**.

由此可知，四元数体上二次型的标准形及其分类与复(实)二次型是相同的.

定理 6.1.1 二次型 $f=x^*Ax$ 为(半)正定的充要条件是其标准形(6.1.3)中的系数皆为正(非负)，即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t>0(\geqslant 0),1\leqslant t\leqslant n \tag{6.1.4}$$

证 由命题 6.1.1 与定理 4.1.14，定理 4.3.2 及定理 4.3.4 即得. □

推论 若二次型 $f=x^*Ax$ 是(半)正定的，则$|A|>0(\geqslant 0)$

定理6.1.2 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax$ 为(半)正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式皆 $>0(\geqslant 0)$.

证 必要性由定理 4.3.8 即知,下证充分性.

用数学归纳法.当 $n=1$ 时,结论显然成立.设 $n-1$ 阶时结论成立,我们来证明 n 阶时结论亦成立.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的各阶顺序主子式皆为正,要证 x^*Ax 是正定的.

把 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & \alpha\\ \alpha^* & a_{nn}\end{pmatrix},\text{其中 } A_1\in Q^{(n-1)\times(n-1)},\alpha=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{pmatrix} \qquad ①$$

由假设知,A_1 的各阶顺序主子式皆为正,从而由归纳假设知,A_1 是正定的,故由定理 4.3.6 知,$|A_1|>0$.且由命题 3.3.1 之推论及定理 3.3.11 知,存在可逆阵 $S\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,且 S 是一系列 $(n-1)$阶初等矩阵 $P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,使

$$S^*A_1S=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1}\end{pmatrix},\lambda_t>0,1\leqslant t\leqslant n-1 \qquad ②$$

于是由式②及定理 3.2.6 之推论知

$$|A_1|=|S^*A_1S|=\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}>0 \qquad ③$$

令 $\beta=-A_1^{-1}\alpha$,则 $\beta^*=-\alpha*(A_1^{-1})^*$,$\beta^*A_1^*=-\alpha^*$,于是由式①有

$$\begin{pmatrix}S^* & 0\\ \beta^* & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}S & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^* & 0\\ \beta^* & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \alpha\\ \alpha^* & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S^*A_1S & 0\\ 0 & a_{nn}-\beta^*(A_1^{-1})^*\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad ④$$

其中 $\lambda_n = a_{nn} - \beta^*(A_1^{-1})^*\beta$. 显然$\begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$可分解为一系列 n 阶初等矩阵$P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,故由定理 3.2.6 之推论与式④,有

$$|A| = \det\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \beta^* & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = |A_1|\lambda_n \qquad ⑤$$

由已知$|A|>0$,且由式③,有$|A_1|>0$,从而由式⑤知,$\lambda_n>0$,由式④知,矩阵 A 相合于正实对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,而 Λ 显然是正定的,故由定理 4.3.4 即知 A 也是正定的,从而 x^*Ax 是正定二次型.半正定的情形同理可证. □

推论 $A\in SC_n(Q)$,则 A 为(半)正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式皆$>0(\geqslant 0)$.

由此,我们看到,有关四元数体上二次型问题的结论与实数域上二次型的有关结论十分类似.

§6.2 四元数正定矩阵

我们在前面各章节已给出了四元数正定矩阵的定义(见定义 2.2.2)及一些简单性质与判定.本节将较系统地讨论四元数正定矩阵的若干充要条件以及正定矩阵运算的封闭性.

所谓 $A\in Q^{n\times n}$是(半)正定的,是指 A 是自共轭的,且对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有 $x^*Ax>0(\geqslant 0)$.

定理 6.2.1 下列命题是等价的:

1° A 是正定矩阵,即 $A\in SC_n^>(Q)$;

2° A 的正惯性指数为 n;

3° A 与单位阵 I_n 相合;

4° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $A=P^*P$；

5° 存在可逆上三角阵 V，使 $A=V^*V$；

6° 存在 $B\in Q^{m\times n}$，$\mathrm{rank}B=n$，使 $A=B^*B$；

7° 对任意可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，P^*AP 正定；

8° 对任意 $U\in U^{n\times n}$，U^*AU 正定；

9° A 的特征值均为正数；

10° 对任意正整数 α，存在正定阵 $S\in Q^{n\times n}$，使 $A=S^\alpha$；

11° A 的所有主子式 >0；

12° A 的所有顺序主子式 >0；

13° 对任意实数 $k>0$，kA 正定；

14° A^{-1} 存在，且 A^{-1} 正定.

证 1°⇒2° 假设 A 的正惯性指数 $s<n$，则由定理 4.3.1 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $P^*AP=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & I_t & \\ & & 0\end{pmatrix}$，$s<n$.

令 $y_0=(\overbrace{0,\cdots,0}^{s个},1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，则 $x_0=Py_0\neq 0$，且

$$y_0{}^*\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0\end{pmatrix}y_0=-t\leqslant 0$$

这与 A 正定矛盾，故 2°成立.

2°⇒3° 设 A 的正惯性指标为 n，由定理 4.3.1 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $P^*AP=I_n$，即 A 与 I_n 相合.

3°⇒4° 设 A 与 I_n 相合，由相合定义，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $A=P^*I_nP=P^*P$.

4°⇒5° 若 $A=P^*P$，而 P 可逆，由命题 4.1.4 知，$P=UV$，其中 $U\in U^{n\times n}$，V 为可逆的上三角阵，则 $A=P^*P=(UV)^*(UV)=V^*U^*UV=V^*V$.

$5° \Rightarrow 4°$ 显然；

$4° \Rightarrow 6°$　若存在可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$，使 $A = P^* P$，取 $B = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$，则 $A = P^* P = B^* B$，$\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}P = n$.

$6° \Rightarrow 7°$　因为 $A = B^* B$，$\mathrm{rank}B = n$，则对任意可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$，对任意 $0 \neq x \in Q^{n \times 1}$，有 $BPx \neq 0$，且

$$x^*(P^* AP)x = (BPx)^*(BPx) > 0$$

故 $P^* AP$ 正定.

$7° \Rightarrow 8°$　显然.

$8° \Rightarrow 9°$　因对任意 $U \in U^{n \times n}$，有 $U^* AU \in SC_n(Q)$，则 $A \in SC_n(Q)$，于是由定理 4.1.4 之推论 2 知，A 与 $U^* AU$ 有相同的特征值，设为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 假定有某个 $\lambda_t \leqslant 0$，由定理 4.1.4，存在 $U_0 \in U^{n \times n}$，使

$$U_0{}^* U^* AUU_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

令 $y_0 = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in Q^{n \times 1}$，其中 1 在第 t 个位置，则 $x_0 = UU_0 y_0 \neq 0$，且

$$x_0{}^* U^* AUx_0 = y_0{}^* \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) y_0 = \lambda_t \leqslant 0$$

这与 $U^* AU$ 正定矛盾，故 $9°$ 成立.

$9° \Leftrightarrow 1°$　由定理 4.1.14 推论 1 之 $1°$ 即得.

$1° \Leftrightarrow 10°$　由命题 5.1.1 即得.

$1° \Rightarrow 11°$　设 $A = (a_{ij})$，$a_{ij} = a_{ji}$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，$A$ 的第 $i_1, \cdots i_k$ 行和等 $i_1, \cdots, i_k$ 列构成的主子阵记为

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} \cdots a_{i_1 i_k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{i_k i_1} \cdots a_{i_k i_k} \end{bmatrix}$$

则 $A_0 \in SC_k(Q)$，又记 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n \times 1}$ 中除 $x_{i1}, x_{i2} \cdots$

x_{ik}外，其余分量全取 0 的向量 X 记为 X_k，并记 $X_{Ak}=(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})^T\in Q^{k\times 1}$，对于任意 $0\neq X_{Ak}\in Q^{k\times 1}$，相应有 $X_k\neq 0$，且

$$(X_{Ak})^* A_k X_{kk}=X_k{}^* AX_k>0.$$

故 $A_0\in SC_k(Q)$，由 9°知 A_k 的特征值全为正数，从而由定理 4.3.5 知 $\det A_k>0$，故 11°成立.

11°⇒12° 显然.

1°⇔12° 由定理 6.1.2 之推论即得.

1°⇒13° 对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，$k>0$，则

$$x^*(kA)x=k(x^*Ax)>0$$

故 $kA\in SC_n^>(Q)$.

13°⇒1° kA 正定，$k>0$，则 $k^{-1}>0$，于是$\frac{1}{k}(kA)=A$ 正定.

1°⇒14° 对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有

$$x^*A^{-1}x=(x^*A^{-1})A(A^{-1}x)=(A^{-1}x)^*A(A^{-1}x)>0$$

这是因为当 $x\neq 0$ 时，$A^{-1}x\neq 0$ 以及 A 正定所致.

14°⇒1° A^{-1}正定，则 $A=(A^{-1})^{-1}$正定. □

下面，我们讨论四元数矩阵运算的一些封闭性质.

定理 6.2.2 正定阵的和仍是正定阵，即若 $A,B\in SC_n^>(Q)$，则 $A+B\in SC_n^>(Q)$.

证 当 $A,B\in SC_n^>(Q)$时，显然有 $A+B\in SC_n(Q)$，对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有

$$x^*(A+B)x=x^*Ax+x^*Bx>0$$

故 $A+B\in SC_n^>(Q)$. □

定理 6.2.3 设 $A\in SC_n^>(Q)$，$\forall\,\alpha\in R$，，则 $A^\alpha\in SC_n^>(Q)$.

证 由命题 5.1.1 即得. □

推论 设 $A\in SC_n^>(Q)$，$f(x)$是 R 上的多项式，则 $f(A)\in SC_n^>(Q)$.

定理 6.2.4 $A\in SC_n^{>}(Q)$，A 的逆阵 A^{-1} 与伴随阵 $\tilde{A}\in SC_n^{>}(Q)$.

证 由定理 6.2.1 即知. □

定理 6.2.5 设 $A_1,\cdots,A_m\in SC_n^{>}(Q)$，则它们的直和 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_m\in SC_n^{>}(Q)$，此处 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_m=\bigoplus\limits_{t=1}^{m}A_t\triangleq\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_m)$ 为对角分块矩阵，其中 $A_t\in Q^{n_t\times n_t}(t=1,\cdots,m)$，且 $n_1+\cdots+n_m=n$.

证 $A_1\oplus\cdots\oplus A_m$ 的特征值为各 A_t 的特征值的全体($t=1,\cdots,m$)，因为都是正数，又 $(\bigoplus\limits_{t=1}^{m}A_t)^*=\bigoplus\limits_{t=1}^{m}A_t^*=\bigoplus\limits_{t=1}^{m}A_t$，故 $\bigoplus\limits_{t=1}^{m}A_t\in SC_n^{>}(Q)$. □

定理 6.2.6 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，则 $ABA,BAB\in SC_n^{>}(Q)$.

证 因为 A 正定，则 $A^*=A$，且 A 可逆，由 $A^*BA=ABA$ 知，ABA 相合于 B，又 B 是正定矩阵，故由定理 4.3.8 即知 ABA 亦是正定阵，即 $ABA\in SC_n^{>}(Q)$，同理可证 $BAB\in SC_n(Q)$. □

定理 6.2.7 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，$B\in Q^{n\times m}$，则 $B^*AB\in SC_m^{\geqslant}(Q)$.

证 对任意 $x=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\in Q^{m\times 1}$，有

$$x^*(B^*AB)x=(Bx)^*A(Bx)\geqslant 0$$

又
$$(B^*AB)^*=B^*A^*B=B^*AB,$$

故
$$B^*AB\in SC_m^{\geqslant}(Q).$$
□

定理 6.2.8 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，则 $AB\in SC_n^{>}(Q)\Leftrightarrow AB=BA$.

证 “$\Rightarrow$” 设 $A,B,AB\in SC_n^{>}(Q)$，则 $AB=(AB)^*=B^*A^*=BA$

“$\Leftarrow$” 由定理 4.3.13 即得. □

定理 6.2.9 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，则 $A^{-1}B\in SC_n^{>}(Q)\Leftrightarrow AB$

$= BA$；同样 $BA^{-1} \in SC_n^{\geq}(Q) \Leftrightarrow AB = BA$.

证 由 $A \in SC_n^{\geq}(Q)$ 及定理6.2.1之14°知 $A^{-1} \in SC_n^{\geq}(Q)$，又 $A^{-1}B = BA^{-1}$ 当且仅当 $AB = BA$；再由定理6.2.8知 $(A^{-1}B)$（或 BA^{-1}）$\in SC_n^{\geq}(Q)$ 当且仅当 $A^{-1}B = BA^{-1}$，故命题结论成立． □

定理 6.2.10 设 $A \in SC_n^{\geq}(Q)$，$f(x)$ 是实系数一元多项式，则 $f(A) \in SC_n^{\geq}(Q) \Leftrightarrow f(\lambda_t) > 0(1 \leqslant t \leqslant n)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值．

证 因 $A \in SC_n^{\geq}(Q)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则由命题5.1.1之6°知 $f(A) \in SC_n(Q)$，且 $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的 n 个特征值，于是由定理6.2.1之10°与9°即知本命题成立． □

命题 6.2.1 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则 A, B 能用同一个 $U \in U^{n \times n}$ 化为实对角阵 UAU^* 与 UBU^* 之充要条件为 $AB = BA$，此时 UAU^* 与 UBU^* 的主对角元素分别为 A 与 B 的特征值．

证 "必要性"．设有 $U \in U^{n \times n}$，使

$$UAU^* = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, \quad UBU^* = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$$

则由定理4.1.14知，$a_1, \cdots, a_n$ 与 $b_1, \cdots, b_n$ 恰好分别为 A 与 B 的全部特征值，从而均为实数，故此两对角阵可换，即

$$UABU^* = (UAU^*)(UBU^*) = (UBU^*)(UAU^*) = UBAU^*$$

从上式两边消去 U 与 U^*，即得 $AB = BA$．

"充分性" 设 $AB = BA$，首先由定理4.1.14知，有 $U \in U^{n \times n}$，使

$$UAU^* = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = D \tag{①}$$

因为置换矩阵 $P(i,j)$（即把 I_n 的 i, j 两行互换而得的矩阵）是特殊的广义酉矩阵，故不妨设式①中的对角矩阵是这样的，其相等的

元素是连着排下来的. 于是由式①及 $AB=BA$,有

$$D(UBU^*)=UABU^*=UBAU^*=(UBU^*)D \qquad ②$$

为了便于陈述,可再把 D 明确地设为

$$D=a_1I_{n_1}\oplus a_2I_{n_2}\oplus\cdots\oplus a_sI_{n_s},\ n_1+\cdots+n_s=n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 为互不相等的实数($s\leqslant n$),于是由式②,有

$$UBU^*=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_s$$

再由 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 均为自共轭阵,从而分别有广义酉矩阵 $U_1,U_2,\cdots,U_s$,使

$$U_1B_1U_1^*,U_2B_2U_2^*,\cdots,U_sBU_s^*$$

均为实对角阵,设其分别为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{1n_1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{2n_2}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} b_{s1} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{sn_s}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}(UBU^*)\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{1n_1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & b_{s1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & b_{sn_s}\end{pmatrix}=G,$$

$$\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}(UAU^*)\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix} a_1I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_sI_{n_s}\end{pmatrix}=D$$

故只要取

$$P=\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s \end{pmatrix}U$$

则 P 为广义酉矩阵，且 PBP^* 与 PAP^* 就分别为实对角阵 G 与 D，又由定理 4.1.17 知，酉相似变换不改变自共轭阵的特征值，故 D 与 G 的主对角线上的元素分别为自共轭矩阵 A 与 B 的特征值.

□

下面再给出命题 6.2.1 的推广结果：

命题 6.2.2 m 个同阶的自共轭阵 $A_1,\cdots,A_m$ 能由一个广义酉矩阵 U 同时化为实对角矩阵之充要条件是它们彼此可换.

证 “必要性” 由命题 6.2.1 即知

“充分性” 当 $m=2$ 时，由命题 6.2.1 知结论成立. 假设对 $m-1$ 个矩阵来说，结论成立. 我们来看 m 个自共轭阵 $A_1,\cdots,A_m$. 首先由定理 4.1.14 知，对 A_1，有 $V\in U^{m\times n}$，使

$$VA_1V^*=\lambda_1I_{n_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_sI_{n_s}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为不同的实数，仿命题 6.2.1 之证法知，必有

$$VA_iV^*=A_{i1}\oplus A_{i2}\oplus\cdots\oplus A_{is}(i=2,\cdots,m)$$

其中 $A_{ij}\in SC_{n_j}(Q)(i=2,\cdots,m,j=1,\cdots,s)$. 由于诸 A_i 可换，从而诸 $VA_iV^*(i=2,\cdots,m)$ 可换，又从而知诸 $A_{i1}(i=2,\cdots,m)$ 彼此可换；诸 $A_{i2}(i=2,\cdots,m)$ 彼此可换；…；诸 $A_{is}(i=2,\cdots,m)$ 彼此可换. 故由归纳法假设知，有广义酉矩阵 U_1，能同时化诸 $A_{i1}(i=2,\cdots,m)$ 成实对角阵；有广义酉矩阵 U_2 能同时化诸 $A_{i2}(i=2,\cdots,m)$ 成实对角阵；…；有广义酉矩阵 U_s 能同时化诸 $A_{is}(i=2,\cdots,m)$ 成实对角阵. 令

$$U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s$$

则 U 为广义酉矩阵，且

$$U(VA_1V^*)U^* = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \lambda_2 I_{n_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_s I_{n_s}$$

$$U(VA_iV^*)U^* = D_i (i=2,\cdots,m)$$

其中 $D_i(i=2,\cdots,m)$为实对角阵.故广义酉矩阵 $UV=W$ 即能同时把诸 A_i 化为实对角阵.归纳法完成. □

定理 6.2.11 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$为 m 元实系数多项式，$A_1,\cdots,A_m \in Q^{n\times n}$为两两乘法可换的正定矩阵,若对 A_1 的任一特征值 λ,A_2 的任一特征值 μ,$\cdots$,A_m 的任一特征值 γ 都有 $f(\lambda,\mu,\cdots,\gamma)>0$,则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$是正定矩阵.

证 因 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是两两乘法可换的四元数正定矩阵，则由命题 6.2.2 知,存在共同的 $U \in U^{n\times n}$,使诸 $UA_iU^*(1\leqslant i\leqslant m)$为实对角阵.即

$$UAU^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 } A_1 \text{ 的特征值；}$$

$$UA_2U^* = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \mu_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 } A_2 \text{ 的特征值；}$$

$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$

$$UA_mU^* = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{pmatrix}, \gamma_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 } A_m \text{ 的特征值.}$$

于是,有

$$Uf(A_1,\cdots,A_m)U^* = \begin{pmatrix} f(\lambda_1,\mu_1,\cdots,\gamma_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n,\mu_n,\cdots,\gamma_n) \end{pmatrix}$$

则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$的特征值为 $f(\lambda_1,\mu_1,\cdots,\gamma_1),\cdots,f(\lambda_n,\mu_n,\cdots,\gamma_n)$.由假设它们都是正数,又 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两乘法可换，可得：

$$(f(A_1,A_2,\cdots,A_m))^*=f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$$

故 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$是正定阵. □

定理 6.2.12 设 $A\in Q^{n\times n}$,A 为正定阵,则 A 的任意$k(1\leqslant k\leqslant n-1)$阶顺序主子式 A_k 及 A 关于A_k 的 Schur 补 A/A_k 都是正定的.

证 此即命题 5.7.1. □

下面再给出四元数矩阵为正定的几个充分判据.

定理 6.2.13 设 $A\in SC_n(Q)$,若存在 A 的某个 k 阶$(1\leqslant k\leqslant n-1)$的顺序主子阵 A_k 及 A_k 的 Schur 补 A/A_k 都是正定的,则 A 是正定的.

证 将 A 分块为:

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix}$$

因 A_k 正定,故 A_k^{-1} 存在且也是正定的,令

$$P=\begin{pmatrix}I_k & -A_k^{-1}B\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}$$

则 P 可逆,于是有

$$\begin{aligned}P^*AP&=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_k & -A_k^{-1}B\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_k & 0\\ 0 & A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_k & 0\\ 0 & A/A_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为已知 A_k 与 A/A_k 都是正定的,故由上式及定理 6.2.5 知,P^*AP是正定的.从而由定理 4.3.4 知 A 是正定的. □

推论 设 $A=\begin{pmatrix}a & \alpha\\ \alpha^* & A_1\end{pmatrix}\in SC_n(Q)$,$A$ 正定的充要条件是 $a>0$,且 $A_1-\frac{1}{a}\alpha^*\alpha$ 正定.

注 此推论可称为正定矩阵的**降阶判定法**.

定理 6.2.14 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，B 正定，$AB=BA$，则 AB 正定$\Leftrightarrow A$ 正定.

证 "$\Leftarrow$" 同定理6.2.8的充分性.

"$\Rightarrow$" 由 B 正定，$AB=BA$，AB 正定，可知，A 是自共轭阵，因否则，有 $A^*\neq A$，于是 $(AB)^*=(BA)^*=A^*B^*=A^*B\neq AB$，与 $AB\in SC_n(Q)$ 矛盾. 由 A,B 同为自共轭阵及 $AB=BA$，于是由命题6.2.1知，存在同一 $U\in U^{n\times n}$，使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U^*,\lambda_t\in R(1\leqslant t\leqslant n) \quad ①$$

$$B=U\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)U^*,0\leqslant\mu_t\in R(1\leqslant t\leqslant n) \quad ②$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 分别为 A 与 B 的特征值.

现假设 A 不是正定矩阵，则存在 $\lambda_0\leqslant 0$，而由式①,②，有

$$AB=U\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)$$

其中有一个 $\lambda_0\mu_0\leqslant 0$，这与 AB 是正定的相矛盾，故 A 必是正定的. □

命题 6.2.3 Q 上 m 阶中心封闭阵 A（见定义4.1.5）与 R 上 n 阶对称矩阵 B 的直积仍然中心封闭，且若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 分别是 A 与 B 的（实）特征值，则 $\lambda_i\mu_j$ 全是 $A\otimes B$ 的特征值，$i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$.

证 因 A 中心封闭，则存在 Q 上的 m 阶可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m),\lambda_i\in R,1\leqslant i\leqslant m$$

又因 B 实对称，则存在 n 阶实正交阵 U，使得

$$U^{-1}BU=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),\mu_j\in R,1\leqslant j\leqslant n$$

于是由式(2.1.21)，(2.1.22)，有

$$\begin{aligned}&(P\otimes U)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes U)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\otimes\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_1\mu_n,\cdots,\lambda_m\mu_1,\cdots,\lambda_m\mu_n)\end{aligned}$$

由上式可知，$A\otimes B$ 中心封闭，且 $\lambda_i\mu_j$ 是 $A\otimes B$ 的（实）特征值，$i=$

$1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$. □

推论 Q 上的 m 阶自共阵 A 与 R 上 n 阶对称阵 B 的直积 $A\otimes B$ 必是 Q 上的自共轭阵，且 $\lambda_i\mu_j$ 是 $A\otimes B$ 的特征值，其中 λ_i 与 μ_j 分别是 A 与 B 的(实)特征值，$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$.

定理 6.2.15 Q 上的 m 阶正定阵 A 与 R 上的 n 阶正定阵 B 的直积 $A\otimes B$ 仍是 Q 上的正定阵.

证 由命题 6.2.3 之推论知，$A\otimes B$ 是自共轭阵，又由定理 4.1.14 之推论 1 的必要性知，正定阵 A 与 B 的特征值 $\lambda_i>0$ 与 $\mu_j>0(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots n)$，从而由定理 6.2.14 之推论知，$A\otimes B$ 的特征值 $\lambda_i\mu_j>0(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$，因此由定理 4.1.14 之推论 1 的充分性即知 $A\otimes B$ 是正定阵. □

下面给出四元数正定矩阵的直积与圈积的正定性的等价条件.

定理 6.2.16 设 A 为四元数矩阵，B 为实正定阵，则下列命题等价：

1° A 是正定的；

2° $A\otimes B$ 是正定的；

3° $B\otimes A$ 是正定的；

4° $A\circ B$ 是正定的；

5° $B\circ A$ 是正定的.

证 1°⇒2° 见定理 6.2.15.

2°⇒1° 设 $A\otimes B$ 正定，B 实正定，则 A 是自共轭的，因若 A 不是自共轭的即 $A^*\neq A$，则由式(2.1.23)知，$(A\otimes B^*)=A^*\otimes B\neq A\otimes B$，这与 $A\otimes B$ 是自共轭的相矛盾. 由 A 是自共轭的(不妨设 A 为 m 阶的)，则由定理 4.1.14 知，存在广义酉阵 U，使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)U^*,\lambda_i\in R,i=1,\cdots,m,$$

又 B 为正定阵(不妨设为 n 阶的)，则存在实正交阵 V，使

$$B = V\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) V^*, \mu_j > 0, j = 1, \cdots, n.$$

现假设 A 不是正定的,则存在 $\lambda_{i_0} \leqslant 0$. 由式(2.1.23)及(2.1.21)易知

$$\begin{aligned}(U \otimes V)(U \otimes V)^* &= (U \otimes V)(U^* \otimes V^*) \\ &= UU^* \otimes VV^* = I_m \otimes I_n = I_{mn}\end{aligned}$$

故 $U \otimes V$ 仍为广义酉阵,再由式(2,1,21),有

$$\begin{aligned}&A \otimes B \\ &= (U \otimes V)[\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \otimes \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)] \otimes (U \otimes V)^*,\end{aligned}$$

而其中有 $\lambda_{i_0}\mu_j \leqslant 0 (j = 1, \cdots, n)$. 这与 $A \otimes B$ 是正定的相矛盾. 因此 A 必是正定的.

1°⇒4° 设 A 是正定的,B 是实正定的,则由 2°知,$A \otimes B$ 是正定的,若设 A, B 均为 n 阶的方阵,注意到 $A \circ B$ 是 n^2 阶方阵 $A \otimes B$ 的一个 n 阶主子阵,从而由定理 4.3.8 即知 $A \circ B$ 也是正定的.

4°⇒1° 设 B 是 R 上的 n 阶正定阵,则存在 R 上的 n 阶可逆阵 P,使 $P^* BP = I$,即 $B = (P^{-1})^* P^{-1}$,记 $P^{-1} = (p_{ij})_{n \times n}$,则

$$B = (P^{-1})^* P^{-1} = (b_{ij})_{n \times n},\ b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{jk}, i, j = 1, \cdots, n.$$

现假设 A 不是正定的,则存在 $0 \neq y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n \times 1}$,使 $y^* Ay \leqslant 0$,令 $x = P^{-1} y$,则 $0 \neq x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n \times 1}$,且

$$\begin{aligned}x^* (A \circ B) x &= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} b_{ij} x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} p_{ik} p_{jk} x_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \bar{x}_i a_{ij} p_{ik} x_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{K=1}^{n} (p_{1k}\bar{x}_1, \cdots, p_{nk}x_n) A \begin{pmatrix} p_{1k}x_1 \\ \vdots \\ p_{nk}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k A y_k = y^* A y \leqslant 0$$

这与 $A \circ B$ 是正定的相矛盾，故 A 必是正定的.

同理可证 $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ, 1^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$. □

§6.3 四元数亚正定矩阵

在§5.6讨论四元数矩阵迹的不等式时，曾引入了四元数亚正定矩阵的定义(见定义5.6.1)：

设 $A \in Q^{n\times n}$，若对任意 $0 \neq x \in Q^{n\times 1}$，有

$$x^* A x > 0 (\geqslant 0) \tag{6.3.1}$$

则称 A 为 Q 上的(半)亚正定阵，或简称为(半)亚正定阵. 亚正定阵与正定阵的区别在于亚正定阵并不像正定阵那样要求一定是自共轭的. 显然正定阵一定是亚正定阵，但反之不真.

为了讨论方便，对任意 $A \in Q^{n\times n}$，我们曾引入

$$R(A) = \frac{A + A^*}{2}, S(A) = \frac{A - A^*}{2}, A = R(A) + S(A) \tag{6.3.2}$$

分别称 $R(A)$，$S(A)$ 为 A 的**自共轭分支与斜自共轭分支**.

易证如下两个命题成立.

命题 6.3.1 设 A 为 Q 上矩阵，B 为 R 上矩阵，则

$$R(A \otimes B) = R(A) \otimes B, \quad R(A \circ B) = R(A) \circ B$$

命题 6.3.2 设 A, B 均为 Q 上的矩阵，且 B 为自共轭的，$AB = BA$，则 $R(AB) = R(A)B = BR(A)$.

命题 6.3.3 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,满足 $AB=BA,A^*B=BA^*$,则

1° $R(A)R(B),S(A)S(B)$为自共轭阵;

2° $S(A)R(B),S(B)R(A)$为斜自共轭阵.

证 由 $AB=BA,A^*B=BA^*$,易知有

$$B^*A^*=A^*B^*,B^*A=AB^*$$

因此,有

$$\begin{aligned}(R(A)R(B))^*&=(R(B))^*(R(A))^*=R(B)R(A)\\&=\frac{1}{4}(BA+BA^*+B^*A+B^*A^*)\\&=\frac{1}{4}(AB+A^*B+AB^*+A^*B^*)\\&=\frac{1}{4}(A+A^*)(B+B^*)=R(A)R(B)\end{aligned}$$

故 $R(A)R(B)$为自共轭阵.

同理可证:$S(A)S(B)$为自共轭阵,$S(A)R(B),S(B)R(A)$为斜自共轭阵. □

定理 6.3.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则下列命题等价:

1° A 亚正定;

2° $R(A)$正定;

3° A^{-1}存在且亚正定;

4° A^*亚正定;

5° 对任意可逆阵$P\in Q^{n\times n}$,P^*AP 亚正定.

证 1°⇔2° 即命题 5.6.3.

1°⇒3° 首先证明:由 A 亚正定,则 A 必可逆.假若不然,则有 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,使 $Ax=0$,从而 $x^*Ax=0$,与 A 亚正定相矛盾.下面证明 A^{-1}必为亚正定的,事实上,因为

$$(x^*A^{-1}x)^*=(A^{-1}x)^*x=(A^{-1}x)^*A(A^{-1}x)=y^*Ay$$

其中 $y=A^{-1}x$.上式表明 $x^*A^{-1}x$ 与y^*Ay 有相同的实部.而对

任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有 $y\neq 0$，故有

$$\operatorname{Re}(x^* A^{-1}x)=\operatorname{Re}(y^* Ay)>0$$

故由 2°知，A^{-1}是亚正定的.

3°⇒1°　与 1°⇒3°的证明是一样的.

1°⇒4°　因为

$$(x^* A^* x)^* = x^* Ax$$

上式表明，$x^* A^* x$ 与 $x^* Ax$ 有相同的实部，从而

$$\operatorname{Re}(x^* A^* x)=\operatorname{Re}(x^* Ax)>0$$

故由 2°即知，A^* 是亚正定的.

4°⇒1°　与 1°⇒4°的证明一样.

1°⇒5°　对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，令 $y=Px$，因 P 可逆，则 $0\neq y\in Q^{n\times 1}$，于是由 A 是亚正定的，则有

$$\operatorname{Re}(x^*(P^* AP)x)=\operatorname{Re}(y^* Ay)>0$$

故 $P^* AP$ 是亚定的.

5°⇒1°　与 1°⇒5°的证明一样. □

定理 6.3.2　设 $A\in Q^{n\times n}$，A 亚正定，则

1° A 的任意右特征值的实部大于零；

2° A 的任意 k 阶主子阵 A_k 亦亚正定，特别地，A 的主对角元的实部恒正；

3° A 的关于它的 k 阶主子阵 A_k 的 Schur 补 A/A_k 必亚正定.

证　1° 设 λ 是 A 的任一右特征值，则存在 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，使

$$Ax=x\lambda,$$

则

$$x^* Ax = x^* x\lambda$$

故

$$0<\operatorname{Re}(x^* Ax)=x^* x\operatorname{Re}(\lambda)$$

因为　$x^* x\neq 0$，从而由上式有 $\operatorname{Re}(\lambda)>0$，

2° 因 A 亚正定，则对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有

$$\operatorname{Re}(x^* Ax)>0$$

对任意 $y_k\in Q^{k\times 1}$，$y_k=(y_{i_1},\cdots,y_{i_k})^{\mathrm{T}}$，取

$$x=(0,\cdots,0,y_{i_1},0,\cdots,0,y_{i_2},0,\cdots,0,y_{i_k},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$$

则有 $y_k^*A_ky_k=x^*Ax$，从而

$$\mathrm{Re}(y_k^*A_ky_k)=\mathrm{Re}(x^*Ax)>0$$

故 A_k 是亚正定的.

3° 设

$$A=\begin{pmatrix} A_k & B \\ C & A_{n-k} \end{pmatrix}$$

由2°及定理 6.3.1 之 3°知，A_k 与 A_{n-k} 均亚正定，从而可逆，又

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} (A/A_{n-k})^{-1} & -A_k^{-1}B(A/A_k)^{-1} \\ -(A/A_k)^{-1}CA_k^{-1} & (A/A_k)^{-1} \end{bmatrix}$$

由定理 6.3.1 之 3°知，A^{-1} 是亚正定的，于是由 2°知，$(A/A_{n-k})^{-1}$ 与 $(A/A_k)^{-1}$ 均为亚正定的，因此 A/A_{n-k} 与 A/A_k 也是亚正定的. □

注 定理 6.3.2 之 1°的逆不成立，即特征值的实部均大于零的四元数矩阵不一定是亚正定阵. 例如二阶阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 在 Q 上仅有右特征值 1，但 A 不是亚正定阵. 然而如下的命题是成立的.

定理 6.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，A 是正规阵(即 A 满足 $AA^*=A^*A$，见定义 4.1.5)且 A 的任一右特征值的实部都大于零，则 A 是亚正定的.

证 因 A 是正规阵，则由定理 4.1.19 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个右特征值，于是有

$$U^*R(A)U=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1+\overline{\lambda_1}}{2},\cdots,\frac{\lambda_n+\overline{\lambda_n}}{2}\right)$$

又因为

$$\frac{\lambda_t+\overline{\lambda_t}}{2}=R(\lambda_t)>0,1\leqslant t\leqslant n$$

故 $R(A)$是正定的，从而 A 是亚正定的． □

定理 6.3.4 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 是亚正定的充要条件是存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*AP=\mathrm{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)，其中\ \lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n \tag{6.3.3}$$

证 先证充分性．设存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使式(6.3.3)成立．对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，令 $y=P^{-1}x$，则 $0\neq y\in Q^{n\times 1}$，且

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x^*Ax)&=\mathrm{Re}(y^*P^*APy)\\&=\mathrm{Re}(y^*\mathrm{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)y)>0\end{aligned}$$

故 A 亚正定．

再证必要性．设 A 亚正定，则由定理 6.3.1 之 2°知，$R(A)$正定，故由定理 4.3.2 知，存在可逆阵 $P_1\in U^{n\times n}$，使

$$P_1^*R(A)P_1=I$$

又因为 $S(A)$是斜自共轭阵，故 $P_1^*S(A)P_1$ 仍为斜自共轭阵，于是由命题 5.6.9 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*P_1^*S(A)P_1U=\mathrm{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n),\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n,$$

令 $P=P_1U$，则显然 P 可逆，且

$$\begin{aligned}P^*AP&=P^*(R(A)+S(A))P\\&=P^*R(A)P+P^*S(A)P\\&=\mathrm{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)\end{aligned}$$

这就证明了式(6.3.3)成立． □

定理 6.3.5 设 $A\in Q^{n\times n}$，A 为亚正定阵，$R(A)$的最小、最大特征值分别为 λ,μ 则对任意 $x\in Q^{n\times 1}$，有

$$\lambda(x^*x)\leqslant\mathrm{Re}(x^*Ax)\leqslant\mu(x^*x) \tag{6.3.4}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x^*Ax)&=\frac{1}{2}(x^*Ax+x^*A^*x)\\&=x^*R(A)x\end{aligned} \qquad ①$$

由定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^* R(A) U=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $R(A)$的 n 个特征值,它们全为正实数,于是有

$$\lambda x^* x\leqslant x^* R(A) x=x^* U\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) Ux\leqslant \mu x^* x \qquad ②$$

其中 λ,μ 分别是 $R(A)$的最小与最大特征值. 从而由式①与②即知式(6.3.4)成立. □

关于亚正定阵,我们还有如下的**降价判定法**.

定理 6.3.6 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,且 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1 \end{pmatrix} \tag{6.3.5}$$

则 A 为亚正定阵的充要条件是

$$\operatorname{Re}(a_{11})>0,\ B_1=A_1-\frac{1}{4\operatorname{Re}(a_{11})}(\beta+\alpha^*)(\beta^*+\alpha)\in P_n^{>}(Q) \tag{6.3.6}$$

证 先证必要性.

当 $A=(a_{ij})$正定时,结论显然成立. 当 $A=(a_{ij})$为亚正定,且 $n>1$ 时,设 $X\in Q^{n\times 1}$,将其分块为 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$, $X_1\in Q^{n-1}$,则有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(X^* AX) &= \operatorname{Re}\left[(\bar{x}_1 X_1^*)\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ X_1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1+X^*\beta x_1+\bar{x}_1\alpha X_1+X_1^* A_1 X_1) \\
&= \operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1)+\operatorname{Re}(X_1^*\beta x_1) \\
&\quad +\operatorname{Re}(\bar{x}_1\alpha X_1)+\operatorname{Re}(X_1^* A_1 X_1) \qquad ①
\end{aligned}$$

易知

$$\operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1)=\operatorname{Re}(a_{11})\cdot\bar{x}_1 x_1 \qquad ②$$

$$\operatorname{Re}(X_1^*\beta x_1)=\frac{1}{2}(X_1^*\beta x_1+\bar{x}_1\beta^* X_1) \qquad ③$$

$$\mathrm{Re}(\bar{x}_1\alpha X_1)=\frac{1}{2}(\bar{x}_1\alpha X_1+X_1^*\alpha^*x_1) \qquad ④$$

将②、③、④代入①，在 $\mathrm{Re}(a_{11})\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(X^*AX)\\
&=\mathrm{Re}(a_{11})\cdot\left[\bar{x}_1+\frac{X_1^*(\beta+\alpha^*)}{2\mathrm{Re}(a_{11})}\right]\left[x_1+\frac{(\beta^*+\alpha)X_1}{2\mathrm{Re}(a_{11})}\right]\\
&\quad+\mathrm{Re}\left\{X_1^*\left[A_1-\frac{(\beta+\alpha^*)(\beta^*+\alpha)}{4\mathrm{Re}(a_{11})}\right]X_1\right\}\\
&=\mathrm{Re}(a_{11})\cdot N\left[x_1+\frac{(\beta^*+\alpha)X_1}{2\mathrm{Re}(a_{11})}\right]+\mathrm{Re}(X_1^*B_1X_1) \qquad ⑤
\end{aligned}$$

其中 B_1 如式(6.3.6)所示.

因为 A 为亚正定阵，于是我们取 $X=(1,0,\cdots,0)\in Q^{n\times 1}$，则有

$$0<\mathrm{Re}(X^*AX)=\mathrm{Re}(a_{11})$$

又对任意 $0\neq X_1\in Q^{(n-1)\times 1}$，则总存在 $x_1\in Q$，使

$$x_1+\frac{1}{2\mathrm{Re}(a_{11})}(\beta^*+\alpha)X_1=0$$

这时 $0\neq\begin{pmatrix}x_1\\X_1\end{pmatrix}=X\in Q^{n\times 1}$，使式⑤的右边第 1 项变为零，从而由式⑤，有

$$\mathrm{Re}(X_1^*B_1X_1)=\mathrm{Re}(X^*AX)>0$$

故 B_1 为亚正定阵，必要性获证.

当 $\mathrm{Re}(a_{11})>0$，且形如式(6.3.6)的 B_1 为亚正定阵时，总有⑤式成立，但⑤式右边的第 2 项 $\mathrm{Re}(X_1^*B_1X_1)\geqslant 0$. 对任意 $0\neq X\in Q^{n\times 1}$，令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\X_1\end{pmatrix}$，$X_1\in Q^{(n-1)\times 1}$，则当 $X_1\neq 0$ 时，有 $\mathrm{Re}(X_1^*B_1X_1)>0$，从而由式⑤立得 $\mathrm{Re}(X^*AX)>0$；如果 $X_1=0$，必有 $x_1\neq 0$，这时 $\mathrm{Re}(X_1^*B_1X_1)=0$，但仍由式⑤得 $\mathrm{Re}(X^*AX)=$

$\mathrm{Re}(a_{11})\cdot N(x_1)>0$,故 A 为亚正定阵.充分性获证. □

推论 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in Q^{2\times 2}$,则 A 为亚正定阵的充要条件是

$$\mathrm{Re}(a_{11})>0,\ \mathrm{Re}(a_{11})\mathrm{Re}(a_{22})-\frac{1}{4}N(a_{21}+\overline{a}_{12})>0 \quad (6.3.7)$$

例 $A=\begin{pmatrix}2+i-j+4k & i-2j+k\\ i+3k & 4-i+j-k\end{pmatrix}$满足式(6.3.7),故 A 是亚正定阵.

利用定理 6.3.2 之 2° 及定理 6.3.5,仿照定理 6.3.6 的推理方法,我们还可将定理 6.3.6 推广到一般情形.

定理 6.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},A_{11}\in Q^{k\times k},A_{22}\in Q^{(n-k)\times(n-k)} \quad (6.3.8)$$

且 $R(A_{11})=\frac{1}{2}(A_{11}+A_{11}^*)$的最大与最小特征值分别为 μ 与 λ,则 A 为亚正定阵的必要条件是:

$$A_{11},\ B_1=A_{22}-\frac{1}{4\mu}(A_{21}+A_{12}^*)(A_{21}^*+A_{12})$$

均为亚正定阵;而 A 为亚正定阵的充分条件是:

$$A_{11},\ B_2=A_{22}-\frac{1}{4\lambda}(A_{21}+A_{12}^*)(A_{21}^*+A_{12})$$

均为亚正定阵.

证 对任意

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\in Q^{n\times 1},X_1\in Q^{k\times 1},X_2\in Q^{(n-k)\times 1} \quad ①$$

有

$$\mathrm{Re}(X^*AX)=\mathrm{Re}\left[(X_1^*,X_2^*)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_{11}) + \mathrm{Re}(X_2^* A_{21} X_1) + \mathrm{Re}(X_1^* A_{12} X_2) + \mathrm{Re}(X_2^* A_{22} X_2) \quad ②$$

$$\mathrm{Re}(X_1^* A_{12} X_2) = \frac{1}{2}(X_2^* A_{12}^* X_1 + X_1^* A_{12} X_2) \quad ③$$

$$\mathrm{Re}(X_2^* A_{21} X_1) = \frac{1}{2}(X_2^* A_{21}^* X_1 + X_1^* A_{21}^* X_2) \quad ④$$

又由式(6.3.4),有

$$\lambda(X_1^* X_1) \leqslant \mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_1) \leqslant \mu(X_1^* X_1)$$

故当 λ,μ 均不为零时,由式②,③,④,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(X^* AX) &\leqslant \mu \cdot N\left[X_1 + \frac{1}{2\mu}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right] \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\{X^*\left[A_{22} - \frac{1}{4\mu}(A_{21} + A_{12}^*)(A_{21}^* + A_{12})\right]X_2\right\} \\ &= \mu \cdot N\left[x_1 + \frac{1}{2\mu}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right] + \mathrm{Re}(X_2 B_2 X_2) \quad ⑤\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(X^* AX) &\geqslant \lambda \cdot N\left[X_1 + \frac{1}{2\lambda}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right] \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\{X_2^*\left[A_{22} - \frac{1}{4\lambda}(A_{21} + A_{12}^*)(A_{21}^* + A_{12})\right]X_2\right\} \\ &= \lambda \cdot N(X_1 + \frac{1}{2\lambda}(A_{21}^* + A_{12})X_2) + \mathrm{Re}(X_2^* B_2 X_2) \quad ⑥\end{aligned}$$

下证充分性. 由于 A_{11} 为亚正定阵,则 $R(A_{11})$ 为正定阵,从而 $\lambda,\mu>0$,又 B_2 为亚正定阵,从而由式⑥知,$\mathrm{Re}(X^* AX)>0$,故 A 是亚正定阵.

再证必要性,若 A 是亚正定阵,则对任意 $X_1 \in Q^{k\times 1}$,$X_1 \neq 0$,取 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(X^* AX) &= \mathrm{Re}\left[(X_1^*, 0)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_1) > 0\end{aligned}$$

故 A_{11}为亚正定阵，于是 $R(A_{11})$是正定阵，它的特征值全为正实数，这表明式⑤，⑥均成立. 对任意 $0\neq X_2\in Q^{(n-k)\times 1}$，必存在 $X_1\in Q^{k\times 1}$，使

$$X_1+\frac{1}{2\mu}(A_{21}^*+A_{12})X_2=0$$

记 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$，则由式⑤，有

$$\mathrm{Re}(X_2^*B_1X_2)\geqslant \mathrm{Re}(X^*AX)>0$$

故 B_1 是亚正定阵. □

定理 6.3.8 设 $A\in Q^{n\times n}$，且 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 A_{11}，A_{22}分别为方阵，则 A 亚正定$\Leftrightarrow A_{11}$亚正定，且

$$A_{22}-\left(\frac{A_{21}\times A_{12}^*}{2}\right)\left(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}\right)\text{亚正定.}$$

证 由命题 5.6.3 知，A 亚正定$\Leftrightarrow R(A)$正定.

而 $R(A)=\begin{pmatrix}R(A_{11}) & B\\B^* & R(A_{22})\end{pmatrix}$，其中 $B=\left(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}\right)$

由命题 5.7.1 知，$R(A)$正定$\Leftrightarrow R(A_{11})$正定，且

$$R(A_{22})-B^*(R(A_{11}))^{-1}B \text{ 正定.}$$

注意到

$$\begin{aligned}&R(A_{22})-B^*(R(A_{11}))^{-1}B\\=&\frac{A_{22}+A_{22}^*}{2}-\left(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2}\right)\left(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}\right)\\=&R\left(A_{22}-\left(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2}\right)\left(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

因此由命题 5.6.3 知，

A 亚正定$\Leftrightarrow A_{11}$亚正定，且

$$A_{22}-\left(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2}\right)\left(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}\right)\text{亚正定.}$$ □

推论 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}, A_1\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,则 A 亚正定$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(a_{11})>0$,且 $A_1-\dfrac{1}{\mathrm{Re}(a_{11})}(\beta+\alpha^*)(\alpha+\beta^*)$亚正定.

关于亚正定矩阵的乘积的亚正定性,我们有如下

定理 6.3.9 设 $A\in Q^{n\times n}, B\in R^{n\times n}$,$B$ 为实正定阵,则 AB 为 Q 上的亚正定阵的充要条件是A 为Q 上的亚正定阵.

证 先证充分性. 由 B 为R 上的亚定阵,$AB=BA$ 及命题 6.3.2,有

$$R(AB)=R(A)B=BR(A) \tag{①}$$

又 A 为亚正定阵,由定理 6.3.1 之 2°知,$R(A)$为正定阵,而 B 是 R 上亚定阵,于是由式①及定理 6.2.8 知,$R(AB)$是正定的. 从而由定理 6.3.1 之 2°即知 AB 是亚正定的.

再证必要性. 这时仍有式①成立,且由 AB 亚正定,则 $R(AB)$正定,于是由定理 6.2.4 的必要性即知 $R(A)$正定,从而 A 亚正定. □

为了给出亚正定阵的和与乘积为亚正定性的另一些条件,我们引入如下概念和一个命题.

定义 6.3.1 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^*AP=I$$

$$P^*BP=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),\ \mu_t\in Q,1\leqslant t\leqslant n$$

则称 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为矩阵B 相对于A 的**广义特征值**.

定理 6.3.10 设 $A,B\in SC_n(Q)$,且 A 为正定矩阵,则 $A+B$ 为正定矩阵的充要条件是B 相对于A 的广义特征值均大于 -1.

证 由定理 4.3.2 知,A 为正定矩阵$\Leftrightarrow$存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1^* AP_1 = I$$

由命题 4.3.2 知，此时 $P_1^* BP_1$ 仍为自共轭阵，于是由定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n \times n}$，使

$$U^* P_1^* BP_1 U = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

且
$$U^* P_1^* AP_1 U = I.$$

令 $P = P_1 U$，显然 P 为可逆阵，$A + B$ 为自共轭阵，且

$$\begin{aligned} P^*(A+B)P &= P^* AP + P^* BP \\ &= \mathrm{diag}(1+\mu_1, \cdots, 1+\mu_n) \end{aligned}$$

于是由定理 4.1.14 之推论 1 知：

$$\begin{aligned} A+B \text{ 为正定阵} &\Leftrightarrow 1+\mu_t > 0 (t=1,\cdots,n) \\ &\Leftrightarrow \mu_t > -1 (t=1,\cdots,n) \\ &\Leftrightarrow B \text{ 相对于 } A \text{ 的广义特征值均大于 } -1 \end{aligned}$$
□

定理 6.3.11 设 $A, B \in Q^{n \times n}$ 均为亚正定阵，且满足 $AB = BA$，$A^* B = BA^*$，则 AB 为亚正定阵$\Leftrightarrow S(A)S(B)$相对于$R(A)R(B)$的广义特征值均大于 -1.

证
$$\begin{aligned} AB &= (R(A)+S(A))(R(B)+S(B)) \\ &= R(A)R(B) + S(A)S(B) \\ &\quad + S(A)R(B) + S(B)R(A) \end{aligned}$$

由已知 $AB = BA$，$A^* B = BA^*$ 及命题(6.3.3)知，$R(A)R(B) + S(A)S(B)$为自共轭阵，$S(A)R(B) + S(B)R(A)$为斜自共轭阵，由矩阵分解的唯一性得：

$$R(AB) = R(A)R(B) + S(A)S(B)$$
$$S(AB) = S(A)R(B) + S(B)R(A)$$

设 $\lambda_t (t=1,\cdots,n)$是 $S(A)S(B)$相对于 $R(A)R(B)$的广义特征值，由已知 A, B 均为n 阶正定阵及定理 6.3.1 知，$R(A)R(B)$均为正定阵，再由定理 6.2.14 及定理 6.3.1 知，$R(A)R(B)$为正定阵，从而由 $S(A)S(B)$为自共轭阵及定理 6.3.10，知

$R(AB) = R(A)R(B) + S(A)S(B)$ 为正定阵$\Leftrightarrow$

$S(A)S(B)$相对于 $R(A)R(B)$的广义特征值 $\lambda_t > -1(1 \leqslant t \leqslant n)$,

因此

AB 为亚正定阵$\Leftrightarrow R(AB)$为正定阵$\Leftrightarrow S(A)S(B)$相对于 $R(A)R(B)$的广义特征值 $\lambda_t > -1(1 \leqslant t \leqslant n)$. □

关于亚正定阵的直积与圈积的亚正定阵,也有如下

定理 6.3.12 设 A 为 $\mathbf{Q}$ 上的矩阵,B 为 R 上的亚正定阵,则下列命题等价:

1° A 是亚正定阵;

2° $A \otimes B$ 是亚正定阵;

3° $B \otimes A$ 是亚正定阵;

4° $A \circ B$ 是亚正定阵;

5° $B \circ A$ 是亚正定阵.

证 $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ 因 A 是亚正定阵,则 $R(A)$正定,又 B 是 R 上正定阵,故由定理 6.2.15 之 2° 及命题 6.3.1 知 $R(A \otimes B) = R(A) \otimes B$ 为正定阵,从而 $A \otimes B$ 是亚正定阵.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 由 $A \otimes B$ 是亚正定阵,则 $R(A \otimes B)$为正定阵,又 B 为 R 上正定阵,则由命题 6.3.1 知,$R(A) \otimes B = R(A \otimes B)$,从而 $R(A) \otimes B$ 为正定阵,再由定理 6.2.15 即知 $R(A)$亦为正定阵,因此 A 为亚正定阵.

$1^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 由 A 为亚正定阵,则 $R(A)$为正定阵,又 B 为实正定阵,由定理 6.2.15 知 $R(A) \circ B$ 是亚定阵,又由命题 6.3.1 知,$R(A \circ B) = R(A) \circ B$,故 $R(A \circ B)$是正定阵,从而 $A \circ B$ 是亚正定阵.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 由 $A \circ B$ 为亚正定阵,则 $R(A \circ B)$为正定阵,由 B 为 R 上正定阵及命题 6.3.1 有 $R(A \circ B) = R(A) \circ B$,故 $R(A)$

$\circ B$为正定阵，于是由定理6.2.15知$R(A)$为正定阵，从而A为亚正定阵.

同理可证$1°\Leftrightarrow 3°$，$1°\Leftrightarrow 5°$. □

推论 设A为Q上的亚正定阵，B是R上的亚正定阵，则$A\otimes R(B)$，$R(A)\otimes B$，$A\circ R(B)$，$R(A)\circ B$都是Q上的亚正定阵. □